



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Hornicko-geologická fakulta



VYROVNÁVACÍ POČET

Ing. Miroslav Novosad, Ph.D.

Ostrava 2021



Toto dílo podléhá licenci [Creative Commons Uved'te původ – Zachovejte licenci 4.0 Mezinárodní License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

Obsah

1. Vyrovnání zprostředkujících měření.....	5
1.1 Podstata vyrovnání zprostředkujících měření.....	5
1.2 Normální rovnice – jejich odvození pro 3 neznámé	6
1.3 Řešení normálních rovnic	9
1.3.1 Řešení postupnou Gaussovou eliminací.....	9
1.3.2 Řešení pomocí determinantů	11
1.3.3 Řešení metodou postupné iterace	11
1.4 Rovnice oprav	13
1.4.1 Lineární rovnice oprav	13
1.4.2 Nelineární rovnice oprav – přetvoření rovnic	13
1.5 Kontrola oprav	15
1.5.1 Rovnice pro ověření výpočtu oprav.....	15
1.5.2 Kontrola výrazu $[p_{vv}]$. Zkoušky sigmové.....	16
1.6 Váhy neznámých střední chyby vyrovnaných hodnot.....	18
1.6.1 Určení vah řešením váhových rovnic.....	18
1.6.2 Určení vah neznámých přestavbou normálních rovnic	21
1.6.3 Další způsob výpočtu váhových koeficientů q	22
1.6.4 Určení váhových koeficientů při dvou neznámých.....	22
1.6.5 Střední chyba jednoho měření a střední chyba jednotky váhy	23
1.7 Postup výpočtu při vyrovnání měření zprostředkujících.....	23
2. Vyrovnání podmínkových měření	34
2.1 Podstata vyrovnání podmínkových měření.....	34
2.1.1 Podmínkové rovnice nelineární.....	34
2.1.2 Podmínkové rovnice lineární.....	35
2.2 Sestavení podmínkových rovnic a přetvořených podmínkových rovnic.....	36
2.2.1 Sestavení podmínkových rovnic (lineární závislost)	36
2.2.2 Nelineární závislost.....	37
2.3 Výpočet oprav	39
2.3.1 Výpočet oprav převodem na metodu vyrovnání zprostředkujících měření.....	39
2.3.2 Výpočet oprav pomocí korelát (korelátové vyrovnání).....	39
2.4 Početní kontroly při korelátovém vyrovnání.....	41
2.4.1 Kontroly při sestavování a řešení normálních rovnic	41
2.4.2 Výpočet $[p_{vv}]$ a jeho kontroly	41

2.5 Charakteristiky přesnosti při vyrovnaní podmínkových měření	42
2.5.1 Střední chyba m jednoho měření a střední chyba m_0 pro jednotkovou váhu	42
2.5.2 Střední chyba vyrovnaných veličin a střední chyba funkce vyrovnaných veličin	42
2.6 Postup při vyrovnaní podmínkových měření pomocí korelát (pro 3 podmínkové rovnice při nestejných vahách měřených veličin)	46
3. Kombinované vyrovnaní	59
4. Využití maticového počtu při výpočtech	60
4.1 Základní pojmy maticového počtu	60
4.2 Postup vyrovnaní měření zprostředkujících	61
4.3 Postup vyrovnaní měření podmínkových	63
4.4 Ukázkový příklad	64

1. Vyrovnání zprostředkujících měření

1.1 Podstata vyrovnání zprostředkujících měření

U vyrovnání měření přímých byly určovány nejpravděpodobnější hodnoty veličin, které se přímo měřily. Nemůžeme-li však neznámé veličiny přímo měřit, počítáme je z jiných, které přímo měřit můžeme a které jsou s neznámými veličinami ve známém funkčním vztahu. Měřené veličiny nám umožňují – „zprostředkují“ určit veličiny neznáme.

Příklad: Pravoúhlé souřadnice bodů X, Y nemůžeme měřit přímo. Vypočteme je podle známých funkčních vztahů z měřených délek nebo úhlů. Je-li počet měření větší než počet neznámých, můžeme sestavit více rovnic než je neznámých a neznámé určit vyrovnáním. Geodetický bod je určen v rovině dvěma souřadnicemi. Kdybychom měřili jen dvě zprostředkující veličiny, například jen úhly na dvou daných bodech, můžeme dvě souřadnice x, y vypočítat jednoznačně. Měříme-li úhly na více než dvou bodech, máme k dispozici nadbytečné měření a hledané dvě souřadnice x, y určíme vyrovnáním.

U měření zprostředkujících se tedy hledané neznámé hodnoty určují na podkladě jiných přímo měřených veličin, které jsou s hledanými ve známé matematické závislosti (funkčním vztahu). Zprostředkující veličiny, které přímo měříme, jsou zpravidla určeny jako aritmetické průměry z opakovaných měření. Jejich nevyhnutelné chyby se přenášejí na vypočtené hodnoty neznámých. Úkolem vyrovnání (nejen) zprostředkujících měření pak opět je:

- určení nejpravděpodobnějších hodnot neznámých a oprav naměřených veličin,
- určení střední chyby zjištěných nejpravděpodobnějších hodnot neznámých.

Stálé a proměnné veličiny jsou spojeny funkčním vztahem, jehož tvar je znám.

Například:

$$U = f(X, Y, Z, \dots a, b, c, \dots) \quad (1.1a)$$

Hodnoty X, Y, Z se stanoví tak, že k zvláštním hodnotám nezávisle proměnných a, b, c, \dots se určí příslušné hodnoty závislé proměnné U_i a z rovnic takto získaných se vypočtou hledané hodnoty X, Y, Z . Při počtu ν - neznámých by stačilo ν - skutečných hodnot $U_1, U_2, \dots U_\nu$ pro jednoznačné určení jejich správných hodnot.

Při měření se nepodaří zjistit skutečné hodnoty U_i , nýbrž se získají jen hodnoty měření, které jsou zatíženy náhodnými chybami. Abychom potlačili vliv těchto chyb, provádíme více tj. n měření, než je neznámých ve funkci, takže u zprostředkujících měření je vždy $n > \nu$. Rozdíl $n - \nu$ udává počet nadbytečných měření. Potom však každá kombinace ν rovnic dává jiné hodnoty pro neznámé X, Y, Z .

Kdybychom znali skutečné chyby ε_i a mohli opravit měření l_i , zůstala by v platnosti závislost (1.1a)

$$l_i + \varepsilon_i = U_i = f(X, Y, Z, \dots a_i, b_i, c_i, \dots) \quad (1.1b)$$

Skutečné chyby ε_i však neznáme. Z měření, která jsou zatížena náhodnými chybami, nelze stanovit správné hodnoty hledaných veličin X, Y, Z, \dots , nýbrž jen více či méně přesné hodnoty přibližné (nejpravděpodobnější hodnoty) x, y, z, \dots , pro které platí

$$l_i + v_i = u_i = f(x, y, z, \dots a_i, b_i, c_i, \dots) \quad (1.1c)$$

Předpokládejme o této funkci f , že je lineární a dále uvažujme pouze 3 neznámé: x, y, z (2 by bylo příliš jednoduché a více než 3 zbytečně složité pro další odvození). Potom:

$$f(x, y, z, a_i, b_i, c_i) = a_i x + b_i y + c_i z \quad (1.2)$$

Dosazením (1.2) do (1.1c) dostaneme tzv. rovnice oprav

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 \quad \dots p_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 \quad \dots p_2 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z - l_n \quad \dots p_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Z této rovnice je zřejmé, že oprava se vypočte jako rozdíl vyrovnané zprostředkující veličiny, tj. $(l_i + v_i) = a_i x + b_i y + c_i z$ a hodnoty měřené l_i .

Úkolem vyrovnávacího počtu je odstranit nesrovnalosti z nadbytečných měření zatížených již zmíněnými náhodnými chybami. Bude tedy nutno opravit jednotlivá měření o opravy v_i , aby bylo dosaženo souladu mezi hodnotami zprostředkující funkce u_i a hodnotami měřenými l_i .

Nutno si uvědomit již zpočátku, že rovnic je tolik, kolik je měření, to je n . Měření musí být vykonána v nadbytečném počtu, aby k vyrovnání vůbec mohlo dojít. Počet měření n musí tedy být větší než počet neznámých v .

1.2 Normální rovnice – jejich odvození pro 3 neznámé

Nejpravděpodobnější hodnoty pro neznámé x, y, z dostaneme tím, že k dosud platným podmínkám obsaženým v rovnicích oprav (1.3) připojíme hlavní podmínku vyrovnávacího počtu metodou nejmenších čtverců:

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 = \min.$$

Umocněním rovnice (1.3) na druhou a vynásobením příslušnými váhami dostaneme

$$p_i v_i^2 = p_i a_i^2 x^2 + p_i b_i^2 y^2 + p_i c_i^2 z^2 + p_i l_i^2 + 2p_i a_i b_i xy + 2p_i a_i c_i xz + 2p_i b_i c_i yz - 2p_i a_i l_i x - 2p_i b_i l_i y - 2p_i c_i l_i z \quad (1.4)$$

Sečtením této rovnice (1.4) dostaneme:

$$[pvv] = [paa]x^2 + [pbb]y^2 + [pcc]z^2 + 2[pab]xy + 2[pac]xz + 2[pcb]yz - 2[pal]x - 2[pbl]y - 2[pcl]z + [pll] = \min. \quad (1.5)$$

Aby byla splněna základní podmínka, tj. minima funkce (1.5), provedeme parciální derivace (opravy v_i jsou funkcemi proměnných x, y, z , proto bude $[pvv]$ v rovnici (1.5) minimem, budou-li parciální derivace podle x, y, z rovny nule).

$$\frac{\partial [pvv]}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial [pvv]}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial [pvv]}{\partial z} = 0$$

Z těchto podmínek se odvodí tři normální rovnice pro výpočet neznámých. Diferencováním obdržíme:

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x} = 2[paa]x + 2[pab]y + 2[pac]z - 2[pa] = 0$$

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial y} = 2[pab]x + 2[pbb]y + 2[pbc]z - 2[pb] = 0$$

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial z} = 2[pac]x + 2[pbc]y + 2[pcc]z - 2[pc] = 0$$

Po zkrácení dostaneme normální rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned} [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pa] &= 0 \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z - [pb] &= 0 \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z - [pc] &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ze soustavy lineárních rovnic (1.6) vyplývá, že normálních rovnic je tolik, kolik je neznámých. Lze tedy z těchto normálních rovnic určit nejpravděpodobnější hodnoty neznámých.

Normální rovnice (1.6) mají zvláštní souměrnou stavbu. Kvadratické koeficienty jsou vždy kladné, ostatní koeficienty a prosté (absolutní) členy mohou být kladné nebo záporné. Kvadratické součinitele (koeficienty) jsou uspořádány po úhlopříčce a objevují se v normálních rovnicích pouze jednou. Nekvadratické součinitele se zde objevují dvakrát a jsou souměrně umístěni ke spojnicí kvadratických členů. Této vlastnosti koeficientů se využívá k tomu, že normální rovnice zpravidla píšeme ve zkráceném tvaru takto:

$$\begin{aligned} [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pa] &= 0 \\ [pbb]y + [pbc]z - [pb] &= 0 \\ [pcc]z - [pc] &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ze soustavy rovnic (1.7) je zřejmé, že do anulovaných normálních rovnic absolutní členy vstupují s tím znaménkem, jaké měly v rovnicích oprav.

Tuto zásadu je nutno při číselném výpočtu respektovat, podobně jako je nutné numericky správně vypočítat jednotlivé koeficienty normálních rovnic, ze kterých počítáme jednotlivé koeficienty normálních rovnic, ze kterých počítáme jednotlivé neznámé. Je-li počet neznámých poněkud větší a jsou-li jejich součinitele (koeficienty) v rovnicích oprav několikamístná čísla, je výpočet neznámých i vah pracný. Abychom zamezili vzniku chyb, které mohou pramenit z různých zdrojů (počtářská chyba, přepsání, záměna znaménka, nesprávné umístění desetinné čárky atd.), zavádíme křížové kontroly, které umožňují ověřit správnost výpočtu v jednotlivých částech, a výpočty provádíme v přehledných pracovních tabulkách. Tím vlastně počítáme celý příklad dvakrát nezávisle na sobě. Kontroly uspořádáme v řádcích a sloupcích, takže případnou početní chybu je možno nalézt bez velké ztráty času. Pro řádkové kontroly ve všech rovnicích oprav

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$$

sloučíme součinitele u neznámých i absolutní členy a jejich algebraický součet s_i vezmeme s opačným znaménkem

$$s_i = -(a_i + b_i + c_i - l_i) \quad (1.8)$$

takže

$$a_i + b_i + c_i - l_i + s_i = 0 \quad (1.9)$$

Správnost výpočtu hodnot s_i ověřujeme sloupcovou kontrolou - sečteme odděleně jednotlivé sloupce a přesvědčíme se zda

$$[a] + [b] + [c] - [l] + [s] = 0 \quad (1.10)$$

Kontroly (podobně jako celý výpočet koeficientů normálních rovnic) provádíme v tabulce, do které pozorně přepíšeme součinitele i absolutní členy všech rovnic oprav se znaménky, které mají v rovnicích oprav – viz následující tabulka.

Tabulka pro výpočet koeficientů normálních rovnic a jejich kontrola

i	a	b	c	-l	+s	aa	ab	ac	-al	as	bb	bc	-bl	bs	cc	-cl	cs	ll	-ls	ss
1																				
2																				
3																				
.																				
.																				
n																				
	[a]	[b]	[c]	[-l]	[+s]	[aa]	[ab]	[ac]	[-al]	[as]	[bb]	[bc]	[-bl]	[bs]	[cc]	[-cl]	[cs]	[ll]	[-ls]	[ss]

Vyjde-li pro [s] v příslušném sloupci a v posledním řádku stejná hodnota, je výpočet součtů s správný a všechny další výpočty lze provádět za stálých kontrol mechanicky podle schematických vzorců. Byla-li však některá hodnota z rovnic oprav přepsána chybně, kontroly budou souhlasit, ale vyrovnaní bude odpovídat takovému případu, kterému vyhovuje chybná hodnota, nikoliv však danému případu. Aby se zajistila správnost vyrovnaní, počítáme, resp. sestavujeme rovnice oprav z původních dat dvakrát nezávisle na sobě a teprve když dostaneme stejné dílčí výsledky, pokračujeme ve výpočtu dále.

Vynásobíme-li rovnici (1.9) postupně součiniteli $a_i, b_i, c_i, -l_i$ a s_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ a po každém vynásobení sečteme, dostaneme součinitele (koeficienty) normálních rovnic a kontrolní výrazy:

$$\begin{aligned}
 [aa] + [ab] + [ac] - [al] + [as] &= 0 \\
 [ab] + [bb] + [bc] - [bl] + [bs] &= 0 \\
 [ac] + [bc] + [cc] - [cl] + [cs] &= 0 \\
 -[al] - [bl] - [cl] + [ll] - [ls] &= 0 \\
 \hline
 [as] + [bs] + [cs] - [ls] + [ss] &= 0
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

resp.

$$\begin{aligned}
 [paa] + [pab] + [pac] - [pal] + [pas] &= 0 \\
 [pab] + [pbb] + [pbc] - [pbl] + [pbs] &= 0 \\
 [pac] + [pbc] + [pcc] - [pcl] + [pcs] &= 0 \\
 -[pal] - [pbl] - [pcl] + [pll] - [pls] &= 0 \\
 \hline
 [pas] + [pbs] + [pcs] - [pls] + [pss] &= 0
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Řádkový součet koeficientů u neznámých, dále absolutního členu a pomocného součtového členu je pro každou normální rovnici nula. Čtvrtou (obecně $v + 1$) rovnicí je kontrolován součet [pll], pátou (obecně $v + 2$) rovnicí je ověřen výpočet [pss]. Jednotlivé součiny a součty počítáme již ve zmíněné pracovní tabulce.

1.3 Řešení normálních rovnic

1.3.1 Řešení postupnou Gaussovou eliminací

Normální rovnice obecně tvoří soustavu n lineárních rovnic o n neznámých. Řešit je můžeme libovolnou metodou z řady známých způsobů řešení soustavy lineárních rovnic. Řešení normálních rovnic, jejichž koeficienty (součinitelé) jsou vyjádřeny čísly o několika cifrách, je obvyklými způsoby však velmi obtížné a nepřehledné.

Normální rovnice se nejčastěji řeší postupnou eliminací neznámých, počínaje první z nich Gaussovým algoritmem (algoritmus je přesně stanovená posloupnost aritmetických a logických operací, které se musí splnit, aby daná úloha byla vyřešena).

Způsob řešení je pro jednoduchost opět uveden pro 3 neznámé – viz tab. str. 12.

Z normálních rovnic (1.6)

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] = 0$$

$$[pab]x + [pbb]y + [pbc]z - [pbl] = 0$$

$$[pac]x + [pbc]y + [pcc]z - [pcl] = 0$$

vyloučíme nejprve první neznámou x .

Dělíme-li první rovnici výrazem $[paa]$, dostaneme:

$$x + \frac{[pab]}{[paa]}y + \frac{[pac]}{[paa]}z - \frac{[pal]}{[paa]} = 0 \quad (1.13)$$

- a) tuto rovnici (1.13) vynásobíme součinitelem $-[pab]$ a přičteme k druhé rovnici. Vynásobením výrazem $-[pab]$ dostaneme

$$-[pab]x - \frac{[pab]}{[paa]}[pab]y - \frac{[pac]}{[paa]}[pab]z + \frac{[pal]}{[paa]}[pab] = 0 \quad (1.14)$$

Sečtením této rovnice (1.14) s druhou rovnicí v soustavě normálních rovnic dostaneme

$$[pab]x - [pab]x + \left([pbb] - \frac{[pab]}{[paa]}[pab]\right)y + \left([pbc] - \frac{[pac]}{[paa]}[pab]\right)z - \left([pbl] - \frac{[pal]}{[paa]}[pab]\right) = 0 \quad (1.15)$$

- b) vynásobením rovnice (1.13) součinitelem $-[pac]$ dostaneme podobně jako v předchozím případě tedy (1.14)

$$-[pac]x - \frac{[pab]}{[paa]}[pac]y - \frac{[pac]}{[paa]}[pac]z + \frac{[pal]}{[paa]}[pac] = 0 \quad (1.16)$$

a jeho přičtením k třetí rovnici dostaneme

$$[pac]x - [pac]x + \left([pbc] - \frac{[pab]}{[paa]}[pac]\right)y + \left([pcc] - \frac{[pac]}{[paa]}[pac]\right)z - \left([pcl] - \frac{[pal]}{[paa]}[pac]\right) = 0 \quad (1.17)$$

Pro výrazy v kulatých závorkách zavedl Gauss jednoduché „symboly 1. redukce“

$$[pbb] - \frac{[pab]}{[paa]}[pab] = [pbb. 1], [pbc] - \frac{[pab]}{[paa]}[pac] = [pbc. 1], \text{ atd.}$$

Dostaneme tak dvě rovnice po první redukci o neznámých y a z , které se zapíší

$$\begin{aligned} [pbb.1]y + [pbc.1]z - [pbl.1] &= 0 \\ [pbc.1]y + [pcc.1]z - [pcl.1] &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Tyto rovnice nazýváme „jednou redukované normální rovnice“ nebo stručněji „rovnice první redukce“.

Gaussovy symboly např. $[pbb.1]$ čteme jako:

„ $[pbb]$ po první redukci“ nebo
„ $[pbb]$ jednou redukované“.

Další neznámou y vyloučíme (redukujeme) stejným postupem. Dělíme první normální rovnici pro první redukci součinitelem $[pbb.1]$. Dostaneme

$$y + \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}z - \frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} = 0 \quad (1.19)$$

Tuto rovnici (1.19) násobíme $-[pbc.1]$ a přičteme k druhé rovnici první redukce. Výsledkem bude

$$\left([pcc.1] - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}[pbc.1] \right)z - \left([pcl.1] - \frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}[pbc.1] \right) = 0 \quad (1.20)$$

Výrazy v kulatých závorkách označil Gauss opět jako „symboly druhé redukce“

$$[pcc.2]z - [pcl.2] = 0 \quad (1.21)$$

Z této normální rovnice druhé redukce již vypočteme neznámou z

$$z = \frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} \quad (1.22)$$

Postupným dosazováním zpět do rovnice (1.19) vypočteme neznámou y a dosazením do rovnice (1.13) vypočteme neznámou x .

$$y = \frac{1}{[pbb.1]}([pbl.1] - [pbc.1]z) \quad (1.23)$$

$$x = \frac{1}{[paa]}([pal] - [pab]y - [pac]z) \quad (1.24)$$

Kontrola součtovou rovnicí

Z odvození je patrné, že jako první vypočteme poslední neznámou z z poslední tj. druhé redukce, potom neznámou y z předcházející redukce atd. Rozšíření na libovolný počet neznámých je zcela mechanické.

Gaussovy symboly v redukováných normálních rovnicích jsou jednoduché a jednoznačné. Umožňují podle symbolu sestavit původní výrazy v rozvinutém tvaru – např.:

$$[pcl.2] = [pcl.1] - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}[pbl.1]$$

Na levé straně této rovnice číslice 2 za tečkou znamená, že výraz patří do normálních rovnic druhé redukce (byly již eliminovány dvě neznámé). Pravá strana obsahuje jen symboly první redukce. Je to rozdíl dvou členů. První člen má stejná písmena jako symbol na levé straně rovnice, avšak číslice za tečkou je o jedničku nižší. Druhý člen je zlomek, jehož jmenovatel je roven kvadratickému koeficientu druhé neznáme v jedné redukováných rovnicích tj. $[pbb.1]$. Číselník je součinem dvou symbolů. Mimo toho je v každém z nich písmeno b ze jmenovatele a druhá písmena jsou z prvního členu na pravé straně rovnice.

To, co je uvedeno pro jeden Gaussův symbol druhé redukce, lze snadno rozšířit na symboly libovolné redukce. Poměry koeficientů

$$-\frac{[pab]}{[paa]}, -\frac{[pac]}{[paa]}, -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} \text{ atd.}$$

jimiž násobíme první normální rovnici původní a postupně první rovnice dalších redukcí nazýváme redukční součinitelé nebo redukční faktory.

1.3.2 Řešení pomocí determinantů

Pokud počet neznámých v rovnicích oprav je malý a koeficienty normálních rovnic jsou jednoduchá čísla, lze je řešit jakýmkoliv vhodným způsobem. Jedním možným způsobem je řešení pomocí determinantů. Při větším počtu rovnic a koeficientech se značným počtem míst se však tento výpočet stává na rozdíl od dříve uvedené Gaussovy eliminace obtížný a nepřehledný.

Řešení dvou normálních rovnic pomocí determinantů. Pro výpočet neznámých se používá Cramerovo pravidlo a vyčíslení determinantů pravidlo Sarrusovo.

Normální rovnice nestejné přesnosti:

$$[paa]x + [pab]y - [pal] = 0$$

$$[pab]x + [pbb]y - [pbl] = 0$$

mají determinant soustavy D ve tvaru:

$$D = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{vmatrix} = [paa] \cdot [pbb] - [pab]^2$$

Determinanty neznámých mají tvar:

$$D_x = - \begin{vmatrix} [pal] & [pab] \\ [pbl] & [pbb] \end{vmatrix} = [pab] \cdot [pbl] - [pbb][pal]$$

$$D_y = - \begin{vmatrix} [paa] & [pal] \\ [pab] & [pbl] \end{vmatrix} = [pab] \cdot [pal] - [paa][pbl]$$

Neznámé hodnoty x a y vypočteme za vztahů: $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$

Řešení normálních rovnic tímto způsobem je formální velmi jednoduché. Při větším počtu r neznámých je však potřeba vyřešit $(r+1)$ determinantů r -tého stupně. Prakticky lze rozumně pomocí determinantů řešit 2, maximálně 3 normální rovnice.

1.3.3 Řešení metodou postupné iterace

Tato metoda je naopak vhodná při řešení velkých souborů rovnic, kdy ostatní způsoby nejde použít buď pro rozsah počtu rovnic nebo potřebnou přesnost.

Nevýhodou (nedostatkem) této metody je, že konverguje při splnění určitých podmínek a není proto použitelná pro všechny systémy.

Výhodou však je to, že početní chyba v některém cyklu výpočtu nezmění konečný výsledek, ale zvýší jen počet iterací (prodlouží se doba výpočtu). Toto ovšem přichází v úvahu jen při „ručním“ zpracování. Při použití programu na počítači tato situace nemůže nastat.

Řešení normálních rovnic společně s rovnicemi vah (Gaussovou eliminací).

redukční faktor	x	y	z	-l	+s	Δ	Q_1	Q_2	Q_3
0. redukce	$[paa]$	$+ [pab]$ $+ [pbb]$ $- r_b \cdot [pab]$	$+ [pac]$ $+ [pbc]$ $- r_b \cdot [pac]$ $+ [pcc]$ $- r_c \cdot [pac]$	$- [pal]$ $- [pbl]$ $- r_b \cdot (-[pal])$ $- [pcl]$ $- r_c \cdot (-[pal])$ $+ [pll]$ $- r_l \cdot (-[pal])$	$+ [pas]$ $+ [pbs]$ $- r_b \cdot [pas]$ $+ [pcs]$ $- r_c \cdot [pas]$ $- [pls]$ $- r_l \cdot [pas]$ $+ [pss]$ $- r_s \cdot [pas]$	0 0 0 0 0	-1 0 $-r_b \cdot (-1)$ 0 $-r_c \cdot (-1)$	0 -1 0 0 -1	0 0 0 0 0
1. redukce	$[pbb.1]$		$+ [pbc.1]$ $+ [pcc.1]$ $- r_c^{(1)} \cdot [pbc.1]$	$- [pbl.1]$ $- [pcl.1]$ $- r_c^{(1)} \cdot (-[pbl.1])$ $+ [pll.1]$ $- r_l^{(1)} \cdot (-[pbl.1])$	$+ [pbs.1]$ $+ [pcs.1]$ $- r_c^{(1)} \cdot [pbs.1]$ $- [pls.1]$ $- r_l^{(1)} \cdot [pbs.1]$ $+ [pss.1]$ $- r_s^{(1)} \cdot [pbs.1]$	0 0 0 0	$+ r_b$ $+ r_c$ $- r_c^{(1)} \cdot r_b$	-1 0 $-r_c^{(1)} \cdot (-1)$	0 -1 0
2. redukce		$[pcc.2]$		$- [pcl.2]$ $+ [pll.2]$ $- r_l^{(2)} \cdot (-[pcl.2])$	$+ [pcs.2]$ $- [pls.2]$ $- r_l^{(2)} \cdot [pcs.2]$ $+ [pss.2]$ $- r_s^{(2)} \cdot [pcs.2]$	0 0 0	$r_c - r_c^{(1)} \cdot r_b$	$+ r_c^{(1)}$	-1
3. redukce				$+ [pll.3]$	$- [pls.3]$ $+ [pss.3]$	0 0			

1.4 Rovnice oprav

Předchozí kapitola 1.3 je věnována výpočtu koeficientů normálních rovnic a jejich řešení. K jejich stanovení je však zapotřebí tzv. rovnic oprav, ze kterých normální rovnice tvoříme. Význam a smysl rovnic oprav je zřejmý z kap. 1.1. Jejich význam je obrovský a zásadní – správné sestavení rovnic oprav (1.3) je nejdůležitější částí vyrovnání zprostředkujících měření. Další postup tj. sestavení normálních rovnic, jejich řešení i výpočet středních chyb se děje podle platných schémat a jsou zcela mechanické.

Vztah mezi naměřenými zprostředkujícími veličinami l_i a neznámými x, y, z nemusí být ani jednoduchý ani lineární. Nelineární vztah je nutno nejprve převést (přetvořit) na vztah lineární.

1.4.1 Lineární rovnice oprav

Je-li vztah mezi zprostředkujícími a neznámými veličinami lineární, budou mít rovnice oprav pro n měření tvar

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i \quad (1.25)$$

Pro usnadnění numerických výpočtů zavádíme v praxi přibližné hodnoty neznámých. Označíme-li je x_0, y_0, z_0 budeme v dalším řešení počítat jako neznámé jen poměrně malé přírůstky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$. Vyrovnané hodnoty budou

$$x = x_0 + \delta_x, y = y_0 + \delta_y, z = z_0 + \delta_z \quad (1.26)$$

Přibližné hodnoty neznámých x_0, y_0, z_0 určíme pokud možno tak, aby malé přírůstky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ byly stejného řádu (měly přibližně stejný počet cifer). Tato úprava podstatně usnadní číselné výpočty (počítáme s čísly o malém počtu cifer).

Zavedením vztahů v rovnici (1.26) do rovnice oprav (1.25) dostaneme

$$v_i = a_i \delta_x + b_i \delta_y + c_i \delta_z + (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0) - l_i \quad (1.27)$$

Výrazy v závorce v rovnici (1.27) jsou funkce přibližných hodnot neznámých – viz (1.2)

Praktické sestavení rovnic oprav při lineární závislosti s příslušným komentářem vzhledem k důležitosti správného postupu s použitím přibližných hodnot je názorně provedeno v číselném příkladě na konci vyrovnání měření zprostředkujících. Zde je uveden i příklad pro nelineární závislost oprav.

1.4.2 Nelineární rovnice oprav – přetvoření rovnic

Předpokládejme, že skutečné hodnoty neznámých X, Y, Z tvoří nelineární zprostředkující funkci U_i opět o třech neznámých

$$U_i = f(X, Y, Z, a_i, b_i, c_i).$$

Protože měření však jsou zatížena náhodnými chybami, můžeme při podmínce $[pvv] = \min$ zjistit opět jen nejvýhodnější tj. nejpravděpodobnější hodnoty neznámých x, y, z , které určují zprostředkující funkci

$$u_i = f(x, y, z, a_i, b_i, c_i)$$

jíž vyhovují opravená měření $l'_i + v_i = f(x, y, z, a_i, b_i, c_i)$

Rovnice oprav pak mají tvar

$$v_i = f(x, y, z, a_i, b_i, c_i) - l'_i \quad (1.28)$$

Zprostředkující měření (ale i všechna další) možno vyrovnávat pouze při lineární závislosti neznámých. Je tedy nutno rovnice oprav přetvořit do lineárního tvaru. K tomuto účelu vhodným způsobem vypočteme z měřených hodnot dosti přibližné hodnoty x_0, y_0, z_0 , které potřebují jen malé doplňky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, aby se staly nejpravděpodobnějšími hodnotami neznámých x, y, z .

$$x = x_0 + \delta_x, y = y_0 + \delta_y, z = z_0 + \delta_z$$

Pak rovnici (1.28) můžeme psát s ohledem na výše uvedené vzorce ve tvaru

$$v_i = f(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y, z_0 + \delta_z, a_i, b_i, c_i) - l'_i \quad (1.29)$$

Pravou stranu rovnice rozvedeme podle Taylorovy řady. Při malých hodnotách $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ lze omezit Taylorův rozvoj na lineární členy. Členy druhého a vyššího řádu zanedbáváme, takže rovnici (1.29) můžeme psát

$$v_i = f(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y, z_0 + \delta_z, a_i, b_i, c_i) + \frac{\partial f}{\partial x_0} \delta_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} \delta_y + \frac{\partial f}{\partial z_0} \delta_z - l'_i \quad (1.30)$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0, a_i, b_i, c_i) &= \mu_0^{(i)} \\ \frac{\partial f}{\partial x_0} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, a_i, b_i, c_i)}{\partial x_0} = \frac{\partial \mu_0^{(i)}}{\partial x_0} = q_i \\ \frac{\partial f}{\partial y_0} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, a_i, b_i, c_i)}{\partial y_0} = \frac{\partial \mu_0^{(i)}}{\partial y_0} = r_i \\ \frac{\partial f}{\partial z_0} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, a_i, b_i, c_i)}{\partial z_0} = \frac{\partial \mu_0^{(i)}}{\partial z_0} = t_i \\ -\mu_0^{(i)} + l'_i &= l_i \end{aligned}$$

budou mít rovnice již přetvořených oprav tvar

$$v_i = q_i \delta_x + r_i \delta_y + t_i \delta_z - l_i \quad (1.31)$$

Parciální derivace q_i, r_i, t_i jsou funkcemi hodnot a_i, b_i, c_i stejně jako $\mu_0^{(i)}$. Určitým hodnotám proměnných hodnot a_i, b_i, c_i odpovídají určité hodnoty $\mu_0^{(i)}, q_i, r_i, t_i$

Rovnice (1.31) určující opravy měření l_i obsahuje doplňky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ neznámých v lineární závislosti na měření a přibližných hodnotách funkce $\mu_0^{(i)}$. Tyto rovnice oprav s neznámými doplňky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ mají stejnou stavbu jako rovnice oprav pro určení neznámých x, y, z . Rozdíl je pouze v označení. Místo dřívějšího označení $x, y, z \dots a_i, b_i, c_i \dots l'_i$ je zde označení $\delta_x, \delta_y, \delta_z \dots q_i, r_i, t_i \dots l_i = l'_i + \mu_0^{(i)}$.

Soustavy rovnic (1.25) a (1.31) po formální stránce jsou si podobné. Rozdíl však je v tom, že v rovnicích (1.31) jsou koeficienty q_i, r_i, t_i parciální derivace funkcí f_i , do kterých byly dosazeny přibližné hodnoty neznámých. V rovnicích (1.25) jsou to původní koeficienty ve funkcích f_i . Z tohoto

důvodu musíme u nelineárních funkcí volit (určit) přibližné hodnoty neznámých tak, aby přírůstky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ byly tak malé, abychom – jak již bylo uvedeno – mohli v rozvoji podle Taylora zanedbat všechny členy vyššího stupně. (U lineárních tvarů funkce f_i mohou být přírůstky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ libovolně velké).

Z rovnice oprav (1.30) určíme koeficienty a absolutní členy normálních rovnic, z kterých vypočteme již známým způsobem (Gaussovou eliminací neznámých) $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ a podle rovnice (1.26) i nejpravděpodobnější hodnoty neznámých x, y, z .

Střední chyby a váhy doplňků jsou také středními chybami a váhami neznámých x, y, z .

Kdyby doplňky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ vyšly příliš velké, mohly by se při rozvoji v Taylorovu řadu uplatňovat členy druhého řádu obsahující čtverce doplňků (což je mimo náš předpoklad). Toto zjistíme dosazením oprav a neznámých do původních rovnic, konkrétně oprav v_i do rovnice (1.31) a neznámých x, y, z do rovnice (1.28). Nejsou-li uvedené vztahy splněny – rovnice (1.28) – pak je nutné vypočtené hodnoty $x = x_0 + \delta_x, y = y_0 + \delta_y, z = z_0 + \delta_z$ vzít za nové (lepší) sblížené hodnoty a celý výpočet znovu opakovat.

Praktické sestavení lineárních rovnic oprav při nelineární závislosti s příslušným komentářem vč. celého výpočtu je uvedeno v závěru této kapitoly.

1.5 Kontrola oprav

1.5.1 Rovnice pro ověření výpočtu oprav

Po výpočtu a kontrole neznámých x, y, z dosadíme jejich hodnoty do rovnice oprav (1.3) a vypočteme opravy jednotlivých měření a dále součet [pvv], který potřebujeme k vyšetření přesnosti – výpočtu středních chyb.

Správnost vypočtených oprav ověřujeme následujícími kontrolními rovnicemi. Rovnice oprav (1.3)

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$$

vynásobíme postupně výrazy $p_i a_i$

$$p_i a_i v_i = p_i a_i a_i x + p_i a_i b_i y + p_i a_i c_i z - p_i a_i l_i \quad (1.32)$$

Sečtením rovnic (1.32) dostaneme:

$$[pav] = [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] \quad (1.33a)$$

Obdobně při vynásobení rovnice (1.3) výrazy $p_i b_i$ a posléze $p_i c_i$ a následným sečtením dostaneme

$$[pbv] = [pab]x + [pbb]y + [pbc]z - [pbl] \quad (1.33b)$$

$$[pcv] = [pac]x + [pbc]y + [pcc]z - [pcl] \quad (1.33c)$$

Pravá strana u všech tří rovnic (1.33) je rovna nule – viz soustava rovnic (1.6).

Platí

$$[pav] = 0, [pbv] = 0, [pcv] = 0 \quad (1.34)$$

1.5.2 Kontrola výrazu $[p_{vv}]$. Zkoušky sigmové

Rovnice oprav (1.3) $v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$ vynásobíme postupně $p_i v_i$ a sečteme.

$$[p_{vv}] = [p_{av}]x + [p_{bv}]y + [p_{cv}]z - [p_{vl}] \quad (1.35)$$

s přihlédnutím k předchozí rovnici (1.34) platí, že

$$[p_{vv}] = -[p_{vl}] \quad (1.36)$$

Této kontroly se používá zřídka, ale dá se z ní odvodit další kontrolní rovnice. Rovnice oprav (1.3) $v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$ vynásobíme postupně $p_i l_i$ a sečteme.

$$[p_{vl}] = [p_{al}]x + [p_{bl}]y + [p_{cl}]z - [p_{ll}] \quad (1.37)$$

Z předchozí rovnice (1.36) dosadíme za $[p_{vl}] = -[p_{vv}]$ a obdržíme kontrolní rovnici ve tvaru

$$[p_{vv}] = [p_{ll}] - [p_{al}]x - [p_{bl}]y - [p_{cl}]z \quad (1.38)$$

Této rovnice se používá při kontrole výpočtu $[p_{vv}]$ a i ke kontrole neznámých.

Další rovnice pro ověření výrazu $[p_{vv}]$ se odvodí, dosazujeme-li za neznámé do předchozí rovnice (1.38) postupně z normálních rovnic. Z první rovnice soustavy původních normálních rovnic vypočteme x – viz (1.13)

$$x = \frac{[p_{al}]}{[p_{aa}]} - \frac{[p_{ab}]}{[p_{aa}]}y - \frac{[p_{ac}]}{[p_{aa}]}z$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (1.38)

$$[p_{vv}] = [p_{ll}] - \frac{[p_{al}]}{[p_{aa}]}[p_{al}] + \frac{[p_{ab}]}{[p_{aa}]}[p_{al}]y + \frac{[p_{ac}]}{[p_{aa}]}[p_{al}]z - [p_{bl}]y - [p_{cl}]z$$

Po uspořádání (vytknutí y a z) platí:

$$[p_{vv}] = [p_{ll}] - \frac{[p_{al}]}{[p_{aa}]}[p_{al}] - \left([p_{bl}] - \frac{[p_{ab}]}{[p_{aa}]}[p_{al}] \right)y - \left([p_{cl}] - \frac{[p_{ac}]}{[p_{aa}]}[p_{al}] \right)z$$

Zavedením Gaussových symbolů dostaneme

$$[p_{vv}] = [p_{ll.1}] - [p_{bl.1}]y - [p_{cl.1}]z$$

Z první rovnice soustavy jednou redukovaných normálních rovnic vypočteme y – viz (1.23)

$$y = \frac{[p_{bl.1}]}{[p_{bb.1}]} - \frac{[p_{bc.1}]}{[p_{bb.1}]}z$$

Po dosazení a uspořádání jako v předchozím případě dostaneme

$$[p_{vv}] = [p_{ll.1}] - \frac{[p_{bl.1}]}{[p_{bb.1}]}[p_{bl.1}] - \left([p_{cl.1}] - \frac{[p_{bc.1}]}{[p_{bb.1}]}[p_{bl.1}] \right)z$$

Zavedením Gaussových symbolů i zde dostaneme

$$[p_{vv}] = [p_{ll.2}] - [p_{cl.2}]z$$

Z dvakrát redukovanych normálních rovnic vypočteme z – viz (1.22)

$$z = \frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}$$

Tento výraz opět dosadíme do předchozí rovnice a po uspořádání jako dříve dostaneme

$$[pvv] = [pll.2] - \frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} [pcl.2] \text{ nebo-li}$$

$$[pvv] = [pll.3] \quad (1.39)$$

Kontrolní výraz $[pll.3]$ se vypočte zároveň při Gaussově eliminaci neznámých. Rozvedeme-li symbol $[pll.3]$ postupně v nižší

$$[pvv] = [pll.3]$$

$$[pll.3] = [pll.2] - \frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} [pcl.2]$$

$$[pll.2] = [pll.1] - \frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} [pbl.1]$$

$$[pll.1] = [pll] - \frac{[pal]}{[paa]} [pal]$$

a tyto rovnice sečteme, zruší se stejné členy na obou stranách a vznikne další kontrolní rovnice pro $[pvv]$ ve tvaru:

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl.1]^2}{[pbb.1]} - \frac{[pcl.2]^2}{[pcc.2]} \quad (1.40)$$

odvozené kontroly – viz (1.38) a (1.40) označujeme jako zkoušky sigmové (součtové).

Označme v rovnici (1.38) pro zjednodušení

$$-[pal]x - [pbl]y - [pcl]z = \sum_I = [pvv] - [pll] \quad (1.41)$$

a zcela obdobně v rovnici (1.40)

$$-\frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl.1]^2}{[pbb.1]} - \frac{[pcl.2]^2}{[pcc.2]} = \sum_{II} = [pvv] - [pll] \quad (1.42)$$

Pro výpočet středních chyb budeme potřebovat hodnotu $[pvv]$, kterou vypočítáme ze vztahu

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2. \text{ Označme hodnotu}$$

$$[pvv] - [pll] = \sum_{III}$$

Z původních rovnic vyplývá, že $\sum_I = \sum_{II} = \sum_{III}$.

Sigmové zkoušky nekontrolují správnost koeficientů a prostých (absolutních) členů v rovnicích oprav. Sestavíme-li rovnice oprav nesprávně, zaručí nám uvedené zkoušky jen to, že jsme k daným (nesprávným) hodnotám v rovnicích oprav správně sestavili normální rovnice a tyto správně vyřešili.

Správný výpočet součinitelů a prostých členů rovnic oprav musíme proto vhodně kontrolovat, zejména pozorností při jejich sestavování.

1.6 Váhy neznámých střední chyby vyrovnaných hodnot

1.6.1 Určení vah řešením váhových rovnic

Z rovnic oprav $l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z$ jednoznačně vyplývá, že měřené veličiny l_1, l_2, \dots, l_n jsou funkcemi neznámých x, y, z . Naopak však můžeme také uvedené neznámé x, y, z považovat za funkce měřených veličin l_1, l_2, \dots, l_n .

Předpokládejme stejně jako dříve lineární závislost a pak neznámé vyjádříme jako funkce měřených hodnot.

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n = [\alpha l] \\y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n = [\beta l] \\z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots + \gamma_n l_n = [\gamma l]\end{aligned} \quad (1.43)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ jsou zde prozatím neznámí součinitelé.

Protože jednotlivá měření l_i jsou vzájemně nezávislá, můžeme střední chyby neznámých x, y, z počítat podle zákona hromadění středních chyb.

$$m_x = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial l_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l_2} m_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial l_n} m_n\right)^2}$$

$$\text{kde: } \frac{\partial x}{\partial l_1} = \alpha_1; \frac{\partial x}{\partial l_2} = \alpha_2; \dots; \frac{\partial x}{\partial l_n} = \alpha_n$$

Z dříve odvozeného vztahu platí:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}}; m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{p_2}}; \dots; m_n = \frac{m_0}{\sqrt{p_n}}$$

kde: m_1, m_2, \dots, m_n jsou střední chyby měřených hodnot,

p_1, p_2, \dots, p_n jsou jejich váhy,

m_0 je střední jednotková chyba.

Pak můžeme střední chybu neznámé psát ve tvaru:

$$m_x = m_0 \sqrt{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} \text{ a její váhu } p_x = \frac{m_0^2}{m_x^2} = \frac{1}{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} \quad (1.44a)$$

Zcela obdobně určíme střední chyby a váhy dalších neznámých y a z .

$$m_y = m_0 \sqrt{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]} \quad p_y = \frac{m_0^2}{m_y^2} = \frac{1}{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]} \quad (1.44b)$$

$$m_z = m_0 \sqrt{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]} \quad p_z = \frac{m_0^2}{m_z^2} = \frac{1}{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]} \quad (1.44c)$$

K výpočtu středních neznámých x, y, z (k výpočtu jejich vah) je zapotřebí určit $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]$. Toto se děje pomocí tzv. váhových koeficientů Q_{ik} .

K výpočtu neznámých $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ přibereme normální rovnice, které za použití neurčitých součinitelů řešíme podle neznámých x, y, z a odvodíme rovnice vah.

Normální rovnice pro výpočet neznámých x, y, z – mají tvar podle (1.6)

$$\begin{aligned} [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] &= 0 \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z - [pbl] &= 0 \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z - [pcl] &= 0 \end{aligned}$$

Vynásobíme je postupně po řadě zatím neurčenými váhovými koeficienty (Lagrangeovými faktory) Q_{ik} .

a) pro zjištění váhy neznámé x faktory Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}

b) pro zjištění váhy neznám y faktory Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}

c) pro zjištění váhy neznám z faktory Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}

a) Normální rovnice (1.6) vynásobíme pro výpočet x neurčenými faktory Q_{11}, Q_{12} a Q_{13}

$$\begin{aligned} Q_{11}[paa]x + Q_{11}[pab]y + Q_{11}[pac]z - Q_{11}[pal] &= 0 \\ Q_{12}[pab]x + Q_{12}[pbb]y + Q_{12}[pbc]z - Q_{12}[pbl] &= 0 \\ Q_{13}[pac]x + Q_{13}[pbc]y + Q_{13}[pcc]z - Q_{13}[pcl] &= 0 \end{aligned} \quad (1.45a)$$

Sečtením rovnice (1.45a) a vytknutím neznámých x, y, z dostaneme:

$$\begin{aligned} x([paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13}) + \\ + y([pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13}) + \\ + z([pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13}) - \\ - [pal]Q_{11} - [pbl]Q_{12} - [pcl]Q_{13} = 0 \end{aligned} \quad (1.45b)$$

V této rovnici (1.45b) jsou 3 neurčené koeficienty Q_{11}, Q_{12} a Q_{13} . K jejich určení můžeme volit 3 libovolné podmínky. Neurčité koeficienty volíme tak, aby pro x vyšel jednoduchý výraz a přitom byly koeficienty jednoznačně určeny. Volíme je tak, aby v rovnici, která vznikla sečtením (1.45a) byl součinitel u neznámé x roven 1 a aby neznámé y a z vypadly – tedy:

$$\begin{aligned} [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} &= 1 \\ [pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} &= 0 \\ [pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Pro neznámou x bude pak platit jednoduchý vztah:

$$x = [pal]Q_{11} + [pbl]Q_{12} + [pcl]Q_{13} \quad (1.47)$$

Rozepsáním předchozí rovnice a uspořádáním podle l_1, l_2, \dots, l_n dostaneme:

$$\begin{aligned} x = (p_1 a_1 Q_{11} + p_1 b_1 Q_{12} + p_1 c_1 Q_{13})l_1 + \\ + (p_2 a_2 Q_{11} + p_2 b_2 Q_{12} + p_2 c_2 Q_{13})l_2 + \\ \vdots \\ + (p_n a_n Q_{11} + p_n b_n Q_{12} + p_n c_n Q_{13})l_n = \\ = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n \end{aligned} \quad (1.48)$$

Porovnání této rovnice s rovnicí (1.43) ukazuje že

$$\alpha_i = p_i a_i Q_{11} + p_i b_i Q_{12} + p_i c_i Q_{13} \quad (1.49)$$

Tyto rovnice (1.49) vynásobíme postupně výrazem $\frac{\alpha_i}{p_i}$ a sečteme

Dostaneme výraz

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = [a\alpha]Q_{11} + [b\alpha]Q_{12} + [c\alpha]Q_{13} \quad (1.50)$$

Součtové výrazy na pravé straně rovnice (1.50) získáme ze soustavy rovnic (1.49) postupným vynásobením součiniteli a_i, b_i, c_i a sečtením po každém vynásobení.

$$\begin{aligned} [a\alpha] &= [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} \\ [b\alpha] &= [pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} \\ [c\alpha] &= [pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Porovnáním rovnice (1.51) s (1.46) dostaneme:

$$[a\alpha] = 1; [b\alpha] = 0; [c\alpha] = 0 \quad (1.52)$$

Rovnice (1.50) s ohledem na (1.52) se zjednoduší na tvar:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{11} \quad (1.53)$$

Q_{11} se nazývá váhový koeficient (součinitel) neznámé x a vypočteme ho z rovnic (1.46), kterým říkáme „první váhové rovnice“. Tyto rovnice mají stejný tvar jako původní normální rovnice s tím rozdílem, že

- místo neznámých x, y, z jsou zde váhové koeficienty Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}
- místo prostých členů $[pal], [pbl]$ a $[pcl]$ mají 1, 0, 0.

Střední chybu neznámé x vypočteme z rovnice

$$m_x = m_0 \sqrt{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} = m_0 \sqrt{Q_{11}}; \quad p_x = \frac{1}{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} = \frac{1}{Q_{11}} \quad (1.54)$$

Stejným postupem se odvodí váhy neznámých y a z a jejich střední chyby ...

b) Pro určení váhového koeficientu neznámé y vynásobíme normální rovnice po řadě zatím neurčitými koeficienty Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} , sečteme a podobně jako v předchozím případě volíme podmínky:

$$\begin{aligned} [paa]Q_{21} + [pab]Q_{22} + [pac]Q_{23} &= 0 \\ [pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + [pbc]Q_{23} &= 1 \\ [pac]Q_{21} + [pbc]Q_{22} + [pcc]Q_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Dostali jsme tak „druhé váhové rovnice“ opět bude platit (podobně jako v předchozím pro neznámou x) že:

$$y = [pal]Q_{21} + [pbl]Q_{22} + [pcl]Q_{23} \quad (1.56)$$

$$\beta_i = p_i a_i Q_{21} + p_i b_i Q_{22} + p_i c_i Q_{23} \quad (1.57)$$

$$[a\beta] = 0; [b\beta] = 1; [c\beta] = 0 \quad (1.58)$$

Váhový koeficient $\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = Q_{22}$ a vypočteme jej z rovnic 1.55.

c) Stejným postupem jako v předchozích případech získáme „třetí váhovou rovnici“ ve tvaru:

$$\begin{aligned} [paa]Q_{31} + [pab]Q_{32} + [pac]Q_{33} &= 0 \\ [pab]Q_{31} + [pbb]Q_{32} + [pbc]Q_{33} &= 0 \\ [pac]Q_{31} + [pbc]Q_{32} + [pcc]Q_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (1.59)$$

Váhy neznámých:

$$p_x = \frac{1}{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} = \frac{1}{Q_{11}}; \quad p_y = \frac{1}{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]} = \frac{1}{Q_{22}}; \quad p_z = \frac{1}{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]} = \frac{1}{Q_{33}} \quad (1.60)$$

Rovnice vah řešíme zpravidla ve společném schématu jako normální rovnice postupnou Gaussovou eliminací. Z každé soustavy rovnic vah (1.46, 1.55, 1.59) vypočteme příslušný váhový koeficient Q_{ik} neznámých x, y, z – viz tabulka „Řešení normálních rovnice s rovnicemi vah (Gaussovou eliminací)

1.6.2 Určení vah neznámých přestavbou normálních rovnic

Váhy jednotlivých proměnných můžeme zjistit i jinak než řešením váhových rovnic jak bylo uvedeno v kapitole 1.6.1. Řešení rovnic vah vede k zajímavému výsledku. Např. postupné vylučování váhových součinitelů z rovnic (1.59) postupuje následovně:

$$\begin{aligned} [paa]Q_{31} + [pab]Q_{32} + [pac]Q_{33} &= 0 \\ [pab]Q_{31} + [pbb]Q_{32} + [pbc]Q_{33} &= 0 \\ [pac]Q_{31} + [pbc]Q_{32} + [pcc]Q_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice první redukce jsou:

$$\begin{aligned} [pbb.1]Q_{32} + [pbc.1]Q_{33} &= 0 \\ [pbc.1]Q_{32} + [pcc.1]Q_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice druhé redukce je:

$$[pcc.2]Q_{33} = 1 \quad \text{tudíž} \quad Q_{33} = \frac{1}{[pcc.2]} \text{ a } p_z = \frac{1}{Q_{33}} = [pcc.2]$$

Při Gaussově postupné eliminaci udává součinitel u neznámé v poslední redukci její váhu. Můžeme tedy vypočítat váhy jednotlivých neznámých při řešení normálních rovnic, přestavíme-li je tak, aby neznámá, jejíž váhu chceme zjistit, byla před absolutním členem.

Potom

$$p_z = \frac{1}{Q_{33}} = [pcc.2] \quad p_y = \frac{1}{Q_{22}} = [pbb.2] \quad p_x = \frac{1}{Q_{11}} = [paa.2] \quad (1.61)$$

Obecně platí: Součinitel (koeficient) u neznámé v poslední redukované rovnici je váhou této neznámé.

Uvedená poučka tím umožňuje určení váhy libovolné neznámé tzv. přestavbou normálních rovnic tak, aby neznámá, jejíž váhu chceme určit, byla před prostým (absolutním) členem.

Řešením soustavy normálních rovnic

$$\begin{aligned} [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] &= 0 \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z - [pbl] &= 0 \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z - [pcl] &= 0 \end{aligned}$$

získáme váhu neznámé, která je před absolutním členem tj. p_z .

Bude-li zapotřebí zjistit např. váhu neznámé x , musíme normální rovnice přestavit tak, aby před absolutním členem byla tato neznámá x . Pochopitelně musí zůstat zachována všechna pravidla, která byla dříve uvedena pro stavbu normálních rovnic.

Přestavěná soustava normálních rovnic pro výpočet váhy p_x bude mít tvar:

$$\begin{aligned} [pab]y + [pac]z + [paa]x - [pal] &= 0 \\ [pbb]y + [pbc]z + [pab]x - [pbl] &= 0 \\ [pbc]y + [pcc]z + [pac]x - [pcl] &= 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

Kdybychom potřebovali znát váhy všech tří neznámých, pak při tomto způsobu musíme řešit prakticky stejnou soustavu přestavěných normálních rovnic.

Při využití výpočetní techniky pro řešení vah jednotlivých neznámých tímto způsobem však není vážným problémem.

1.6.3 Další způsob výpočtu váhových koeficientů q

V praxi se zpravidla počítají pouze koeficient Q_{ii} potřebné pro výpočet středních chyb neznámých. Při tomto způsobu však není možnost správnost výpočtu kontrolovat pomocí vzorců (1.64). Výpočet váhových koeficientů následujícími vzorci je odvozen z již jednou vyřešení soustavy původních (nepřestavěných) normálních rovnic postupnou Gaussovou eliminací.

$$Q_{11} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb.1]} + \frac{A_2^2}{[pcc.2]}, \text{ kde} \quad (1.63)$$

$$A_1 = -\frac{[pab]}{[paa]} \quad A_2 = -\frac{[pac]}{[paa]} - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} A_1$$

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb.1]} + \frac{B^2}{[pcc.2]}, \text{ kde} \quad B = -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} \quad (1.64)$$

$$Q_{33} = \frac{1}{[pcc.2]} \quad (1.65)$$

Z uvedených vzorců, které lze snadno rozšířit pro větší počet neznámých, je zřejmé, že numerické hodnoty se převezmou ze schématu pro řešení normálních rovnic Gaussovou eliminací.

1.6.4 Určení váhových koeficientů při dvou neznámých

Jsou-li dně neznámé x, y , budou normální rovnice

$$\begin{aligned} [paa]x + [pab]y - [pal] &= 0 \\ [pab]x + [pbb]y - [pbl] &= 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

Při jejich redukci bude v jednu redukované rovnici koeficient $[pbb.1]$ u neznámé y roven váze p_y a tedy $Q_{22} = \frac{1}{[pbb.1]}$

Kdybychom rovnice přestavili, bude platit

$$\begin{aligned} [pab]y + [paa]x - [pal] &= 0 \\ [pbb]y + [pab]x - [pbl] &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

a váhový koeficient Q_{11} neznámé x je $Q_{11} = \frac{1}{[paa.1]}$

Výrazy:

$$[paa. 1] = [paa] - \frac{[pab]}{[pbb]} [pab] = \frac{[paa][pbb] - [pab]^2}{[pbb]} = \frac{D}{[pbb]} \quad (1.68)$$

$$[pbb. 1] = [pbb] - \frac{[pab]}{[paa]} [pab] = \frac{[paa][pbb] - [pab]^2}{[paa]} = \frac{D}{[paa]} \quad (1.69)$$

kde D je determinant soustavy rovnic (1.66) $D = [paa][pbb] - [pab]^2$.

Protože $D = [paa. 1][pbb] = [pbb. 1][paa]$ viz 1.68 a 1.69.

$$\text{Z uvedeného vyplývá: } Q_{11} = Q_{22} \frac{[pbb]}{[paa]}$$

$$\text{Váhy neznámých: } p_x = \frac{D}{[pbb]}, p_y = \frac{D}{[paa]} \quad (1.70)$$

Střední chyby:

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{22}} = \frac{m_0}{\sqrt{[pbb. 1]}} = m_0 \sqrt{\frac{[paa]}{D}} \quad (1.71)$$

$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{11}} = m_y \sqrt{\frac{[pbb]}{[paa]}} = m_0 \sqrt{\frac{[pbb]}{D}} \quad (1.72)$$

1.6.5 Střední chyba jednoho měření a střední chyba jednotky váhy

Střední chyba jednoho měření m (při vyrovnaní měření stejné přesnosti) se obecně vypočte:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-v}} \quad (1.73)$$

kde $n - v$ je počet nadbytečných měření.

Střední chyba pro jednotku váhy m_0 (při vyrovnaní měření nestejné přesnosti)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p vv]}{n-v}} \quad (1.74)$$

Střední chyby vypočtené z oprav v podle vzorce (1.77 neb 1.78) jsou náhodné veličiny. Opakované měření zprostředkujících veličin dá poněkud jiné výsledky, jiné opravy v a poněkud jiné hodnoty střední chyby m , resp. m_0 . Výsledky budou tím spolehlivější, čím větší je počet nadbytečných měření $(n - v)$.

Střední chyby jednotlivých měření m_i (po vyrovnaní) vypočteme ze vzorce oprav

$$p_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}, \text{ kde } p_i \text{ je příslušná váha měření} \quad (1.75)$$

1.7 Postup výpočtu při vyrovnaní měření zprostředkujících.

1. Sestavení rovnic oprav – rovnice oprav jsou lineární

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i \text{ s váhami } p_i.$$

Abychom mohli počítat s malými čísly (s malým počtem cifer), zavádíme pro neznámé x, y, z sblížené hodnoty x_0, y_0, z_0 a výpočtem stanovíme jejich doplňky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$.

$$x = x_0 + \delta_x \quad y = y_0 + \delta_y \quad z = z_0 + \delta_z$$

Rovnice oprav se změjí na tvar

$$v_i = a_i \delta_x + b_i \delta_y + c_i \delta_z + a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 - l_i$$

$$v_i = a_i \delta_x + b_i \delta_y + c_i \delta_z + l'_i \text{ s váhami } p_i.$$

Pro doplňky $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ platí všechny vztahy, které byly dříve odvozeny pro x, y, z .

- rovnice oprav nejsou lineární. Rovnice oprav je nutno přetvořit na lineární tvar

$$v_i = q_i x + r_i y + s_i z - l_i$$

Každé měření umožňuje sestavení jedné rovnice oprav. Proto počet rovnic oprav odpovídá počtu měření. Pro správné vyrovnaní měření zprostředkujících je bezpodmínečně nutné správné sestavení rovnic oprav. Pro numerické výpočty je výhodné, jsou-li součinitelé (koeficienty) neznámých i absolutní členy přibližně stejného řádu.

2. Váhy měření vypočteme ze středních chyb m_i jednotlivých měření $p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$

Střední chybu jednotkovou m_0 volíme tak, aby váhy vyšly jako malá okrouhlá čísla vhodná pro výpočet.

3. Výpočet součinitelů a prostých členů normálních rovnic se provádí v tabulce, do které vepíšeme koeficienty neznámých a prosté členy z rovnic oprav. Pro každý řádek vypočteme pomocný součet, aby $a_i + b_i + c_i - l_i + s_i = 0$. Sečteme řádky a sloupce, abychom určili $[s]$. Výpočet kvadratických členů a součinů ověřujeme kontrolami sloupovými a řádkovými. V sloupcových součtech dostaneme součinitele a absolutní členy normálních rovnic. Jejich výpočet je správný, souhlasí-li ... v řádku i sloupci.
4. Výpočet neznámých (nebo doplňků neznámých) provádíme v pracovní tabulce pomocí Gaussova algoritmu ze zkráceného zápisu normálních rovnic.

$$\begin{aligned} [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] + [pas] &= 0 \\ [pbb]y + [pbc]z - [pbl] + [pbs] &= 0 \\ [pcc]z - [pcl] + [pcs] &= 0 \\ [pll] - [pls] &= 0 \\ [pss] &= 0 \end{aligned}$$

5. Současné s výpočtem neznámých v normálních rovnicích řešíme i rovnice vah, které mají stejné součinitelé jako normální rovnice. Proto do výpočetního schématu vpisujeme jen odlišnou část, tj. jedničky a nuly na pravé straně rovnic v pořadí, které odpovídá soustavě váhových rovnic

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$[paa]Q_{k_1} + [pab]Q_{k_2} + [pac]Q_{k_3}$	1	0	0
$[pbb]Q_{k_2} + [pbc]Q_{k_3}$	0	1	0
$[pcc]Q_{k_3}$	0	0	1

Normální i váhové rovnice redukuje ve společném schématu jedním faktorem r v celém řádku za sebou. Při redukci (řešení) normálních rovnic provádíme stále řádkové a sloupcové kontroly. Při redukci váhových rovnic od těchto kontrol upouštíme. Správnost výpočtu neznámých kontrolujeme vztahy

$$Q_{12} = Q_{21}; Q_{13} = Q_{31}; Q_{23} = Q_{32} \text{ obecně } Q_{ik} = Q_{ki}$$

Neznámé hodnoty x, y, z počítáme zpětným dosazováním vypočtených hodnot do první rovnice redukovaných normálních rovnic.

$$\begin{aligned}[paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] + [pas] &= 0 \\ [pbb.1]y + [pbc.1]z - [pbl.1] + [pbs.1] &= 0 \\ [pcc.2]z - [pcl.2] + [pcs.2] &= 0 \\ [pll.3] - [pls.3] &= 0 \\ [pss.4] &= 0\end{aligned}$$

Vyloučení (vyredukování) všech neznámých vede k ověření výrazu

$$[pvv] = [pll.v] = [pss.v]$$

Neznámé váhové součinitele vypočteme z redukovaných rovnic vah (podobně jako neznámé u normálních rovnic). Neznámé hodnoty x, y, z a jejich váhy (váhové součinitele) lze počítat také jinak – zcela nezávisle na sobě – přestavbou normálních rovnic (cyklickou záměnou tak, aby hledaná neznámá byla před absolutním členem). Součinitel neznámé při Gaussově eliminaci v normální rovnici ... redukce udává její váhu (převratnou hodnotu jejího váhového součinitele). Další možnost výpočtu potřebných váhových součinitelů (bez možnosti kontroly správnosti výpočtu) je dosažení do předem odvozených vzorců pro jejich zjištění.

6. Kontrolu neznámých x, y, z provedeme dosazením vypočtených hodnot do součtové normální rovnice.

7. Výpočet oprav provedeme dosazením již zkontrolovaných hodnot neznámých do rovnic oprav $v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$

8. Správnost vypočtených oprav můžeme ověřit výrazy

$$\begin{aligned}[v] &= [a]x + [b]y + [c]z - [l] \\ [pav] &= 0; [pbv] = 0; [pcv] = 0 \\ [pvv] &= -[plv]\end{aligned}$$

9. Po výpočtu neznámých provedeme sigmové zkoušky $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$

10. Nejpravděpodobnější vyrovnané hodnoty x, y, z jsou

$$x = x_0 + \delta_x \quad y = y_0 + \delta_y \quad z = z_0 + \delta_z$$

11. Závěrečná nejdůležitější kontrola spočívá v dosazení vypočtených neznámých x, y, z do původních rovnic oprav. Dosadíme-li měřené hodnoty a jejich opravy do levé strany rovnic a nejpravděpodobnější hodnoty x, y, z do pravé strany rovnic, přesvědčíme se, zda při lineární závislosti oprav byly rovnice sestaveny správně, při nelineární závislosti byly sblížené hodnoty x_0, y_0, z_0 stanoveny s takovou přesností, která opravňuje omezit rozvoj Taylorovy řady na lineární členy. Značné rozdíly ukazují na to, že přesnost hodnot x_0, y_0, z_0 nepostačuje. Výpočet je zapotřebí opakovat s novými sblíženími (přibližnými) hodnotami, za něž volíme právě vypočtené hodnoty neznámých x, y, z .

12. Střední chybu jednotkovou vypočteme podle vzorce $m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-v}}$

13. Váhy vypočtených doplňků (neznámých) jsou dány součiniteli u neznámých při Gaussově eliminaci v $(v - 1)$. redukci

$$p_x = p_{11} = [paa.2] = \frac{1}{q_{11}}, p_y = p_{22} = [pbb.2] = \frac{1}{q_{22}}, p_z = p_{33} = [pcc.2] = \frac{1}{q_{33}}$$

Váhové součinitele je možno také určit z váhových rovnic.

14. Střední chyby a váhy doplňků neznámých $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ jsou zároveň středními chybami a váhami hledaných neznámých x, y, z , neboť přibližné (sblížené) hodnoty x_0, y_0, z_0 je nutno chápat jako konstanty

$$m_{\delta_x} = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_{\delta_x}}} = \pm m_0 \sqrt{Q_{11}} \quad m_{\delta_y} = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_{\delta_y}}} = \pm m_0 \sqrt{Q_{22}} \quad m_{\delta_z} = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_{\delta_z}}} = \pm m_0 \sqrt{Q_{33}}$$

15. Výsledek výpočtu je:

$$x \pm m_x, y \pm m_y, z \pm m_z$$

Číselný příklad 1.1: Lineární závislost rovnic s váhami měření

Pozn.: Postup řešení úlohy s měřením stejné přesnosti (tzn. bez vah) je stejný, jen neuvažujeme váhy měření, které jsou u všech měřených hodnot 1

Zadání: Přesnou nivelací bylo změřeno převýšení bodů I, II a III nad základním bodem A. Situace je na obrázku, kde šipky značí směr, v němž území stoupá. Určete také střední chyby určených převýšení.

$$\begin{aligned}l_1 &= 23,870 \text{ m} & s_1 &= 4,0 \text{ km} \\l_2 &= 38,477 \text{ m} & s_2 &= 4,5 \text{ km} \\l_3 &= 14,534 \text{ m} & s_3 &= 2,5 \text{ km} \\l_4 &= 14,598 \text{ m} & s_4 &= 2,0 \text{ km} \\l_5 &= 9,331 \text{ m} & s_5 &= 5,0 \text{ km} \\l_6 &= 23,937 \text{ m} & s_6 &= 3,3 \text{ km}\end{aligned}$$

Vypracování: Označme postupně neznámé x, y, z jako výšky bodů I, II a III nad bodem A. Pak pro příslušné výškové rozdíly platí:

$$\begin{aligned}v_{A,I} &= x \\v_{A,II} &= y \\v_{A,III} &= z \\v_{I,II} &= -x + y \\v_{I,III} &= x - z \\v_{II,III} &= y - z\end{aligned}$$

Volíme sblížené hodnoty: $x = x_0 + \delta_x$, kde $x_0 = l_1$
 $y = y_0 + \delta_y$ $y_0 = l_2$
 $z = z_0 + \delta_z$ $z_0 = l_3$

Určíme váhy měření: $p_i = \frac{c}{s_i} = \frac{10}{s_i}$, s_i je v km.

Sestavíme rovnice oprav:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \delta_x & &= l_1 + v_1 \\y &= y_0 + \delta_y & &= l_2 + v_2 \\z &= z_0 + \delta_z & &= l_3 + v_3 \\-x + y &= -x_0 + y_0 - \delta_x + \delta_y & &= l_4 + v_4 \\x - z &= x_0 - z_0 + \delta_x - \delta_z & &= l_5 + v_5 \\y - z &= y_0 - z_0 + \delta_y - \delta_z & &= l_6 + v_6\end{aligned}$$

Dosazením číselných údajů v mm dostaneme:

$$\begin{aligned}v_1 &= +\delta_x & p_1 &= 2,5 \\v_2 &= +\delta_y & p_2 &= 2,2 \\v_3 &= +\delta_z & p_3 &= 4,0 \\v_4 &= -\delta_x + \delta_y + 9 & p_4 &= 5,0 \\v_5 &= +\delta_x - \delta_z + 5 & p_5 &= 2,0 \\v_6 &= +\delta_y - \delta_z + 6 & p_6 &= 3,0\end{aligned}$$

Výpočet koeficientů normálních rovnic a absolutní členy vypočteme v tabulce za použití řádkových a sloupcových kontrol.

i	p	a	b	c	-l	s	paa	pab	pac	-pal	pas	pbb	pbc	-pbl	pbs	pcc	-pcl	pcs	pll	-pls	pss
1	2,5	+1				-1	+2,5				-2,5										+2,5
2	2,2		+1			-1						+2,2			-2,2						+2,2
3	4,0			+1		-1										+4,0		-4,0			+4,0
4	5,0	-1	+1		+9	-9	+5,0	-5,0		-45,0	+45,0	+5,0		+45,0	-45,0				+405,0	-405,0	+405,0
5	2,0	+1		-1	+5	-5	+2,0		-2,0	+10,0	-10,0					+2,0	-10,0	+10,0	+50,0	-50,0	+50,0
6	3,0		+1	-1	+6	-6						+3,0	-3,0	+18,0	-18,0	+3,0	-18,0	+18,0	+108,0	-108,0	+108,0
Σ		+1	+3	-1	+20	-23	+9,5	-5,0	-2,0	-35,0	+32,5	+10,2	-3,0	+63,0	-65,2	+9,0	-28,0	+24,0	+563,0	-563,0	+571,7

Kontrola správnosti výpočtu:

Má býti:

$$[a] + [b] + [c] - [l] + [s] = 0$$

$$[paa] + [pab] + [pac] - [pal] + [pas] = 0$$

$$[pab] + [pbb] + [pbc] - [pbl] + [pbs] = 0$$

$$[pac] + [pbc] + [pcc] - [pcl] + [pcs] = 0$$

$$-[pal] - [pbl] - [pcl] + [pll] - [pls] = 0$$

$$[pas] + [pbs] + [pcs] - [pls] + [pss] = 0$$

Je:

$$1 + 3 - 1 + 20 - 23 = 0$$

$$9,5 - 5 - 2 - 35 + 32,5 = 0$$

$$-5 + 10,2 - 3 + 63 - 65,2 = 0$$

$$-2 - 3 + 9 - 28 + 24 = 0$$

$$-35 + 63 - 28 + 563 - 563 = 0$$

$$32,5 - 65,2 + 24 - 563 + 571,7 = 0$$

Tvar normálních rovnic:

$$9,5 \delta_x - 5 \delta_y - 2 \delta_z - 35 = 0$$

$$10,2 \delta_y - 3 \delta_z + 63 = 0$$

$$9 \delta_z - 28 = 0$$

Soustavu normálních rovnic (společně s rovnicemi vah) řešíme postupnou Gaussovou eliminací:

	Normální rovnice	δ_x	δ_y	δ_z	-l	s	Δ	Q_1	Q_2	Q_3
	[pa]	+9,500	-5,000	-2,000	-35,000	+32,500		-1,0000		
$\frac{[pab]}{[paa]} = r_b$	[pb] +0,5263		+10,200 -2,632	-3,000 -1,053	+63,000 -18,421	-65,200 +17,105		-0,5263	-1,0000	
$\frac{[pac]}{[paa]} = r_c$	[pc] +0,2105			+9,000 -0,421	-28,000 -7,368	+24,000 +6,842		-0,2105		-1,0000
$\frac{[pal]}{[paa]} = r_l$	[pl] +3,6842				+563,000 -128,947	-563,000 +119,737				
	1. redukce									
	[pb]		+7,568	-4,053	+44,579	-48,095		-0,5263	-1,0000	
$\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} = r'_c$	[pc] +0,5355			+8,579 -2,170	-35,368 +23,871	+30,842 -25,753		-0,2105 -0,2818		-1,0000
$\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} = r'_l$	[pl] -5,8901				+434,053 -262,576	-443,263 +283,284				
	2. redukce									
	[pc]			+6,409	-11,498	+5,089		-0,4924	-0,5355	-1,0000
$\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} = r''_l$	[pl] +1,7941				+171,477 -20,628	-159,979 +9,130				
	3. redukce									
	[pl]				+150,849	-150,849				

Výpočet neznámých $\delta_x, \delta_y, \delta_z$.

$$+6,409 \delta_z - 11,498 = 0$$

$$\delta_z = 1,794$$

$$+7,568 \delta_y - 4,053 \delta_z + 44,579 = 0$$

$$+7,568 \delta_y - 7,271 + 44,579 = 0$$

$$\delta_y = -4,929$$

$$+9,5 \delta_x - 5,0 \delta_y - 2,0 \delta_z - 35,0 = 0$$

$$+9,5 \delta_x + 24,647 - 3,588 - 35,0 = 0$$

$$\delta_x = 1,467$$

Správnost výpočtu neznámých ověříme dosazením do součtové normální rovnice:

$$\{[paa] + [pab] + [pac]\} \delta_x + \{[pab] + [pbb] + [pbc]\} \delta_y + \{[pac] + [pbc] + [pcc]\} \delta_z + [-pal] + [-pbl] + [-pcl] = 0.$$

$$3,6675 - 10,8438 + 7,176 - 35,0 + 63,0 - 28,0 = -0,0003 \doteq 0$$

Kontrola vychází uspokojivě.

Výpočet oprav měření. Kontrola správnosti celého výpočtu.

i	p	a	b	c	aδx	bδy	cδz	-l	v	pav	pbv	pcv	-plv	pvv
1	2,5	+1			+1,467				+1,467	+3,67				+5,38
2	2,2		+1			-4,929			-4,929		-10,84			+53,46
3	4,0			+1			+1,794		+1,794			+7,18		+12,87
4	5,0	-1	+1		-1,467	-4,929		+9,000	+2,603	-13,02	+13,02		+117,14	+33,88
5	2,0	+1		-1	+1,467		-1,794	+5,000	+4,673	+9,35		-9,35	+46,73	+43,68
6	3,0		+1	-1		-4,929	-1,794	+6,000	-0,724		-2,17	+2,17	-13,02	+1,57
Σ		+1	+3	-1	+1,467	-14,788	-1,794	+20,000	+4,885	-0,00	-0,00	-0,00	+150,85	+150,85

Vypočtené opravy ověříme součtovou rovnicí oprav

$$[a]\delta x + [b]\delta y + [c]\delta z - [l] = [v]$$

má být

$$1,467 - 14,788 - 1,794 + 20 = 4,885$$

je

Kontrola souhlasí přesně.

Teoretické podmínky $[pav] = 0$; $[pbv] = 0$; $[pcv] = 0$ jsou splněny.

Sigmové zkoušky:

$$\Sigma_I = -[pal]\delta x - [pbl]\delta y - [pcl]\delta z = -51,361 - 310,557 - 50,234 = -412,152$$

$$\Sigma_{II} = -\frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl]^2}{[pbb]} - \frac{[pcl]^2}{[pcc]} = -\frac{35^2}{9,5} - \frac{44,579^2}{7,568} - \frac{11,498^2}{6,409} = -412,166 \quad (-128,9474 - 262,5908 - 20,6279)$$

$$\Sigma_{III} = [pvv] - [pll] = 150,85 - 563,0 = -412,15$$

Výrazy pro Σ_I , Σ_{II} , Σ_{III} souhlasí uspokojivě.

Kontrola součtu $[pvv]$.

má být:

je:

$$[pvv] + [plv] = 0 \quad 150,85 - 150,85 = 0$$

$$[pvv] - [plv \cdot 3] = 0 \quad 150,85 - 150,85 = 0$$

Střední chyba jednotková

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}} = \pm \sqrt{\frac{150,85}{n-3}} = \pm 7,09 \text{ mm}$$

Výpočet váhových součinitelů pro jednotlivé neznámé:

$$Q_{11} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb.1]} + \frac{A_2^2}{[pcc.2]} = \frac{1}{9,5} + \frac{0,27701}{7,568} + \frac{0,24245}{6,409} = 0,17969$$

$$A_1 = -\frac{[pab]}{[paa]} = -\frac{-5}{9,5} = 0,52632 \quad A_1^2 = 0,27701$$

$$A_2 = -\frac{[pac]}{[paa]} - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} A_1 = -\frac{-2}{9,5} - \frac{-4,053}{7,568} 0,52632 = 0,49239 \quad A_2^2 = 0,24245$$

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb.1]} + \frac{B^2}{[pcc.2]} = \frac{1}{7,568} + \frac{0,28680}{6,409} = 0,17688.$$

$$B = -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} = -\frac{-4,053}{7,568} = 0,53554 \quad B^2 = 0,28680$$

$$Q_{33} = \frac{1}{[pcc.2]} = \frac{1}{6,409} = 0,15603$$

Váhoví součinitelé jsou počítáni dvěma různými způsoby. Nejdříve jsou počítáni z odvozených vzorců pouze váhoví součinitelé Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} . Tento způsob je méně pracný, ovšem neposkytuje kontroly správnosti výpočtu váhových součinitelů.

Druhý způsob výpočtu váhových součinitelů řešením váhových rovnic (Gaussovou eliminací) je pracnější, ale umožňuje kontrolu správnosti vypočtených váhových součinitelů. Musí platit vztahy: $Q_{12} = Q_{21}, Q_{23} = Q_{32}, Q_{13} = Q_{31}$

Řešením váhových rovnic pro váhové součinitele dostáváme hodnoty, které se od předchozích liší pouze v jednotkách posledního místa $Q_{11} = 0,17968, Q_{22} = 0,17687, Q_{33} = 0,15603$

Středních chyby neznámých.

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}} = \pm 7,09 \sqrt{0,180} = \pm 3,01 \text{ mm}$$

$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}} = \pm 7,09 \sqrt{0,177} = \pm 2,98 \text{ mm}$$

$$m_z = m_0 \sqrt{Q_{33}} = \pm 7,09 \sqrt{0,156} = \pm 2,80 \text{ mm}$$

Výsledné hodnoty neznámých. Kontrola správnosti celého výpočtu.

$$\begin{array}{llll} x_1 = (x) = l_1 + v_1 = & 23,870 \text{ m} + 1,5 \text{ mm} = & 23,871_5 \text{ m} \\ x_2 = (y) = l_2 + v_2 = & 38,477 \text{ m} - 4,9 \text{ mm} = & 38,472_1 \text{ m} \\ x_3 = (z) = l_3 + v_3 = & 14,534 \text{ m} + 1,8 \text{ mm} = & 14,535_8 \text{ m} \\ x_4 = & l_4 + v_4 = & 14,598 \text{ m} + 2,6 \text{ mm} = & 14,600_6 \text{ m} \\ x_5 = & l_5 + v_5 = & 9,331 \text{ m} + 4,7 \text{ mm} = & 9,335_7 \text{ m} \\ x_6 = & l_6 + v_6 = & 23,937 \text{ m} - 0,7 \text{ mm} = & 23,936_3 \text{ m} \end{array}$$

Kontrola správnosti výpočtu:

$$x_4 = y - x = 38,472_1 - 23,871_5 = 14,600_6 \text{ m}$$

$$x_5 = x - z = 23,871_5 - 14,535_8 = 9,335_7 \text{ m}$$

$$x_6 = y - z = 38,472_1 - 14,535_8 = 23,936_3 \text{ m}$$

Kontrola správnosti výpočtu souhlasí přesně.

Číselný příklad 1.2: Nelineární závislost rovnic oprav.

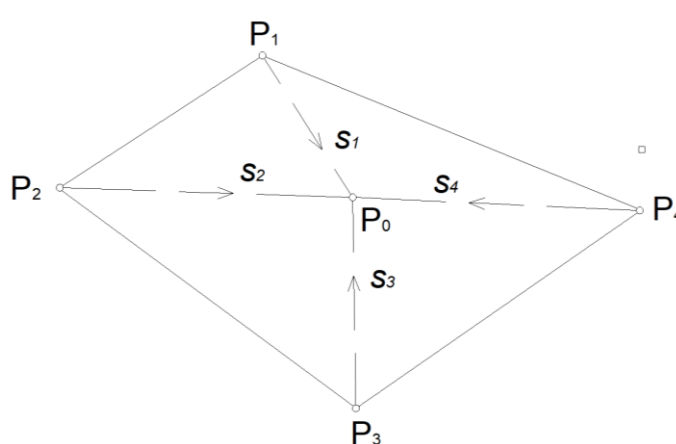
Zadání: Vyrovnajte metodu nejmenších čtverců souřadnice bodu P určeného (přeurčeného) měřením délek – složitým protínáním. V souřadnicích JTSK jsou dány body P_1, P_2, P_3, P_4 . Nový bod je určen měřenými délkami s_1, s_2, s_3, s_4 . Číselné hodnoty souřadnic, měřených délek a situace jsou následující:

P_1 : [472721,206; 1126272,564]
 $s_1 = 10337,597$

P_2 : [474588,416; 1134289,924]
 $s_2 = 9047,676$

P_3 : [467862,946; 1150579,124]
 $s_3 = 17009,587$

P_4 : [446560,736; 1132268,494]
 $s_4 = 19053,541$



Vypracování: Rovnice oprav – sestavení.

Vyrovnané délky $S_i = s_i + v_i$ mezi určovaným bodem P a danými body P_i budou podle Pythagorovy věty $s_i + v_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$.

Tento nelineární vztah musíme přetvořit na lineární.

Pro přibližné souřadnice nového bodu $P (= P_0)$ – spočítané z jednoho protínání – zavedeme označení x_0, y_0 . Souřadnice nového (vyrovnaného) bodu P budou

$$x = x_0 + \delta x \quad y = y_0 + \delta y$$

Rovnice oprav – dosud nelineární – po dosazení bude mít tvar:

$$s_i + v_i = \sqrt{(x_0 - x_i + \delta x)^2 + (y_0 - y_i + \delta y)^2}$$

Podle Taylorova rozvoje pro náhradní funkci v okolí (x_0, y_0) platí

$$s_i + v_i = f_i(x_0, y_0) + \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \delta y$$

Jednotlivé členy na první straně rovnice jsou:

$$f_i(x_0, y_0) = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} = s_i^0 \dots (\text{přibližná délka stran - vypočtená z bodů o souřadnicích } x_0, y_0 \text{ a } x_i, y_i)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{x_0 - x_i}{s_i^0} = a_i \quad \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{y_0 - y_i}{s_i^0} = b_i$$

Odvození koeficientu a:

$$\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} = [(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \dots \text{jinak napsaný výraz}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{1}{2} [(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x_0 - x_i) \cdot 1 = \frac{(x_0 - x_i)}{[(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_0 - x_i}{s_i^0}$$

Podobně pro y dostaneme výraz uvedený výše.

Přetvořené rovnice oprav jsou:

$$v_i = s_i^0 + \frac{x_0 - x_i}{s_i^0} \delta x + \frac{y_0 - y_i}{s_i^0} \delta y - s_i = a_i \delta x + b_i \delta y + (s_i^0 - s_i) = a_i \delta x + b_i \delta y + l_i$$

pro náš konkrétní případ tedy bude:

$$v_1 = a_1 \delta x + b_1 \delta y + l_1$$

$$v_2 = a_2 \delta x + b_2 \delta y + l_2$$

$$v_3 = a_3 \delta x + b_3 \delta y + l_3$$

$$v_4 = a_4 \delta x + b_4 \delta y + l_4$$

Přibližné souřadnice x_0, y_0 bodu P vypočítané z délek s_1, s_2 (protínáním vpřed z délek) jsou:

$$x_0 = 1\,133\,726,34 \text{ m.} \quad y_0 = 465\,558,31 \text{ m.}$$

Určení koeficientů a prostých členů přetvořených rovnic oprav.

$$s_i^0 = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} = \dots$$

Vlastní výpočet koeficientů a prostých členů přetvořených rovnic oprav a normálních rovnic provedeme v pracovní tabulce.

	aa	ab	al	as	bb	bl	bs	ll	ls
1	0,519893	-0,4996	-0,21631	0,196022	0,480107	0,2078693	-0,188373	0,09	-0,081559
2	0,00388	0,06217	0	-0,06605	0,99612	0	-1,058289	0	0
3	0,981642	0,134241	-4,75574	3,639855	0,018358	-0,650352	0,497754	23,04	-17,63391
4	0,005854	0,076289	-0,8646	0,78246	0,994146	-11,26687	10,19644	127,69	-115,5585
Σ	1,51127	-0,22690	-5,83665	4,55229	2,48873	-11,70936	9,44753	150,82000	-133,27399

Kontrola výpočtu tabulky (řádkové a sloupcové kontroly)

$$[a] + [b] + [-l] + [s] = 0 \quad -0,25552 - 0,82938 - 6,80000 + 7,88490 = 0$$

$$[aa] + [ab] - [al] + [as] = 0 \quad 1,51127 - 0,22690 - 5,83665 + 4,55229 = 0,00001$$

$$[ab] + [bb] - [bl] + [bs] = 0 \quad -0,22690 + 2,48873 - 11,70936 + 9,44753 = 0$$

$$-[al] - [bl] + [ll] - [ls] = 0 \quad -5,83665 - 11,70936 + 150,82 - 133,27399 = 0$$

Normální rovnice:

$$1,5113\delta x - 0,2269\delta y - 5,8366 = 0.$$

$$-0,2269\delta x + 2,4887\delta y - 11,7094 = 0$$

$$1,2844\delta x + 2,2618\delta y - 17,5460 = 0$$

Soustavu normálních rovnic (o dvou neznámých) výhodně řešíme pomocí determinantů.

Výpočet neznámých:

$$\delta x = \frac{D_x}{D}, \delta y = \frac{D_y}{D}$$

$$D = [aa] \cdot [bb] - [ab]^2 = 1,51127 \cdot 2,48873 - (-0,22690)^2 = 3,70966$$

$$D_x = [ab] \cdot [-bl] - [bb] \cdot [-al] = -0,22690 \cdot -11,70936 - 2,48873 \cdot -5,83665 = 17,18276$$

$$D_y = [ab] \cdot [-al] - [aa] \cdot [-bl] = -0,22690 \cdot -5,83665 - 1,51127 \cdot -11,70936 = 19,02036$$

$$\delta x = \frac{D_x}{D} = \frac{17,18276}{3,70966} = 4,63_2 \text{ cm} \quad \delta y = \frac{D_y}{D} = \frac{19,02036}{3,70966} = 5,12_7 \text{ cm}$$

Součtová rovnice pro kontrolu vypočtených neznámých $\delta x, \delta y$ je:
 $5,94934 + 11,59625 - 17,5460 = -0,0004 \doteq 0$.

Vyrovnané souřadnice bodu P

$$x = x_0 + \delta x = 1\,133\,726,34\,m + 0,0463\,m = 1\,133\,726,386\,m$$

$$y = y_0 + \delta y = 465\,558,31\,m + 0,0513\,m = 465\,558,361\,m$$

Výpočet oprav v a $[vv]$ s kontrolou.

	$a\delta x$	$a\delta y$	l (cm)	v	av	bv	lv	vv
1	3,33977	-3,5527	-0,3	-0,512898	-0,36982	0,35539	0,15387	0,26306
2	-0,28852	-5,1173	0	-5,405822	0,33673	5,39532	0	29,2229
3	-4,58919	-0,6947	4,8	-0,483881	0,47942	0,06556	-2,32263	0,23414
4	0,3544	5,11223	-11,3	-5,833371	-0,44633	-5,81627	65,9171	34,0282
Σ	-1,18354	-4,25243	-6,80000	-12,23597	0,00000	0,00000	63,74834	63,74834

Kontrola správnosti součtovou rovnicí:

$$[a]\delta x + [b]\delta y - [l] = [v]$$

$$-1,18354 - 4,25243 - 6,80 = -12,23597 \quad \text{Kontrola souhlasí přesně.}$$

Kontrola výpočtu $[vv]$.

Kontrola výpočtu – ostrá zkouška.

Výpočet vyrovnaných délek z měřených hodnot a vypočtených oprav $S_i = s_i + v_i$.

$$S_1 = s_1 + v_1 = 10337,597 - 0,005 = 10337,592\,m$$

$$S_2 = s_2 + v_2 = 9047,676 - 0,054 = 9047,622\,m$$

$$S_3 = s_3 + v_3 = 17009,587 - 0,005 = 17009,582\,m$$

$$S_4 = s_4 + v_4 = 19053,541 - 0,058 = 19053,483\,m$$

Výpočet délek z vyrovnaných souřadnic bodu P (vyrovnané délky)

$$S_i^v = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad v_i^v = S_i^v - s_i$$

	y	x	S_i^v	s_i	v^v (cm)	vv
1	472721,206	1126272,564	10337,592	10337,597	-0,5	0,25
2	474588,416	1134289,924	9047,622	9047,676	-5,4	29,16
3	467862,946	1150579,124	17009,582	17009,587	-0,5	0,25
4	446560,736	1132268,494	19053,483	19053,541	-5,8	33,64
Σ						63,30

Vzhledem k správnému výpočtu (ověřen ostrou zkouškou dosazením do výchozího vztahu a ověřením výrazu $[vv]$ vypočteme střední chyby v poloze určovaného bodu P.

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{63,738}{n-2}} = \pm 5,6\,cm.$$

$$m_x = \pm m_0 \sqrt{\frac{[aa]}{D}} = 5,6 \sqrt{\frac{1,51}{3,71}} = \pm 3,6\,cm$$

$$m_y = \pm m_0 \sqrt{\frac{[bb]}{D}} = 5,6 \sqrt{\frac{2,49}{3,71}} = \pm 4,6\,cm$$

Výsledek vyrovnaní:

$$x = 1\,133\,726,386\,m \pm 0,036\,m$$

$$y = 465\,558,361\,m \pm 0,046\,m$$

2. Vyrovnání podmínkových měření

2.1 Podstata vyrovnání podmínkových měření

Podmínková měření jsou taková, u kterých jsou hledané veličiny spolu vázány určitými na sobě nezávislými podmínkami. Jde tedy v podstatě o vyrovnání přímých měření vázaných podmínkami, které mají být přesně splněny.

Například při nivelaci uzavřeného pořadu musí být součet převýšení roven nule. Součet tří úhlů v rovinném trojúhelníku musí být rovný 180° atd. Vlivem působení měř. chyb nejsou tyto podmínky přesně splněny. Úkolem vyrovnávacího počtu je výpočet oprav v , o které je nutno měřené hodnoty opravit, aby uvedené podmínky byly přesně splněny. Mimo těchto podmínek musí být splněna také podmínka základní, a to, že $[pvv] = \text{minimum}$, resp. $[vv] = \text{minimum}$.

K vyrovnání dochází z důvodu nadbytečného měření veličin.

Příklad: V trojúhelníku měříme všechny tři úhly. Kdybychom měřili pouze dva a třetí dopočítali, nemůže k vyrovnání dojít.

Při vyrovnání zprostředkujících měření vypočítáme nejdříve (z normálních rovnic) neznáme x, y, z a potom opravy v . Gauss ukázal, že opravy v můžeme považovat za neznámé a vypočítat je tak, že budou splněny dané podmínky i základní požadavek $[pvv] = \text{min}$. Pravé hodnoty n -veličin X_1, X_2, \dots, X_n , které by měly být zjištěny měřením, jsou spolu spojeny např. několika r teoretickými, na sobě úplně nezávislými vztahy (podmínkami), které nazýváme podmínkovými rovnicemi. Tyto rovnice mohou být i nelineární. Podobně jako u vyrovnání prostředkujících měření je zapotřebí nelineární podmínkové rovnice přetvořit, aby v nich byly opravy v jen v první mocnině (aby rovnice byly lineární).

2.1.1 Podmínkové rovnice nelineární

Podmínkové nelineární rovnice jsou dány těmito výrazy.

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_r(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Místo pravých hodnot X_1, X_2, \dots, X_n naměříme hodnoty l_1, l_2, \dots, l_n , jejichž váhy jsou p_1, p_2, \dots, p_n . Dosadíme-li do podmínkových rovnic (2.1) místo pravých hodnot X hodnoty měřené l , nebudou tyto rovnice obecně přesně splněny (nebudou rovny nule), ale vzniknou odchylky U .

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= U_1 \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= U_2 \\ &\vdots \\ f_r(X_1, X_2, \dots, X_n) &= U_r \end{aligned} \tag{2.2}$$

Takto vzniklé rovnice (2.2) nazýváme rovnice odchylek. Aby platily podmínkové rovnice přesně, je nutno měřené hodnoty l_i opravit o opravy v_i ($x_i = l_i + v_i$). Dosazením takto opravených měřených hodnot do (2.2) odstraníme odchylky

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) = 0 \\
&\vdots \\
f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_r(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Podobně jako u zprostředkujících měření můžeme i u podmínkových vyrovnávat jen lineární závislost oprav. Proto je nutné tyto rovnice přetvořit tak, aby v nich byly neznámé opravy v první mocnině.

Můžeme reálně předpokládat, že opravy jsou v poměru k měřeným hodnotám velmi malé (protože měření bylo pečlivě provedeno) a rovnice (2.3) rozvedeme podle Taylorové řady, přičemž vynecháme pro nepatrnost členy druhého a vyššího řádu.

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial f_1}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial l_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial l_n} v_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_2(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial f_2}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial l_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial l_n} v_n \\
&\vdots \\
f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_r(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial f_r}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial f_r}{\partial l_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial l_n} v_n
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Označíme-li parciální derivace

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_i} = a_i, \frac{\partial f_2}{\partial l_i} = b_i, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial l_i} = r_i \tag{2.5}$$

a přihlédneme-li k rovnicím odchylek (2.2) převedeme rovnice (2.3) na přetvořené podmínkové rovnice, které obsahují opravy v lineárním tvaru:

$$\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + U_1 &= 0, \text{ resp. } [av] + U_1 = 0 \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + U_2 &= 0, \text{ resp. } [bv] + U_2 = 0 \\
&\vdots \\
r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + U_r &= 0, \text{ resp. } [rv] + U_r = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.1.2 Podmínkové rovnice lineární

Jsou-li již původní podmínkové rovnice lineární, dostaneme přetvořené podmínkové rovnice pouhým dosazením hodnot $x_i = l_i + v_i$ do těchto rovnic a zavedením odchylek U . Stačí tedy dosadit do nich opravená měření podle (2.3), abychom dostali přetvořené podmínkové rovnice. Výsledek je takový, jako kdybychom v původní podmínkové rovnici neznámé x nahradili jejich opravami v a absolutní člen příslušnou odchylkou U .

Podmínkové rovnice musí být vzájemně nezávislé, tzn. že kterákoliv z nich se nesmí dát odvodit z ostatních algebraickým úkonem.

Počet měřených hodnot n (počet oprav v) je u podmínkových měření vždy větší než počet podmínkových rovnic r ($n > r$). Kdyby bylo $n=r$, pak v soustavě rovnic (2.6) bude tolik neznámých jako rovnic. Opravy by byly určeny jednoznačně a určování oprav vyrovnáním by odpadlo. Je-li však $n > r$, je úkolem vyrovnávacího počtu stanovit nejpravděpodobnější opravy měření tak, aby byla splněna podmínka $[pvv] = \min.$, a aby opravená měření splnila všechny podmínkové rovnice.

Je nutné si všimnout i formálního rozdílu rovnic, které tvoří základ vyrovnání měření zprostředkujících a podmínkových.

U měření podmínkových podmínkové rovnice obsahují obecně opravy všech měřených veličin. Rovnice oprav u měření zprostředkujících obsahují jen jednu opravu.

Měření zprostředkující mimo to vyžaduje, by měřené veličiny byly na sobě nezávislé. U měření podmínkových jsou měřené veličiny na sobě závislé podmínkovými rovnicemi. Rovnice podmínkové nutně musí být na sobě nezávislé, tj. nesmí se kterákoliv z nich dát odvodit z ostatních nějakým algebraickým úkonem.

2.2 Sestavení podmínkových rovnic a přetvořených podmínkových rovnic

Při sestavování podmínkových rovnic, které mohou být voleny různě, je nutno dbát na jejich správný počet a na jejich nezávislost. Z tohoto důvodu nejprve určíme počet nutných měřených veličin, které jsou zapotřebí k jednoznačnému řešení zadaného úkolu. Každá další měřená veličina je nadbytečná a umožňuje sestavení jedné podmínkové rovnice. Podmínkových rovnic je zapotřebí sestavit tolik, kolik je nadbytečných měření. Je-li měřeno n veličin a je-li počet nutných veličin k , je počet podmínkových rovnic r roven rozdílu počtu měřených a nutných veličin $r = n - k$.

2.2.1 Sestavení podmínkových rovnic (lineární závislost)

Podmínkové rovnice mohou být voleny různě. Je však třeba, aby jich byl správný počet a aby byly na sobě nezávislé. Podmínkové rovnice je možno násobit a dělit nebo logaritmovat aniž by se změnil výsledek vyrovnaní. Podmínkové rovnice se často sestavují na základě obrázku.

Příklad 1: Pro určení tvaru rovinného trojúhelníka stačí měřit dva úhly. Měříme-li všechny tři úhly, je jedno měření nadbytečné a musí být splněna jedna podmínková rovnice

$$X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ = 0$$

Dosazením naměřených hodnot l_1, l_2, l_3 do této podmínkové rovnice nebude přesně splněna, ale vznikne odchylka U . Podmínková rovnice přechází v rovnici odchylek

$$l_1 + l_2 + l_3 - 180^\circ = U$$

Vyrovnané hodnoty x_1, x_2, x_3 musí rovněž splňovat podmínkovou rovnici

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ = 0$$

Tato rovnice je lineární. Dosadíme-li $x_i = l_i + v_i$ dostaneme

$$(l_1 + l_2 + l_3) + (v_1 + v_2 + v_3) - 180^\circ = 0$$

S ohledem na rovnici odchylek platí pro přetvořenou podmínkovou rovnici

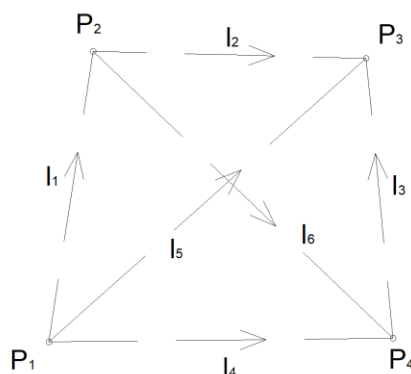
$$v_1 + v_2 + v_3 + U = 0$$

Příklad 2: V nivelační síti (viz náčrtek) stačí k určení vzájemné výškové polohy bodů P_1, P_2, P_3, P_4 tři měřené výškové rozdíly např. l_1, l_2, l_3 . Protože bylo měřeno šest výškových rozdílů, budou tři podmínkové rovnice.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_5 &= 0 \\x_5 - x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 + x_6 - x_4 &= 0\end{aligned}$$

Dosazením naměřených hodnot do těchto lineárních podmínkových rovnic dostaneme odchylky

$$\begin{aligned}l_1 + l_2 - l_5 &= U_1 \\l_5 - l_3 - l_4 &= U_2 \\l_1 + l_6 - l_4 &= U_3\end{aligned}$$



Dosazením za $x_i = l_i + v_i$ dostaneme přetvořené podmínkové rovnice

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 - v_5 + U_1 &= 0 \\v_5 - v_3 - v_4 + U_2 &= 0 \\v_1 + v_6 - v_4 + U_3 &= 0\end{aligned}$$

Podmínka uzavřeného pořadu $P_2P_3P_4$ tj., že $x_2 - x_3 - x_6 = 0$ je již obsažena v uvedených třech podmínkových rovnicích (dostaneme ji sečtením dvou prvních rovnic a od výsledku odečteme třetí rovnici). Tuto podmínku tedy nemůžeme uvažovat.

$$\text{Platí: } x_1 + x_2 - x_5 + x_5 - x_3 - x_4 - (x_1 + x_6 - x_4) = 0 \quad x_2 - x_3 - x_6 = 0$$

2.2.2 Nelineární závislost

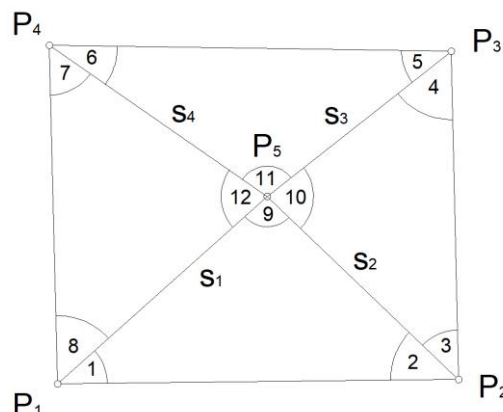
Příklad 3: V triangulační síti s centrálním bodem P_5 (viz náčrtek) bylo měřeno všech 12 úhlů. Počet nutných měření je 6 (např. 1, 2,...6). Z podmínky součtu úhlů v trojúhelníku můžeme vypočítat úhly 9, 10, 11. Úhel 12 vypočteme z podmínky uzávěru na centrálním bodě P_5 . Zvolíme-li si jednu ze stran $s_1 - s_4$ např. $s_1 = 1$, můžeme postupně vypočíst délky s_2, s_3, s_4 a také v $P_1P_4P_5$ úhly 7 a 8. Máme tedy celkem 6 nadbytečných měření. Proto je zapotřebí stanovit 6 podmínkových rovnic.

Čtyři podmínkové rovnice budou trojúhelníkové:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_9 - 180^\circ &= 0 \\x_3 + x_4 + x_{10} - 180^\circ &= 0 \\x_5 + x_6 + x_{11} - 180^\circ &= 0 \\x_7 + x_8 + x_{12} - 180^\circ &= 0\end{aligned}$$

Anulováním odchylek ve čtyřech trojúhelnících neznamená, že součet úhlů 9, 10, 11, 12 bude roven přesně 360° . Je proto zapotřebí splnit i tuto další geometrickou podmínku tzv. podmínku uzávěrovou

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} - 360^\circ = 0$$



Podmínky, že součet vyrovnaných úhlů v trojúhelnících je 180° a součet vyrovnaných úhlů na centrálním bodě je 360° ještě nestačí k splnění další geometrické podmínky: vyjdeme-li z délky jedné strany (výchozí strana), musí mít libovolná strana stejnou délku, ať ji počítáme pomocí vyrovnaných úhlů kteroukoliv cestou.

Za výchozí stranu volíme s_1 a z této strany dvojí cestou odvodíme velikost strany s_3 . Dostaneme dvě poněkud různé číselné hodnoty s'_3 a s''_3 .

$$s_3' = s_1 \frac{\sin x_1 \cdot \sin x_3}{\sin x_2 \cdot \sin x_4}$$

$$s_3'' = s_1 \frac{\sin x_8 \cdot \sin x_6}{\sin x_7 \cdot \sin x_5}$$

Chceme, aby obě číselné hodnoty délky s_3 byly stejné (s_3' a s_3'')

$$s_1 \frac{\sin x_1 \cdot \sin x_3}{\sin x_2 \cdot \sin x_4} = s_1 \frac{\sin x_8 \cdot \sin x_6}{\sin x_7 \cdot \sin x_5}$$

Úpravou dostaneme tzv. stranovou rovnici, která musí také platit:

$$\frac{\sin x_1 \cdot \sin x_3 \cdot \sin x_5 \cdot \sin x_7}{\sin x_2 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_8} = 1$$

Tato rovnice je známá také jako „obecná věta sinová“. Dosazením měřených hodnot dostaneme odchylku U_6

$$\frac{\sin l_1 \cdot \sin l_3 \cdot \sin l_5 \cdot \sin l_7}{\sin l_2 \cdot \sin l_4 \cdot \sin l_6 \cdot \sin l_8} - 1 = U_6$$

Tato stranová rovnice není lineární. Na lineární ji převedeme rozvinutím v Taylorovou řadu se zanedbáváním členů druhého a vyšších řádů. Využijeme přitom známých vztahů

$$\sin(l_i + v_i) = \sin l_i + (\cos l_i)v_i = \sin l_i \{1 + (\cotg l_i)v_i\}$$

$$\frac{1}{\sin(l_i + v_i)} = \frac{1}{\sin l_i} \{1 - (\cotg l_i)v_i\}$$

Stranovou rovnici pak dostaneme ve tvaru

$$(\cotg l_1)v_1 - (\cotg l_2)v_2 + (\cotg l_3)v_3 - (\cotg l_4)v_4 + (\cotg l_5)v_5 - (\cotg l_6)v_6 + (\cotg l_7)v_7 - (\cotg l_8)v_8 + \rho'' U_6 = 0$$

V rovnici jsme převedli odchylku U_6 z míry obloukové na úhlovou, protože chceme opravy počítat ve vteřinách.

Stranovou rovnici můžeme převést na lineární tvar také logaritmováním a použitím logaritmických diferencí.

$$\log \sin x_1 + \log \sin x_3 + \log \sin x_5 + \log \sin x_7 - \log \sin x_2 - \log \sin x_4 - \log \sin x_6 - \log \sin x_8 = 0$$

Dosadíme-li do této rovnice místo vyrovnaných úhlů měřené hodnoty, dostaneme odchylku U_6 , kterou vyjádříme v jednotkách posledního místa logaritmů použitých při výpočtech

$$\log \sin x_1 + \log \sin x_3 + \log \sin x_5 + \log \sin x_7 - \log \sin x_2 - \log \sin x_4 - \log \sin x_6 - \log \sin x_8 = U_6$$

Dosažením do předchozí rovnice hodnoty $x_i = l_i + v_i$ a uvažíme-li, že $\log(\sin l_i + v_i) = \log \sin l_i + \Delta_i v_i$ značí diferenci v logaritmických tabulkách v jednotkách posledního místa pro krok 1" (v místě logaritmu $\sin l_i$), bude mít stranová rovnice tvar

$$\Delta_1 v_1 - \Delta_2 v_2 + \Delta_3 v_3 - \Delta_4 v_4 + \Delta_5 v_5 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_8 v_8 + U_6 = 0$$

2.3 Výpočet oprav

Opravy podmínkových měření je možno počítat dvěma zcela různými způsoby:

- 1) převodem na vyrovnání měření zprostředkujících
- 2) metodou korelátovou.

2.3.1 Výpočet oprav převodem na metodu vyrovnání zprostředkujících měření

Tento způsob je jen zřídka vhodný, a proto se převážně používá metody s pomocnými koeficienty (korelátami).

2.3.2 Výpočet oprav pomocí korelát (korelátové vyrovnání)

Pro jednoduchost a názornost uvažujme (podobně jako u měření zprostředkujících) jen tři přetvořené podmínkové rovnice, ve kterých označíme prosté členy (odchyly) U_1, U_2, U_3 a váhy oprav $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + U_1 &= 0 & [av] + U_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + U_2 &= 0 & \text{neboli } [bv] + U_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n + U_3 &= 0 & [cv] + U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Opravy v musí splňovat podmínky metody vyrovnání nejmenších čtverců

$$[p v v] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 = \min. \quad (2.8)$$

a současně vedlejší podmínky vyjádřené v rovnicích (2.7).

Řešení problémů se tedy převádí na stanovení relativního extrému funkce $[p v v]$ několika proměnných s vedlejšími podmínkami obsaženými v soustavě rovnic (2.7).

Postupujeme takto:

Vynásobíme vedlejší podmínky (2.7) po řadě neurčitými Lagrangerovými koeficienty $-2k_1, -2k_2, -2k_3$ a přičteme je k $[p v v]$ a potom budeme hledat minimum funkce

$$\begin{aligned} F &= p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 - \\ &- 2k_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + U_1) - \\ &- 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + U_2) - \\ &- 2k_3(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n + U_3) \end{aligned}$$

K určení minima položíme parciální derivace podle jednotlivých proměnných (oprav) rovny nule.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v_1} &= 2p_1v_1 - 2a_1k_1 - 2b_1k_2 - 2c_1k_3 = 0 \quad / : 2 \Rightarrow v_1 \\
\frac{\partial F}{\partial v_2} &= 2p_2v_2 - 2a_2k_1 - 2b_2k_2 - 2c_2k_3 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial v_n} &= 2p_nv_n - 2a_nk_1 - 2b_nk_2 - 2c_nk_3 = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Z rovnic (2.9) dostaneme rovnice oprav

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \frac{c_1}{p_1}k_3 \\
v_2 &= \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \frac{c_2}{p_2}k_3 \\
&\vdots \\
v_n &= \frac{a_n}{p_n}k_1 + \frac{b_n}{p_n}k_2 + \frac{c_n}{p_n}k_3
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Neznámé jsou zde koreláty k_1, k_2, k_3

Do přetvořených podmínkových rovnic (2.7) za opravy $v_1, v_2 \dots v_n$ dosadíme hodnoty z rovnic (2.10) a sečteme. Po uspořádání dostaneme normální rovnice pro koreláty

$$\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + U_1 &= 0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + U_2 &= 0 \\
\left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 + U_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Normálních rovnic pro výpočet korelát je tolik, kolik je korelát. Až na absolutní člen mají normální rovnice pro výpočet korelát stejnou stavbu jako normální rovnice zprostředkujících měření. Kvadratické členy tvoří osu symetrie. Je zřejmé, že pro větší počet podmínkových rovnic než uvedené tři lze postup zcela analogicky rozšířit.

Součinitele u korelát počítáme na podkladě přetvořených podmínkových rovnic v tabulce za použití řádkových a sloupcových kontrol jako u měření zprostředkujících. Také normální rovnice pro koreláty se řeší obvykle postupnou Gaussovou eliminací neznámých korelát ve schématu postupem již dříve vysvětleným.

Při obdobném označení jako dříve bude ekvivalentní systém rovnic k soustavě (2.11)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + U_1 &= 0 \\
\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p} \cdot 1\right]k_3 + [U_2 \cdot 1] &= 0 \\
\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]k_3 + [U_3 \cdot 2] &= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Z rovnic (2.12) vypočteme neznámé koreláty

$$\begin{aligned}
k_3 &= \frac{[U_3 \cdot 2]}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} \\
k_2 &= -\frac{\left[\frac{bc}{p} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]}k_3 - \frac{[U_2 \cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} \\
k_1 &= -\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}k_2 - \frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}k_3 - \frac{U_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Známe-li hodnoty korelát, pak z rovnic (2.10) vypočteme opravy.

Vyrovnané hodnoty

$$x_1 = l_1 + v_1 \quad x_2 = l_2 + v_2 \quad \dots \quad x_n = l_n + v_n$$

Zápis rovnic i vzorců se zjednoduší zavedením reciprokých hodnot vah, které označíme q .

$$q_i = \frac{1}{p_i}$$

Rovnice oprav (2.10) budou mít tvar

$$\begin{aligned} v_1 &= q_1 a_1 k_1 + q_1 b_1 k_2 + q_1 c_1 k_3 \\ v_2 &= q_2 a_2 k_1 + q_2 b_2 k_2 + q_2 c_2 k_3 \\ &\vdots \\ v_n &= q_n a_n k_1 + q_n b_n k_2 + q_n c_n k_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Normální rovnice pro výpočet korelát budou mít tvar:

$$\begin{aligned} [qaa]k_1 + [qab]k_2 + [qac]k_3 + U_1 &= 0 \\ [qab]k_1 + [qbb]k_2 + [qbc]k_3 + U_2 &= 0 \\ [qac]k_1 + [qbc]k_2 + [qcc]k_3 + U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Uvedené vzorce snadno rozšíříme na libovolný počet podmínkových rovnic (pro libovolný počet korelát).

Při stejných vahách všech měřených veličin ($p=1$, ale i $q=1$) ve všech vzorcích vynecháme příslušné písmeno p nebo q .

2.4 Početní kontroly při korelátovém vyrovnání

2.4.1 Kontroly při sestavování a řešení normálních rovnic

Podobně jako při vyrovnání zprostředkujících měření kontrolujeme i při vyrovnání podmínkových měření průběžně správnost výpočtů řádkovými i sloupcovými součty.

2.4.2 Výpočet $[pvv]$ a jeho kontroly

V tabulce, v níž počítáme opravy, provedeme také kontrolu oprav výpočtem výrazu $[av]$, $[bv]$, ... $[rv]$, jež se nutně anulují s odchylkami U_1 , U_2 , ... U_r . Dále pak vypočteme součtový výraz $[pvv]$ – opět za použití průběžných kontrol řádkových a sloupcových. Pro ověření výrazu $[pvv]$ existují ještě dva další výrazy:

a) každou rovnici oprav v původním tvaru

$$v_i = \frac{a_i}{p_i} k_1 + \frac{b_i}{p_i} k_2 + \dots + \frac{r_i}{p_i} k_r$$

vynásobíme výrazem $p_i v_i$ Sečtením všech rovnic dostaneme

$$[pvv] = [av]k_1 + [bv]k_2 + \dots + [rv]k_r$$

Z rovnice (2.7) vyplývá $[av] = -U_1$, $[bv] = -U_2$, ... $[rv] = -U_r$, pak platí

$$[pvv] = -U_1 k_1 - U_2 k_2 - \dots - U_r k_r \text{ neboli}$$

$$[pvv] = -[Uk] \quad (2.16)$$

b) Další rovnice pro ověření výrazu ...

$$[pvv] = \frac{U_1^2}{[qaa]} + \frac{[U_2 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} + \frac{[U_3 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} + \dots + \frac{[U_r \cdot (r-1)]^2}{[qrr \cdot (r-1)]} \quad (2.17)$$

Rovnicemi (2.16 a 2.17) se kontroluje výpočet od sestavení přetvořených podmínkových rovnic až po výpočet oprav v . Nekontroluje se správnost koeficientů přetvořených podmínkových rovnic a výpočet odchylek (uzávěrů) U . Chyba ve výpočtu koeficientů přetvořených podmínkových rovnic a odchylek U se projeví teprve při závěrečné kontrole, při které dosazujeme do původních podmínkových rovnic vyrovnané veličiny $x_i = l_i + v_i$. Podmínkové rovnice musí být přesně splněny. Je-li chyba v některém z koeficientů přetvořených podmínkových rovnic nebo v odchylkách U , musíme celý výpočet opakovat. Je proto třeba pečlivě počítat (kontrolovat) koeficienty přetvořených podmínkových rovnic a odchylky U .

2.5 Charakteristiky přesnosti při vyrovnání podmínkových měření

2.5.1 Střední chyba m jednoho měření a střední chyba m_0 pro jednotkovou váhu

Veličiny, které mají splňovat dané podmínky, určujeme zpravidla z opakovaných měření. Můžeme proto před vyrovnáním počítat jejich chyby (viz vyrovnání měření přímých). Po vyrovnání vypočteme střední chybu m jednoho měření (při měřeních stejné váhy) podle vzorce

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}}$$

Mají-li měření nestejnou váhu, počítáme střední chybu m_0 pro jednotkovou váhu podle vzorce

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$$

kde r je v obou vzorcích počet nadbytečných měření (současně počet podmínkových rovnic). Střední chyby měřených veličin potom počítáme podle vzorce

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = m_0 \cdot \sqrt{q_i} \quad (2.18)$$

2.5.2 Střední chyba vyrovnaných veličin a střední chyba funkce vyrovnaných veličin

Veličina, kterou nelze měřit přímo, vypočteme jako funkci jiných měřených veličin. V přeneseném slova smyslu pak tuto funkci lze nazvat měření nepřímé. Chyby v určení přímo měřených veličin mají vliv na střední kvadratickou chybu funkce měření, kterou chceme stanovit.

Jde-li o střední kvadratickou chybu m_F nějaké dané funkce vyrovnaných veličin na příklad

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) \quad (2.19)$$

nemůžeme postupovat podle známého zákona o hromadění chyb. Z toho důvodu, že ve funkci (2.19) jsou vyrovnané veličiny x_i , které obsahují opravy v_i , které nejsou nezávislé, ale jsou závislé oklikou přes rovnici korelát a zákon o hromadění chyb popisuje hromadění chyb přímo měřených a na sobě nezávislých veličin.

Aby bylo možno použít zmíněného zákona je předem nutno vyjádřit vypočítané veličiny jako funkce nezávislých měření $l_1, l_2 \dots l_n$.

Je-li vypočtena střední chyba jednotková m_o je zapotřebí k výpočtu středních chyb vyrovnaných veličin nebo jejich funkcí určit příslušné váhy p_F nebo reciproké hodnoty vah – váhové koeficienty q_F . Odvodíme proto nejprve obecnější vzorec pro váhu funkce vyrovnaných veličin a výpočet váhy p_x či váhového koeficientu q_x vyrovnané veličiny bude pak zjednodušením tohoto obecnějšího odvození. Vyrovnané veličiny pak budou velmi jednoduchou funkcí ve tvaru $F_{(x)} = x_i$ ($i = 1, 2, \dots n$).

Za předpokladu, že měření ve funkci (2.19) poskytuje dobré sblížené hodnoty (měření je kvalitně provedeno), můžeme danou funkci rozvinout v řadu podle Taylora a omezit se pouze na členy prvního řádu, dostaneme:

$$F = F(l_1, l_2 \dots l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2} v_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial l_n} v_n \quad (2.20)$$

Označíme-li funkci měřených veličin $F(l_1, l_2, \dots l_n) = F_o$ a parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial l_i} = f_i$, změni se rovnice (2.20) na tvar

$$F = F_o + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n = F_o + [fv] \quad (2.21)$$

Mají-li měřené hodnoty po opravě (vyrovnání) splnit r – rovnic podmínkových $v_i = q_i a_i k_1 + q_i b_i k_2 + \dots + q_i c_i k_i$. $i = 1, 2, \dots n$ – viz (2.14) každou opravu v_i násobíme příslušnou derivací f_i . Všechny součiny sečteme a dosadíme do rovnice (2.21), takže:

pro 3 koreláty dostaneme:

$$F = F_o + [qaf]k_1 + [qbf]k_2 + [qcf]k_3 \quad (2.22)$$

V rovnici (2.22) vyloučíme koreláty, jelikož koreláty jsou vzájemně závislé veličiny (není tedy možné ještě stále použít zákon o hromadění chyb). K jejich eliminaci opět použijeme metody neurčitých součinitelů. Vynásobíme normální rovnice pro koreláty (2.15) po řadě zatím neurčenými koeficienty (tzv. váhovými korelátami) G_a, G_b, G_c . a přičteme je k rovnici (2.22). Vytkneme k_1, k_2, k_3 a tím upravíme rovnici, že členy s určitou korelátou budou v jednom řádku, tedy na tvar:

$$F = F_o + U_1 G_a + U_2 G_b + U_3 G_c + ([qaa]G_a + [qab]G_b + [qac]G_c + [qaf])k_1 + \\ + ([qab]G_a + [qbb]G_b + [qbc]G_c + [qbf])k_2 + \\ + ([qac]G_a + [qbc]G_b + [qcc]G_c + [qcf])k_3 \quad (2.23)$$

Nyní zvolíme pomocné součinitele tak, aby mnohočleny v okrouhlých závorkách byly nuly, čímž odpadnou koreláty k_i z funkce F . K určení pomocných součinitelů G_i máme tzv. rovnice přechodné dané anulovanými uzávorkovanými výrazy:

$$\begin{aligned} [qaa]G_a + [qab]G_b + [qac]G_c + [qaf] &= 0 \\ [qab]G_a + [qbb]G_b + [qbc]G_c + [qbf] &= 0 \\ [qac]G_a + [qbc]G_b + [qcc]G_c + [qcf] &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

V rovnicích (2.24) jsou koeficienty u neznámých váhových korelát G_a, G_b, G_c stejné jako v normálních rovnicích u korelát k_1, k_2, k_3 . Odchytky U_1, U_2, U_3 jsou nahrazeny součty součinů $[qaf], [qbf], [qcf]$. Tyto prosté členy u těchto rovnic lze také zjistit.

Řešení přechodných rovnic (2.24) lze tedy spojit s řešením normálních rovnic korelátových, početní schéma se rozšíří o sloupce obsahující absolutní součtové členy z rovnic předchozích.

Funkce vyrovnaných veličin se tedy zjednoduší na tvar:

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) = F_0 + U_a G_a + U_b G_b + U_c G_c \quad (2.25)$$

Na pravé straně této rovnice jsou jednotlivé členy funkcemi jen nezávisle měřených veličin l_i , kde

$$F_0 = F(l_1, l_2, \dots l_n)$$

$$U_a = \varphi_a(l_1, l_2, \dots l_n)$$

$$U_b = \varphi_b(l_1, l_2, \dots l_n)$$

$$U_c = \varphi_c(l_1, l_2, \dots l_n)$$

Rovnice (2.25) je funkce vyrovnaných veličin převedena na funkci přímých měření $l_1, l_2, \dots l_n$ a její střední chybu je možno stanovit podle zákona o hromadění chyb.

$$\begin{aligned} m_F^2 = & \left(\frac{\partial F}{\partial l_1} + \frac{\partial U_a}{\partial l_1} G_a + \frac{\partial U_b}{\partial l_1} G_b + \frac{\partial U_c}{\partial l_1} G_c \right)^2 m_1^2 + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2} + \frac{\partial U_a}{\partial l_2} G_a + \frac{\partial U_b}{\partial l_2} G_b + \frac{\partial U_c}{\partial l_2} G_c \right)^2 m_2^2 + \\ & \vdots \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n} + \frac{\partial U_a}{\partial l_n} G_a + \frac{\partial U_b}{\partial l_n} G_b + \frac{\partial U_c}{\partial l_n} G_c \right)^2 m_n^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

V rovnici (2.26) uvedené parciální derivace jsme již dříve označili jednoduchými symboly:

$$\frac{\partial F}{\partial l_i} = f_i; \quad \frac{\partial U_a}{\partial l_i} = a_i; \quad \frac{\partial U_b}{\partial l_i} = b_i; \quad \frac{\partial U_c}{\partial l_i} = c_i.$$

Výrazy v závorkách v rovnici (2.26) potom můžeme označit symbolem F_i :

$$f_i + a_i G_a + b_i G_b + c_i G_c = F_i \quad (2.27)$$

Rovnici (2.26) můžeme psát:

$$m_F^2 = F_1^2 m_1^2 + F_2^2 m_2^2 + \dots F_n^2 m_n^2$$

místo středních chyb m_i zavedeme střední chybu m_o pro jednotkovou váhu:

$$m_i^2 = \frac{m_o^2}{p_i} = q_i m_o^2.$$

Potom bude platit:

$$m_F^2 = m_o^2 (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2 + \dots + q_n F_n^2) = m_o^2 [qFF], \quad (2.28)$$

symbol $[qFF] = (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2 + \dots + q_n F_n^2)$ je reciprokou hodnotu váhy Q_F . funkce měřených veličin $Q_F = [qFF]$ (2.29)

K určení Q_F dosadíme do rovnice (2.29) vztahy (2.27), umocníme na druhou a sečteme. Po uspořádání (výrazy obsahující kvadratické členy uspořádáme na příčce, dvojnásobné součiny rozdělíme na dva sčítance, které umístíme ve dvou řádcích k příčce)

$$\begin{aligned}
[qFF] = [qff] &+ [gaf]G_a + [gbf]G_b + [gcf]G_c + \\
&+ ([qaa]G_a + [qab]G_b + [qac]G_c + [qaf])G_a + \\
&+ ([qab]G_a + [qbb]G_b + [qbc]G_c + [qbf])G_b + \\
&+ ([qac]G_a + [qbc]G_b + [qcc]G_c + [qcf])G_c
\end{aligned}$$

Mnohočleny v kulatých závorkách – viz rovnice (2.24) jsou rovny nule a proto je :

$$Q_F = [qFF] = [gff] + [gaf]G_a + [gbf]G_b + [gcf]G_c \quad (2.30)$$

Pro číselné určení reciproké váhy Q_F funkce F je zapotřebí vypočítat váhové koreláty G_a, G_b, G_c . Z rovnic (2.24) a dosadit do rovnice (2.30)

Toto se však zpravidla neděje. Rovnice (2.24) pro váhové koreláty mají stejné koeficienty u neznámých jak normální rovnice pro koreláty k_i , můžeme ve schématu pro řešení normálních rovnic pro koreláty přidat další sloupec, do kterého připsíme vždy příslušný prostý člen $[gaf]$, $[gbf]$, $[gcf]$ a tyto členy redukuje současně s redukcí normálních rovnic pro koreláty.

Potom platí

$$\begin{aligned}
G_c &= -\frac{[qcf.2]}{[qcf.2]} \\
G_b &= -\frac{1}{[qbb.1]}([qbc.1]G_c + [qbf.1]) \\
G_a &= -\frac{1}{[qaa]}([qab]G_b + [qac]G_c + [qaf])
\end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do předchozí rovnice (2.30) po úpravě dostaneme vzorec:

$$Q_F = [qFF] = [qff] - \frac{[qaf]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf.1]^2}{[qbb.1]} - \frac{[gcf.2]^2}{[gcf.2]} = [gff.3] \quad (2.31)$$

Obecně lze psát (pro r podmínkových rovnic):

$$Q_F = [qff.r] \quad (2.32)$$

vzorec (2.31) je výhodnější než vzorec (2.30)

Všechny výrazy potřebné do vzorce (2.31) získáme při společné redukcí normálních rovnic korelátových a absolutních členů rovnic přechodních.

Podle tohoto vzorce se první člen $[qff]$ tolikrát redukuje kolik je podmínkových rovnic. Protože redukční členy jsou vždy kladné (v čitateli jsou druhé mocniny hodnot, ve jmenovateli kladné tzv. kvadratické členy) bude obecně reciproká váha Q_F klesat s počtem podmínkových rovnic (nadbytečných měření). Řečeno jinak: váha vyrovnaných veličin a jejich funkcí roste s počtem nadbytečných měření.

Střední chyba funkce vyrovnaných hodnot je:

$$m_F = m_o \sqrt{Q_F} = m_o \sqrt{[qff.r]} \quad (2.33)$$

Střední chyba vyrovnaných veličin $x_i = l_i + v_i$ se určí jako střední chyba jednoduché funkce $F = F_{(x_i)} = l_i + v_i$.

$$\text{Střední chyba vyrovnané veličiny } x_i \text{ se vypočte ze vzorce } m_i = m_o \sqrt{Q_i} \quad (2.34)$$

2.6 Postup při vyrovnání podmínkových měření pomocí korelát (pro 3 podmínkové rovnice při nestejných vahách měřených veličin)

Mají-li všechny měření stejnou váhu $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, pak ve všech rovnicích a vzorcích vynecháme všechny symboly p_i (respektive q_i)

Při vyrovnání podmínkových měření je zapotřebí dodržet následující postup: shodně s dřívějším testem označme:

$l_1, l_2 \dots l_n$ naměřené hodnoty veličin,

$p_1, p_2 \dots p_n$ váhy naměřených veličin,

$v_1, v_2 \dots v_n$ opravy naměřených veličin,

$x_1, x_2 \dots x_n$ opravné (vyrovnané) hodnoty veličin.

- 1) Určíme počet podmínkových rovnic a vhodně je sestavíme. Za tímto účelem zjistíme počet k nezbytně nutných měření pro jednoznačné řešení dané úlohy. Každé další, tedy již nadbytečné měření vyžaduje, aby byla splněna jedna podmínková rovnice.

Počet nadbytečných měření $(n-k)$ udává počet podmínkových rovnic $r = (n-k)$

Upozornění: Podmínkové rovnice, které tvoří základ vyrovnání, mohou být voleny různě podle okolností. Při jejich sestavování je však nutno bezpodmínečně dbát na to, aby podmínkové rovnice byly na sobě navzájem úplně nezávislé (koreláta odpovídající závislé rovnici pak vychází jako neurčitý výraz)

Na rozdíl od rovnic měření zprostředkujících lze podmínkové rovnice násobit, dělit, logaritmovat aniž se změní výsledek vyrovnání. Je to tím, že podmínková závislost mění jen vnější tvar, v podstatě však zůstává stejná.

- 2) Vypočteme odchylky U dosazením měřených hodnot l_i do podmínkových rovnic.

- 3) Vypočteme koeficienty přetvořených podmínkových rovnic.

$$\left(a_i = \frac{\partial f_a}{\partial l_i}; b_i = \frac{\partial f_b}{\partial l_i}; \dots; r_i = \frac{\partial f_r}{\partial l_i} \right)$$

- 4) Sestavíme tabulku, do níž se zapíše pořadové číslo, koeficienty přetvořených podmínkových rovnic a_i, b_i, \dots, r_i , řádkové kontrolní součty $S_i = a_i + b_i + c_i + \dots + r_i$. V případě výpočtu střední chyby funkce vyrovnaných veličin i parciální derivace f_i , dané funkce F . A také váhy p_i , respektive jejich reciproké hodnoty q_i – viz následující číselné příklady.

- 5) Vypočteme koeficienty normálních rovnic $[qaa], [qab], [qac]$ a jejich správnost zkontrolujeme $[qaa] + [qab] + \dots + [qar] = [qas]$ atd.

- 6) Vypočtené hodnoty zapíšeme do schématu pro řešení normálních rovnic a tyto rovnice redukuje Gaussovým algoritmem ve výpočetním schématu.

- 7) Vypočteme koreláty k_a, k_b, k_c a jejich výpočet zkontrolujeme.

- 8) Vypočteme opravy v ($v_i = q_i(a_i k_a + b_i k_b + c_i k_c)$) a zkontrolujeme je výrazem $[av] + U_a = 0$

- 9) Vypočteme $[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2$ a zkontroluje se vztahy

$$[pvv] = -U_a k_a - U_b k_b - U_c k_c = -[Uk]$$

$$[pvv] = \frac{U_a^2}{[qaa]} + \frac{[U_b \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} + \frac{[U_c \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]}$$

10) Vypočteme vyrovnané hodnoty veličin $x_i = l_i + v_i$. Jejich správnost zkontrolujeme dosazením do původních podmínkových rovnic.

11) Vypočteme střední chybu m_0 pro jednotkovou váhu měřené veličiny $m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$.

12) Střední chyby neopravených měřených veličin l_i (před vyrovnaním) zjistíme ze vzorce

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = m_0 \sqrt{q_i}.$$

13) Střední chyba funkce vyrovnaných veličin (případě že je třeba počítat)

$$m_F = m_0 \sqrt{Q_F}, \text{ kde } Q_F \text{ (reciproká hodnota váhy)} = [qff. 3]$$

14) Střední chyba jednotlivého vyrovnaného měření $x_i = l_i + v_i$ se vypočte jako zvláštní případ funkce vyrovnaných měření $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$. Pro přechodní rovnice je jediná parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial l_i} = 1$. Ostatní derivace jsou nuly.

Stejně jako v případě kapitoly vyrovnaní měření zprostředkujících i pro vyrovnaní měření podmínkových máme tři typické úlohy. Vyrovnaní měření stejné přesnosti (bez vah měření); vyrovnaní měření nestejné přesnosti (s váhami měření) a vyrovnaní při nelineární závislosti rovnic oprav či podmínkových rovnic. Jak již bylo zmíněno výše, v případě měření stejné přesnosti vypadnou ze vzorců hodnoty p_i , resp. q_i , takže úloha vyrovnaní stejné přesnosti nebude řešena, protože postup je shodný s úlohou vyrovnaní nestejné přesnosti, kde váhy měření jsou všude 1.

Číselný příklad 2.1 Lineární závislost podmínkových rovnic s vahami měření.

Zadání: Vyrovnajte nivelační síť pomocí podmínkových měření, bylo-li měřeno převýšení mezi jednotlivými značkami podle uvedeného obrázku (schématu). Zjistěte střední chybu úseku P3-P7 a úseku P3-P4-P5-P7. Šipky udávají spádové poměry terénu.

$$l_1 = 4,948 \text{ m} \quad l_7 = 11,230 \text{ m}$$

$$l_2 = 23,894 \text{ m} \quad l_8 = 23,260 \text{ m}$$

$$l_3 = 28,837 \text{ m} \quad l_9 = 37,682 \text{ m}$$

$$l_4 = 11,820 \text{ m} \quad l_{10} = 20,287 \text{ m}$$

$$l_5 = 12,652 \text{ m} \quad l_{11} = 11,425 \text{ m}$$

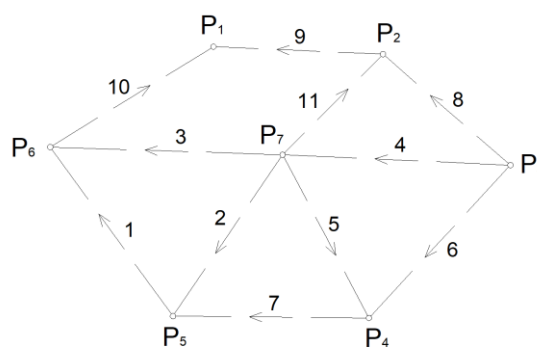
$$l_6 = 24,470 \text{ m}$$

$$s_1 = 42 \text{ km} \quad s_2 = 36 \text{ km} \quad s_3 = 25 \text{ km}$$

$$s_4 = 42 \text{ km} \quad s_5 = 23 \text{ km} \quad s_6 = 37 \text{ km}$$

$$s_7 = 38 \text{ km} \quad s_8 = 42 \text{ km} \quad s_9 = 19 \text{ km}$$

$$s_{10} = 31 \text{ km} \quad s_{11} = 35 \text{ km}$$



Vypracování: Podmínkové rovnice jsou stanoveny podmínkou, že součet výškových rozdílů (převýšení mezi jednotlivými body) měřených po obvodu uzavřeného obrazce je roven nule.

K jednoznačnému stanovení výškových kót všech bodů je zapotřebí změřit 6 výškových rozdílů (známe-li výškovou kótu bodu P7 například výškové rozdílů 3, 2, 5, 4, 11 a 9 nebo 10). Protože bylo měřeno celkem 11 výškových rozdílů, je pět nadbytečných. Je možno sestavit tedy pět vzájemně nezávislých podmínkových rovnic. Stanovíme je tak, že jednotlivé obrazce objíždíme v kladném směru a bereme výškové rozdílů se šipkami, jež jsou stejného směru do podmínkových rovnic se znaménkem kladným, výškové rozdílů se šipkami protisměrnými se znaménkem záporným.

Podmínkové rovnice:

$$x_5 + x_7 - x_2 = 0$$

$$x_6 - x_5 - x_4 = 0$$

$$x_3 + x_{10} - x_9 - x_{11} = 0$$

$$x_1 - x_3 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_{10} - x_9 - x_8 + x_6 + x_7 = 0$$

Dosazením měřených hodnot do podmínkových rovnic dostaneme rovnice odchylek.

$$x_5 + x_7 - x_2 = U_1 = -0,012 \text{ m}$$

$$x_6 - x_5 - x_4 = U_2 = -0,002 \text{ m}$$

$$x_3 + x_{10} - x_9 - x_{11} = U_3 = +0,017 \text{ m}$$

$$x_1 - x_3 + x_2 = U_4 = +0,005 \text{ m}$$

$$x_1 + x_{10} - x_9 - x_8 + x_6 + x_7 = U_5 = -0,007 \text{ m}$$

Odchyly $U_1 - U_5$ z praktických důvodů v mm.

$$U_1 = -12 \text{ mm}, U_2 = -2 \text{ mm}, U_3 = +17 \text{ mm}, U_4 = +5 \text{ mm}, U_5 = -7 \text{ mm}$$

Přetvořené podmínkové rovnice jsou:

$$v_5 + v_7 - v_2 - 12 = 0$$

$$v_6 - v_5 - v_4 - 2 = 0$$

$$v_3 + v_{10} - v_9 - v_{11} + 17 = 0$$

$$v_1 - v_3 + v_2 + 5 = 0$$

$$v_1 + v_{10} - v_9 - v_8 + v_6 + v_7 - 7 = 0$$

Pro výpočet středních chyb úseku P7-P3 volíme funkci $F_1 = x_4$.

Pro výpočet střední chyby úseku P7-P5-P4-P3 volíme funkci $F_2 = x_6 + x_7 - x_2$

i	q=1/p	a	b	c	d	e	s	f ₁	f ₂	qaa	qab	qac	qad	qae	qas	qaf ₁	qaf ₂	qbb	qbc	qbd	qbe	qbs	qbf ₁	qbf ₂
1	42				+1	+1	-2																	
2	36	-1			+1		+0		-1	+36			-36				+36							
3	25			+1	-1		+0																	
4	42		-1				+1	+1										+42				-42	-42	
5	23	+1	-1				+0			+23	-23							+23						
6	37		+1			+1	-2		+1									+37			+37	-74		+37
7	38	+1				+1	-2		+1	+38				+38	-76		+38							
8	42					-1	+1																	
9	19			-1		-1	+2																	
10	31			+1		+1	-2																	
11	35			-1			+1																	
Σ		+1	-1	0	+1	+2	-3	+1	+1	+97	-23	0	-36	+38	-76	0	+74	+102	0	0	+37	-116	-42	+37

pokračování...

i	qcc	qcd	qce	qcs	qcf ₁	qcf ₂	qdd	qde	qds	qdf ₁	qdf ₂	qee	qes	qef ₁	qef ₂	qss	qf ₁ f ₁	qf ₂ f ₂
1							+42	+42	-84			+42	-84			+168		
2							+36				-36							+36
3	+25	-25					+25											
4																+42	+42	
5																		
6												+37	-74		+37	+148		+37
7												+38	-76		+38	+152		+38
8												+42	-42			+42		
9	+19		+19	-38								+19	-38			+76		
10	+31		+31	-62								+31	-62			+124		
11	+35			-35												+35		
Σ	+110	-25	+50	-135	0	0	+103	+42	-84	0	-36	+209	-376	0	+75	+787	+42	+111

Kontroly správného výpočtu součinitelů normálních rovnic:

Má být:

Je:

$$[a] + [b] + [c] + [d] + [e] + [s] = 0$$

$$1 - 1 + 1 + 2 - 3 = 0$$

$$[qaa] + [qab] + [qac] + [qad] + [qae] + [qas] = 0$$

$$97 - 23 - 36 + 38 - 76 = 0$$

$$[qab] + [qbb] + [qbc] + [qbd] + [qbe] + [qbs] = 0$$

$$-23 + 102 + 37 - 116 = 0$$

$$[qac] + [qbc] + [qcc] + [qcd] + [qce] + [qcs] = 0$$

$$110 - 25 + 50 - 135 = 0$$

$$[qad] + [qbd] + [qcd] + [qdd] + [qde] + [qds] = 0$$

$$-36 - 25 + 103 + 42 - 84 = 0$$

$$[qae] + [qbe] + [qce] + [qde] + [qee] + [qes] = 0$$

$$38 - 37 + 50 + 42 + 209 - 376 = 0$$

$$[qas] + [qbs] + [qcs] + [qds] + [qes] + [qss] = 0$$

$$-76 - 116 - 135 - 84 - 376 + 787 = 0$$

Kontroly souhlasí přesně.

Tvar normálních rovnic pro výpočet korelát:

$$97k_1 - 23k_2 + 0k_3 - 36k_4 + 38k_5 - 12 = 0$$

$$-23k_1 + 102k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 37k_5 - 2 = 0$$

$$0k_1 + 0k_2 + 110k_3 - 25k_4 + 50k_5 + 17 = 0$$

$$-36k_1 + 0k_2 - 25k_3 + 103k_4 + 42k_5 + 5 = 0$$

$$+38k_1 + 37k_2 + 50k_3 + 42k_4 + 209k_5 - 7 = 0$$

$$76k_1 + 116k_2 + 135k_3 + 84k_4 + 376k_5 + 1 = 0 \quad \text{součtová rovnice}$$

Výpočet neznámých korelát provedeme v tabulce Gaussovou eliminací – viz tabulka

Normální rovnice	a]k ₁	b]k ₂	c]k ₃	d]k ₄	e]k ₅	u	σ	Δ	f ₁	σ'	Δ'	f ₂	σ''	Δ''
[qa	+97,000	-23,000	0,000	-36,000	+38,000	-12,000	-64,000			-76,000		+74,000	-150,000	
[qb +0,2371		+102,000 -5,454	0,000 0,000	0,000 -8,536	+37,000 +9,010	-2,000 -2,845	-114,000 -15,175		-42,000	-74,000 -18,021		+37,000 +17,545	-153,000 -35,566	
[qc 0,0000			+110,000	-25,000	+50,000	+17,000	-152,000			-135,000			-135,000	
[qd +0,3711				+103,000 -13,361	+42,000 +14,103	+5,000 -4,454	-89,000 +23,753			-84,000 -28,206		-36,000 +27,464	-48,000 -55,670	
[qe -0,3917					+209,000 -14,887	-7,000 +4,701	-369,000 -25,072			-376,000 +29,773		+75,000 -28,990	-451,000 +58,763	
[qf ₁	[qf ₂	0,0000	-0,7629						+42,000			+111,000 -56,454		

pokračování...

1. redukce			b.1]k ₂	c.1]k ₃	d.1]k ₄	e.1]k ₅	U.1	σ.1	Δ.1	f _{1.1}	σ'.1	Δ'.1	f _{2.1}	σ''.1	Δ''.1
[qb			+96,546	0,000	-8,536	+46,010	-4,845	-129,175		-42,000	-92,021		+54,545	-188,566	
[qc 0,0000				+110,000	-25,000	+50,000	+17,000	-152,000			-135,000		0,000	-135,000	
[qd +0,0884					+89,639 -0,755	+56,103 +4,068	+0,546 -0,428	-112,753 -11,421		-3,713	-112,206 -8,136		-8,536 +4,823	-103,670 -16,672	
[qe -0,4765						+194,113 -21,927	-2,299 +2,309	-343,928 +61,560			-346,227 +43,853		+46,010 -25,994	-392,237 +89,863	
[qf ₁	[qf ₂	+0,4350	-0,5650							+42,000 -18,271			+54,546 -30,816		
2. redukce				c.2]k ₃	d.2]k ₄	e.2]k ₅	U.2	σ.2	Δ.2	f _{1.2}	σ'.2	Δ'.2	f _{2.2}	σ''.2	Δ''.2
[qc				+110,000	-25,000	+50,000	+17,000	-152,000			-135,000			-135,000	
[qd +0,2273					+88,884 -5,682	+60,171 +11,364	+0,118 +3,864	-124,174 -34,545		-3,713	-120,342 -30,682		-3,713	-120,342 -30,682	
[qe -0,4545						+172,187 -22,727	+0,010 -7,727	-282,368 +69,091		+20,016	-302,373 +61,364		+20,016	-302,374 +61,364	
[qf ₁	[qf ₂	0,000	0,000							+23,729			+23,730		
3. redukce					d.3]k ₄	e.3]k ₅	U.3	σ.3	Δ.3	f _{1.3}	σ'.3	Δ'.3	f _{2.3}	σ''.3	Δ''.3
[qd					+83,203	+71,535	+3,982	-158,719		-3,713	-151,024		-3,713	-151,024	
[qe -0,8597						+149,459 -61,503	-7,717 -3,423	-213,277 +136,461		+20,016 +3,193	-241,010 +129,845		+20,016 +3,193	-241,010 +129,845	
[qf ₁	[qf ₂	+0,0446	+0,0446							+23,729 -0,166			+23,730 -0,166		
4. redukce						e.4]k ₅	U.4	σ.4	Δ.4	f _{1.4}	σ'.4	Δ'.4	f _{2.4}	σ''.4	Δ''.4
[qe						+87,956	-11,140	-76,816		23,208	-111,520		23,209	-111,521	
[qf ₁	[qf ₂	-0,2639	-0,2639							+23,563 -6,217			+23,564 -6,218		
5. redukce										f _{1.5}	σ'.5	Δ'.5	f _{2.5}	σ''.5	Δ''.5
[qf ₁	[qf ₂									+17,346			+17,347		

Výpočet korelát:

$$87,956k_5 - 11,140 = 0$$

$$k_5 = \frac{11,140}{87,956} = +0,12666$$

$$83,203k_4 + 71,535k_5 + 3,982 = 0$$

$$k_4 = \frac{-13,0042}{83,203} = -0,15675$$

$$83,203k_4 + 9,060 + 3,982 = 0$$

$$110,000k_3 - 25,000k_4 + 50,000k_5 + 17,000 = 0$$

$$k_3 = \frac{-27,252}{110,000} = -0,24774$$

$$110,000k_3 + 3,919 + 6,333 + 17,000 = 0$$

$$96,546k_2 - 0,000k_3 - 8,536k_4 + 46,010k_5 - 4,845 = 0$$

$$k_2 = \frac{-2,321}{96,546} = -0,02403$$

$$96,546k_2 - 0 + 1,338 + 5,828 - 4,845 = 0$$

$$97k_1 - 23k_2 + 0k_3 - 36k_4 + 38k_5 - 12 = 0$$

$$k_1 = \frac{0,991}{97} = 0,01022$$

$$97k_1 + 0,553 + 0 + 5,643 + 4,813 - 12,000 = 0$$

Kontrola vypočtených korelát součtovou rovnicí:

$$76k_1 + 116k_2 + 135k_3 + 84k_4 + 376k_5 + 1 = 0$$

$$+0,7766 - 2,7878 - 33,4452 - 13,1671 + 47,6235 + 1,0000 = 0$$

Kontrola souhlasí.

Výpočet oprav a jejich kontrola

i	q	a	b	c	d	e	qak ₁	qbk ₂	qck ₃	qdk ₄	qek ₅	v	av	bv	cv	dv	ev	pvv
1	42				+1	+1				-6,5835	+5,3196	-1,2639				-1,2639	-1,2639	+0,0380
2	36	-1			+1		-0,3679			-5,6430		-6,0109	+6,0109			-6,0109		+1,0036
3	25			+1	-1				-6,1936	+3,9188		-2,2748			-2,2748	+2,2748		+0,2070
4	42		-1					+1,0094				+1,0094		-1,0094				+0,0243
5	23	+1	-1				+0,2350	+0,5527				+0,7878	+0,7878	-0,7878				+0,0270
6	37		+1			+1		-0,8892			+4,6864	+3,7971		+3,7971			+3,7971	+0,3897
7	38	+1				+1	+0,3883				+4,8130	+5,2013	+5,2013				+5,2013	+0,7119
8	42				-1						-5,3196	-5,3196					+5,3196	+0,6738
9	19		-1		-1				+4,7071		-2,4065	+2,3006			-2,3006		-2,3006	+0,2786
10	31		+1		+1				-7,6800		+3,9264	-3,7536			-3,7536		-3,7536	+0,4545
11	35		-1						+8,6710			+8,6710			-8,6710			+2,1482
Σ		+1	-1	0	+1	+2	+0,2555	+0,6729	-0,4955	-8,3078	+11,0193	+3,1444	+12,0000	+2,0000	-17,0000	-5,0000	+7,0000	+5,9565

Kontrola správnosti výpočtu:

Vypočtené opravy musí vyhovovat přetvořeným podmínkovým rovnicím.

Má být: $[av] + U_1 = 0$, $[bv] + U_2 = 0$, $[cv] + U_3 = 0$, $[dv] + U_4 = 0$, $[ev] + U_5 = 0$

Je: $[av] + U_1 = 0$, $[bv] + U_2 = 0$, $[cv] + U_3 = 0$, $[dv] + U_4 = 0$, $[ev] + U_5 = 0$

$$[qak_1] + [qbk_2] + [qck_3] + [qdk_4] + [qek_5] = [v]$$

Tato součtová kontrola je splněna přesně ($3,1444 = 3,1444$) – viz tabulka výpočtu oprav.

Kontrola součtu [pvv]:

a) součtem: $-[U_k]$

$$\begin{aligned} -U_1 k_1 &= -12 \cdot 0,01022 = -0,1226 \\ -U_2 k_2 &= -2 \cdot (-0,02403) = +0,0481 \\ -U_3 k_3 &= +17 \cdot (-0,24774) = -4,2116 \\ -U_4 k_4 &= +5 \cdot (-0,15675) = -0,7838 \\ -U_5 k_5 &= -7 \cdot 0,12666 = -0,8866 \\ -[U_k] &= -5,9565 \end{aligned}$$

b) výrazem

$$\begin{aligned} [pvv] &= \frac{U_1^2}{[qaa]} + \frac{[U_2 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} + \frac{[U_3 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} + \frac{[U_4 \cdot 3]^2}{[qdd \cdot 3]} + \frac{[U_5 \cdot 4]^2}{[qee \cdot 4]} = \\ &= \frac{12^2}{97} + \frac{-4,845^2}{96,546} + \frac{17^2}{110} + \frac{3,982^2}{83,203} + \frac{-11,140^2}{87,956} = \\ &= 1,4845 + 0,2432 + 2,6273 + 0,1905 + 1,4110 = 5,9565 \end{aligned}$$

Obě kontroly souhlasí s přímo vypracovaným součtem [pvv] v tabulce.

Výpočet středních chyb vyrovnaných hodnot a středních chyb funkce vyrovnaných hodnot. Střední chyba jednotky váhy (střední chyba jednotková)

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{5,9565}{5}} = \pm 1,09 \text{ mm}$$

Střední chyba vyrovnaných veličin (x_4)

$$F_1 = x_4$$

$$m_{F_1} = m_o \sqrt{Q_{F_1}} = m_o \sqrt{[qff \cdot 5]} = \pm 1,09 \text{ mm} \cdot \sqrt{17,346} = \pm 4,54 \text{ mm}$$

nebo podle vzorce (2.33)

$$m_{F_1} = m_o \sqrt{Q_{F_1}}$$

$$Q_{F_1} = [qf_1 f_1] - \frac{[qaf_1]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf_1 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} - \frac{[qcf_1 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} - \frac{[qdf_1 \cdot 3]^2}{[qdd \cdot 3]} - \frac{[qef_1 \cdot 4]^2}{[qee \cdot 4]}$$

$$Q_{F_1} = 42,000 - \frac{0^2}{97} - \frac{-42^2}{96,546} - \frac{0^2}{110} - \frac{-3,713^2}{83,203} - \frac{23,208^2}{87,956}$$

$$Q_{F_1} = 42,000 - 0,000 - 18,271 - 0,000 - 0,166 - 6,124 = 17,439$$

$$m_{F_1} = m_o \cdot \sqrt{Q_{F_1}} = \pm 1,09 \text{ mm} \cdot \sqrt{17,439} = \pm 4,55 \text{ mm}$$

Střední chyba funkce vyrovnaných hodnot $F_2 = x_6 + x_7 - x_2$

$$m_{F_2} = m_o \cdot \sqrt{Q_{F_2}} = m_o \cdot \sqrt{[qff \cdot 5]} = 1,09 \text{ mm} \cdot \sqrt{17,347} = \pm 4,54 \text{ mm}$$

nebo opět podle vzorce (2.33) $m_{F_2} = m_o \cdot \sqrt{Q_{F_2}}$.

$$Q_{F_2} = [qf_2 f_2] - \frac{[qaf_2]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf_2 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} - \frac{[qcf_2 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} - \frac{[qdf_2 \cdot 3]^2}{[qdd \cdot 3]} - \frac{[qef_2 \cdot 4]^2}{[qee \cdot 4]}$$

$$Q_{F_2} = 111,000 - \frac{74^2}{97} - \frac{54,545^2}{96,546} - \frac{0^2}{110} - \frac{3,713^2}{83,203} - \frac{23,209^2}{87,956}$$

$$Q_{F_2} = 111,000 - 56,454 - 30,816 - 0 - 0,166 - 6,124 = 17,440$$

$$m_{F_2} = m_o \cdot \sqrt{Q_{F_2}} = \pm 1,09 \text{ mm} \cdot \sqrt{17,440} = \pm 4,55 \text{ mm}$$

Kontroly střední chyby měřených veličin m_{F_1} a střední chyby funkce měř. veličin m_{F_2} . souhlasí.

Výpočet vyrovnaných veličin: $x_i = l_i + v_i$

$$x_1 = l_1 + v_1 = 4,948 \text{ m} - 1,3 \text{ mm} = 4,9467 \text{ m}$$

$$x_2 = l_2 + v_2 = 23,894 \text{ m} - 6,0 \text{ mm} = 23,8880 \text{ m}$$

$$x_3 = l_3 + v_3 = 28,837 \text{ m} - 2,3 \text{ mm} = 28,8347 \text{ m}$$

$$x_4 = l_4 + v_4 = 11,820 \text{ m} + 1,0 \text{ mm} = 11,8210 \text{ m}$$

$$x_5 = l_5 + v_5 = 12,625 \text{ m} + 0,8 \text{ mm} = 12,6528 \text{ m}$$

$$x_6 = l_6 + v_6 = 24,470 + 3,8 \text{ mm} = 24,4738 \text{ m}$$

$$x_7 = l_7 + v_7 = 11,230 \text{ m} + 5,2 \text{ mm} = 11,2352 \text{ m}$$

$$x_8 = l_8 + v_8 = 23,260 \text{ m} - 5,3 \text{ mm} = 23,2547 \text{ m}$$

$$x_9 = l_9 + v_9 = 37,682 \text{ m} + 2,3 \text{ mm} = 37,6843 \text{ m}$$

$$x_{10} = l_{10} + v_{10} = 20,287 \text{ m} - 3,8 \text{ mm} = 20,2832 \text{ m}$$

$$x_{11} = l_{11} + v_{11} = 11,425 \text{ m} + 8,7 \text{ mm} = 11,4337 \text{ m}$$

Ostrá zkouška správnosti celého výpočtu (dosazením do původních podmínkových rovnic).

$$x_5 + x_7 - x_2 = 12,6528 + 11,2352 - 23,8880 = 0,0000$$

$$x_6 - x_5 - x_4 = 24,4738 - 12,6528 - 11,8210 = 0,0000$$

$$x_3 + x_{10} - x_9 - x_{11} = 28,8347 + 20,2832 - 37,6843 - 11,4337 = -0,0001$$

$$x_1 - x_3 + x_2 = 4,9467 - 28,8347 + 23,8880 = 0,0000$$

$$x_3 + x_{10} - x_9 - x_8 + x_6 + x_7 = 4,9467 + 20,2832 - 37,6843 - 23,2547 + 24,4738 + 11,2352 = -0,0001$$

Vyrovnané hodnoty vyhovují podmínkovým rovnicím.

Číselný příklad 2.2: Nelineární závislost podmínkových rovnic

Zadání: V základnovém čtyřúhelníku (triangulační síti) byly měřeny na každém stanovišti 3 úhly (2 vnitřní a jeden vnější). Měřené úhly byly vyrovnaný na každém stanovišti na 360. Určete nejpravděpodobnější hodnoty.

$$\omega_1 = 8^\circ 24' 55'' \quad P_1 = 4$$

$$\omega_2 = 9^\circ 29' 56'' \quad P_2 = 4$$

$$\omega_3 = 79^\circ 58' 13'' \quad P_3 = 1$$

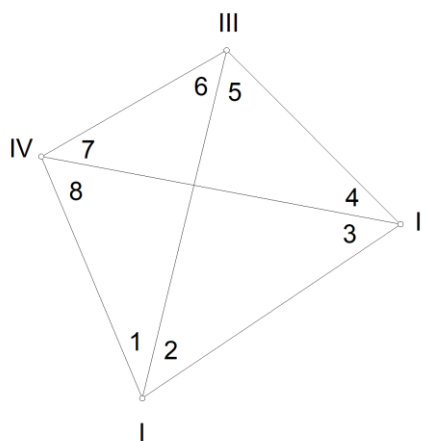
$$\omega_4 = 81^\circ 00' 19'' \quad P_4 = 1$$

$$\omega_5 = 9^\circ 31' 22'' \quad P_5 = 4$$

$$\omega_6 = 8^\circ 23' 16'' \quad P_6 = 4$$

$$\omega_7 = 81^\circ 04' 51'' \quad P_7 = 1$$

$$\omega_8 = 82^\circ 07' 02'' \quad P_8 = 1$$



Vypracování: Počet a druhy podmínkových rovnic při úhlovém vyrovnání triangulačních sítí.

Počet oprav je dán počtem měřených úhlů v dané síti. Počet podmínkových rovnic je dán počtem nadbytečných měření tj. rozdílem počtu nutných (potřebných) měření pro jednoznačné určení polohy bodů a počtem měření skutečně provedených. Pro každé nadbytečné měření musí být splněna jedna podmínková rovnice.

V triangulační síti, kde je celkový počet bodů p a v níž známe délku a polohu (tj. souřadnice dvou krajních bodů, nebo souřadnice jednoho krajního bodu, délku a směrnik) základny je k určení polohy každého bodu zapotřebí dvou úhlů, tedy celkem $2(p-2)$ úhlů. Je-li počet všech úhlů měřených v síti u je počet nadbytečných měření a tím i počet podmínkových rovnic v síti

$$r = u - 2(p - 2) = u - 2p + 4$$

Podmínkové rovnice jsou dvojího druhu:

- úhlové v počtu r_1
- stranové v počtu r_2

Ad a) úhlové rovnice můžeme rozdělit na: a. obrazcové v počtu r'_1

b. úhlového uzávěru r''_1

Ad a. Nejjednodušším a při vyrovnání sítí nejvíce užívaným obrazem je trojúhelník, proto se často používá označení trojúhelníkové rovnice ve stejném smyslu jako rovnice obrazové.

Počet obrazových rovnic: $r'_1 = l_1 - p_1 + 1$,

kde l_1 = počet stran sítě, které byly oboustranně zaměřeny (z obou koncových bodů),

p_1 = počet bodů sítě, na nichž byly měřeny úhly.

Ad b. Počet rovnic úhlového uzávěru r''_1 je dán počtem tzv. centrálních bodů, které leží uvnitř sítě a na nichž byly měřeny všechny vrcholové úhly.

Celkový počet úhlových rovnic se rovná součtu $r_1 = r'_1 + r''_1$.

Ad b) stranové rovnice r_2

Počet stranových rovnic: $r_2 = l - 2p + 3$,

kde l = počet všech stran (spojnic triangulačních bodů),

p = počet všech bodů v triangulační síti.

Stanovení celkového počtu podmínkových rovnic v tomto konkrétním případě:

$$r = u - 2p + 4 = 8 - 8 + 4 = 4$$

$$\text{Rovnice obrazové: } r'_1 = l_1 - p_1 + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

$$\text{Rovnice úhlového uzávěru: } r''_1 = 0$$

$$\text{Úhlové rovnice: } r_1 = r'_1 + r''_1 = 3 + 0 = 3$$

$$\text{Rovnice stranové: } r_2 = l - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1$$

Čtyři podmínkové rovnice (3 obrazové, 1 stranová) mají tvar:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 180^\circ = 0$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 180^\circ = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180^\circ = 0$$

$$\frac{\sin x_1 \cdot \sin x_3 \cdot \sin x_5 \cdot \sin x_7}{\sin x_2 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_8} = 1$$

Rovnice odchylek

$\omega_1 =$	$8^\circ 24' 55''$	$\omega_4 =$	$81^\circ 00' 19''$	$\omega_2 =$	$9^\circ 29' 56''$
$\omega_2 =$	$9^\circ 29' 56''$	$\omega_5 =$	$9^\circ 31' 22''$	$\omega_3 =$	$79^\circ 58' 13''$
$\omega_3 =$	$79^\circ 58' 13''$	$\omega_6 =$	$8^\circ 23' 16''$	$\omega_4 =$	$81^\circ 00' 19''$
$\omega_8 =$	$82^\circ 07' 02''$	$\omega_7 =$	$81^\circ 04' 51''$	$\omega_5 =$	$9^\circ 31' 22''$
	$\underline{180^\circ 00' 06''}$		$\underline{179^\circ 59' 48''}$		$\underline{179^\circ 59' 50''}$
	$-180^\circ 00' 00''$		$-180^\circ 00' 00''$		$-180^\circ 00' 00''$
	$U_1 = +6''$		$U_2 = -12''$		$U_3 = -10''$

Čtvrtá podmínková rovnice – stranová není lineární. Nutno ji přetvořit do lineárního tvaru např. pomocí logaritmických diferencí (viz kap. 2.2)

$$\begin{array}{ll}
 \log \sin \omega_1 = \log \sin 8^\circ 24' 55'' = 9,1653833 & 142,3 = \Delta_1 = \text{dif pro } 1'' \\
 \log \sin \omega_3 = \log \sin 79^\circ 58' 13'' = 9,9933117 & 3,7 = \Delta_3 \\
 \log \sin \omega_5 = \log \sin 9^\circ 31' 22'' = 9,2186397 & 125,5 = \Delta_5 \\
 \log \sin \omega_7 = \log \sin 81^\circ 04' 51'' = 9,9947165 & 3,3 = \Delta_7 \\
 \hline
 \sum \log \text{ čitatele} & = 38,3720512
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \log \sin \omega_2 = \log \sin 9^\circ 29' 56'' = 9,2175589 & 125,8 = \Delta_2 \\
 \log \sin \omega_4 = \log \sin 81^\circ 00' 19'' = 9,9946263 & 3,3 = \Delta_4 \\
 \log \sin \omega_6 = \log \sin 8^\circ 23' 16'' = 9,1639719 & 142,8 = \Delta_6 \\
 \log \sin \omega_8 = \log \sin 82^\circ 07' 02'' = 9,9958767 & 3,0 = \Delta_8 \\
 \hline
 \sum \log \text{ jmenovatele} & = 38,3720338
 \end{array}$$

$$U_4 = \sum \log \text{ čitatele} - \sum \log \text{ jmenovatele} = +174 \text{ v jednotkách 7 místa log. mantisy}$$

Přetvořené rovnice:

$$\begin{array}{l}
 v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 6 = 0 \\
 v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - 12 = 0 \\
 v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 10 = 0 \\
 142,3v_1 - 125,8v_2 + 3,7v_3 - 3,3v_4 + 125,5v_5 - 142,8v_6 + 3,3v_7 - 3,0v_8 + 174,0 = 0
 \end{array}$$

Pro další výpočet je výhodné, mají-li všechny rovnice u hledaných oprav stejné, nebo alespoň přibližně stejné součinitele. Tomuto požadavku se přiblížíme, podělíme-li poslední rovnici 10.

Definitivní tvar rovnic odchylek:

$$\begin{array}{l}
 v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 6 = 0 \\
 v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - 12 = 0 \\
 v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 10 = 0 \\
 14,2v_1 - 12,6v_2 + 0,4v_3 - 0,3v_4 + 12,6v_5 - 14,3v_6 + 0,3v_7 - 0,3v_8 + 17,4 = 0
 \end{array}$$

Součinitele normálních rovnic pro výpočet korelát s prováděním řádkových kontrol provedeme v následující tabulce.

Výpočet součinitelů normálních rovnic

i	p	q	a	b	c	d	s	qaa	qab	qac	qad	qas
1	4	0,25	+1			+14,2	-15,20	+0,25			+3,55	-3,80
2	4	0,25	+1		+1	-12,6	+10,60	+0,25		+0,25	-3,15	+2,65
3	1	1	+1		+1	+0,4	-2,40	+1,00		+1,00	+0,40	-2,40
4	1	1		+1	+1	-0,3	-1,70					
5	4	0,25		+1	+1	+12,6	-14,60					
6	4	0,25		+1		-14,3	+13,30					
7	1	1		+1		+0,3	-1,30					
8	1	1	+1			-0,3	-0,70	+1,00			-0,30	-0,70
Σ			+4	+4	+4	-0,0	-12,00	+2,50	0,00	+1,25	+0,50	-4,25

pokračování...

i	qbb	qbc	qbd	qbs	qcc	qcd	qcs	qdd	qds	qss
1								+50,41	-53,96	+57,76
2					+0,25	-3,15	+2,65	+39,69	-33,39	+28,09
3					+1,00	+0,40	-2,40	+0,16	-0,96	+5,76
4	+1,00	+1,00	-0,30	-1,70	+1,00	-0,30	-1,70	+0,09	+0,51	+2,89
5	+0,25	+0,25	+3,15	-3,65	+0,25	+3,15	-3,65	+39,69	-45,99	+53,29
6	+0,25		-3,58	+3,33				+51,12	-47,55	+44,22
7	+1,00		+0,30	-1,30				+0,09	-0,39	+1,69
8								+0,09	+0,21	+0,49
Σ	+2,50	+1,25	-0,43	-3,33	+2,50	+0,10	-5,10	+181,34	-181,52	+194,19

Kontrola správnosti výpočtu:

Má být:

Je:

$$\begin{aligned}
 [a] + [b] + [c] + [d] + [s] &= 0 & +4,00 + 4,00 + 4,00 + 0,00 - 12,00 &= 0,00 \\
 [qaa] + [qab] + [qac] + [qad] + [qas] &= 0 & +2,50 + 0,00 + 1,25 + 0,50 - 4,25 &= 0,00 \\
 [qab] + [qbb] + [qbc] + [qbd] + [qbs] &= 0 & 0,00 + 2,50 + 1,25 - 0,43 - 3,33 &= -0,01 \\
 [qac] + [qbc] + [qcc] + [qcd] + [qcs] &= 0 & +1,25 + 1,25 + 2,50 + 0,10 - 5,10 &= 0,00 \\
 [qad] + [qbd] + [qcd] + [qdd] + [qds] &= 0 & +0,50 - 0,43 + 0,10 + 181,34 - 181,52 &= -0,01 \\
 [qas] + [qbs] + [qcs] + [qds] + [qss] &= 0 & -4,25 - 3,33 - 5,10 - 181,52 + 194,19 &= -0,01
 \end{aligned}$$

Normální rovnice pro výpočet korelát:

$$\begin{aligned}
 2,50k_1 + 0,00k_2 + 1,25k_3 + 0,50k_4 + 6 &= 0 \\
 0,00k_1 + 2,50k_2 + 1,25k_3 - 0,43k_4 - 12 &= 0 \\
 1,25k_1 + 1,25k_2 + 2,50k_3 + 0,10k_4 - 10 &= 0 \\
 0,50k_1 - 0,43k_2 + 0,10k_3 + 181,34k_4 + 17,4 &= 0
 \end{aligned}$$

$4,25k_1 + 3,32k_2 + 5,10k_3 + 181,51k_4 + 1,4 = 0$... součtová rovnice pro ověření správnosti výpočtu k_1, k_2, k_3, k_4

Normální rovnice řešíme Gaussovým algoritmem známým postupem v tabulce.

Normální rovnice	a]k ₁	b]k ₂	c]k ₃	d]k ₄	U	s	Δ
[qa 0,0000	+2,500	0,000	+1,250	+0,500	+6,000	-10,250	
[qb -0,50		+2,500 0,000	+1,250 0,000	-0,430 0,000	-12,000 0,000	+8,680 0,000	
[qc -0,50			+2,500 -0,625	+0,100 -0,250	-10,000 -3,000	+4,900 +5,125	
[qd -0,20				+181,340 -0,100	+17,400 -1,200	-198,910 -2,050	
1. redukce		b.1]k ₂	c.1]k ₃	d.1]k ₄	U.1	s.1	Δ.1
[qb -0,50		+2,500	+1,250 +1,875 -0,625	-0,430 -0,150 +0,215	-12,000 -13,000 +6,000	+8,680 +10,025 -4,340	
[qd +0,1720				+181,240 -0,074	+16,200 -2,064	-196,860 +1,493	
2. redukce			c.2]k ₃	d.2]k ₄	U.2	s.2	Δ.2
[qc -0,0520			+1,250	+0,065	-7,000	+5,685	
[qd -0,0520				+181,166 -0,003	+14,136 +0,364	-195,367 -0,296	
3. redukce				d.3]k ₄	U.3	s.3	Δ.3
[qd				+181,163	+14,500	-195,663	

Výpočet neznámých k_4, k_3, k_2, k_1 :

$$181,163k_4 + 14,500 = 0$$

$$k_4 = -0,08004$$

$$1,250k_3 + 0,065k_4 - 7 = 0$$

$$1,250k_3 - 0,00520 - 7,000 = 0$$

$$k_3 = +5,60416$$

$$2,50k_2 + 1,250k_3 - 0,43k_4 - 12,000 = 0$$

$$2,50k_2 + 7,00520 - 0,03442 - 12,000 = 0$$

$$k_2 = +1,98415$$

$$2,500k_1 + 0,00k_2 + 1,250k_3 + 0,500k_4 + 6,000 = 0$$

$$2,500k_1 + 0,00000 + 7,00520 - 0,04002 + 6,000 = 0$$

$$k_1 = -5,18607$$

Kontrola správnosti výpočtu součtovou rovnicí:

$$4,25k_1 + 3,32k_2 + 5,10k_3 + 181,51k_4 + 1,4 = 0$$

$$-22,04080 + 6,58738 + 28,58122 = 14,52806 + 1,40000 = -0,00026 \div 0$$

Výpočet oprav a jejich kontrola:

i	q	a	b	c	d	qak ₁	qbk ₂	qck ₃	qdk ₄	v	av	bv	cv	dv	pvv
1	+0,250	+1			+14,20	-1,30			-0,28	-1,58	-1,58			-22,45	+9,99
2	+0,250	+1		+1	-12,60	-1,30		+1,40	+0,25	+0,36	+0,36		+0,36	-4,49	+0,51
3	+1,0	+1		+1	+0,40	-5,19		+5,60	-0,03	+0,39	+0,39		+0,39	+0,15	+0,15
4	+1,0		+1	+1	-0,30		+1,98	+5,60	+0,02	+7,61		+7,61	+7,61	-2,28	+57,95
5	+0,250		+1	+1	+12,60		+0,50	+1,40	-0,25	+1,64		+1,64	+1,64	+20,73	+10,82
6	+0,250		+1		-14,30		+0,50		+0,29	+0,78		+0,78		-11,19	+2,45
7	+1,0		+1		+0,30		+1,98		-0,02	+1,96		+1,96		+0,59	+3,84
8	+1,0	+1			-0,30	-5,19			+0,02	-5,16	-5,16			+1,55	+26,65
Σ		+4	+4	+4	-0,00	-12,97	+4,96	+14,01	-0,01	+6,00	-6,00	+12,00	+10,00	-17,39	+112,36

Kontrola správnosti výpočtu.

$$[qak_1] + [qbk_2] + [qck_3] + [qdk_4] = [v]$$

$$-12,97 + 4,96 + 14,01 + 0,01 = +6,01$$

Kontrola součtu [pvv]

a) součtem - [Uk]

$$-U_1k_1 = +31,12$$

$$-U_2k_2 = +23,81$$

$$-U_3k_3 = +56,04$$

$$-U_4k_4 = +1,39$$

$$-[Uk] = +112,36$$

b) výrazem

$$[pvv] = \frac{U_1^2}{[qaa]} + \frac{[U_2 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} + \frac{[U_3 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} + \frac{[U_4 \cdot 3]^2}{[qdd \cdot 3]} =$$

$$= \frac{6,0^2}{2,50} + \frac{12,0^2}{2,50} + \frac{7,0^2}{1,25} + \frac{14,5^2}{181,163} =$$

$$= 14,40 + 57,60 + 39,20 + 1,16 = +112,36$$

Obě kontroly součtu oprav [pvv] souhlasí s výrazem [pvv] vypočteným v tabulce oprav.

Vypočtené opravy v_i také dobře vyhovují přetvořeným podmínkovým rovnicím.

Má být:

$$[av] + U_1 = 0$$

$$[bv] + U_2 = 0$$

$$[cv] + U_3 = 0$$

$$[dv] + U_4 = 0$$

Je:

$$-6,00 + 6,00 = 0,00$$

$$+12,02 - 12,00 = +0,02$$

$$+10,00 - 10,00 = 0,00$$

$$-17,34 + 17,40 = +0,06$$

Střední chyba měřených úhlů o váze $p=1$, tedy střední chyba jednotková (pro úhly $\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8$)

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{112,36}{4}} = \pm 5,30''$$

Střední chyba měřených úhlů o váze $p=4$ (pro úhly $\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6$)

$$m_i = \frac{m_o}{\sqrt{p_i}} = \pm \frac{5,30''}{\sqrt{4}} = \pm 2,65''$$

Vyrovnané hodnoty úhlů $x_i = l_i + v_i$

$$x_1 = l_1 + v_1 = 8^\circ 24' 55'' - 1,6'' = 8^\circ 24' 53,4'' \quad x_2 = l_2 + v_2 = 9^\circ 29' 56'' + 0,4'' = 9^\circ 29' 56,4''$$

$$x_3 = l_3 + v_3 = 79^\circ 58' 13'' + 0,4'' = 79^\circ 58' 13,4'' \quad x_4 = l_4 + v_4 = 81^\circ 00' 19'' + 7,6'' = 81^\circ 00' 26,6''$$

$$x_5 = l_5 + v_5 = 9^\circ 31' 22'' + 1,6'' = 9^\circ 31' 23,6'' \quad x_6 = l_6 + v_6 = 8^\circ 23' 16'' + 0,8'' = 8^\circ 23' 16,8''$$

$$x_7 = l_7 + v_7 = 81^\circ 04' 51'' + 2,0'' = 81^\circ 04' 53,0'' \quad x_8 = l_8 + v_8 = 82^\circ 07' 02'' - 5,2'' = 82^\circ 06' 56,8''$$

Ostrá zkouška (spočívá v dosazení vyrovnaných hodnot do čtyř původních podmínkových rovnic, které musí být přesně splněny):

$$1) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_8 - 180^\circ = 0 \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_8 - 180^\circ = 0^\circ 00' 00''$$

$$2) \quad x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - 180^\circ = 0 \quad x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - 180^\circ = 0^\circ 00' 00''$$

$$3) \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 180^\circ = 0 \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 180^\circ = 0^\circ 00' 00''$$

$$4) \quad \frac{\sin x_1 \cdot \sin x_3 \cdot \sin x_5 \cdot \sin x_7}{\sin x_2 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_8} = 1 \quad \frac{\sin x_1 \cdot \sin x_3 \cdot \sin x_5 \cdot \sin x_7}{\sin x_2 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_8} = \frac{0,0235531}{0,0235532} = 0,999996 \doteq 1$$

3. Kombinované vyrovnání

Jedná se o vyrovnání sítě, kde navíc máme danou podmínku, kterou je třeba dodržet, např. pevná délka nebo převýšení. Definovanou podmínku vyřešíme zavedením nulové opravy pro danou hodnotu a dosadíme do rovnic oprav nebo podmínkových rovnic podle toho, zda úlohu chceme řešit jako měření zprostředkující nebo podmínkové.

4. Využití maticového počtu při výpočtech

V kapitolách 1 a 2 je odvozen a popsán „klasický“ postup řešení úloh vyrovnání měření. Popsaným postupem je možné vyřešit dané úlohy tzv. ručně, což je sice možné, ale při dnešním technickém vybavení zdlouhavé a také neefektivní. Popsaná teorie tak slouží spíše k pochopení problematiky a vlastní výpočetní práce můžeme přenechat výpočetní technice. (Pomíjíme software určený pro vyrovnání sítí, který z uživatelského pohledu funguje jako „black box“ a pro zadaný vstup vrátí výsledek, aniž by uživatel byl nucen vědět/chápat, jak výpočet probíhá.)

Pro vyřešení úlohy je vždy rozhodující správné sestavení rovnic oprav či podmínkových rovnic, příp. linearizace funkčních vztahů v rovnicích. Zbytek je pak rutinní mechanická záležitost, kterou dobře zvládne počítač, který počítá rychle a hlavně nedělá početní chyby.

4.1 Základní pojmy maticového počtu

Matice – maticí rozumíme dvojrozměrné pole prvků, obecně má m řádků a n sloupců. Matici o jednom řádku nebo sloupci nazýváme vektor, a to řádkový nebo sloupcový. Matice označujeme velkými písmeny, vektory malými písmeny, oboje píšeme tučně. Jednotlivé prvky zapisujeme malými písmeny obvykle s indexy (i, j) , které určují řádek a sloupec jednoznačně definující pozici prvku v matici.

Matice, u které $m = n > 1$, je čtvercová matice. Čtvercová matice, která má na hlavní diagonále (úhlopříčka zleva nahoře do vpravo dole) 1 a zbylé prvky 0 je matice jednotková, značíme \mathbf{E} .

Transponovaná matice je matice, která vzniká z původní matice záměnou řádků za sloupce a značíme ji písmenem původní matice s horním indexem T. U vektoru se transpozicí změní řádkový vektor na sloupcový a naopak. Transponováním transponované matice dostáváme původní matici, tzn. dvojí transpozice se vzájemně vyloučí.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = (u_1 u_2 u_3) \quad \mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{u}^T)^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^T = (u_1 u_2 u_3)$$

Inverzní matice k dané matici je taková matice, kterou musíme násobit původní matici, aby výsledkem byla matice jednotková. Značíme ji písmenem původní matice s horním indexem -1.

Základní operace s maticemi:

Součet matic – výsledkem je matice, jejíž prvky jsou prostým součtem prvků na odpovídajících si pozicích. Matice musí mít stejný rozměr, tzn. stejný počet řádků i sloupců. Máme-li matice \mathbf{A} a \mathbf{B} , pak pro matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ platí $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Násobení matice číslem – prvky výsledné matice jsou prosté součiny původních prvků a daného čísla. Máme-li matici \mathbf{A} , pak pro matici $\mathbf{B} = k \cdot \mathbf{A}$ platí $b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$.

Násobení matic – lze násobit jen matice, kde první matice má právě tolik sloupců, jako druhá matice řádků. Výsledná matice má počet řádků jako první matice a počet sloupců jako druhá matice, její prvky tvoří skalární součiny příslušných řádkových vektorů první matice a sloupcových vektorů druhé matice. Máme-li násobitelné matice \mathbf{A} a \mathbf{B} , pak pro matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ platí $c_{i,j} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$.

Násobení matic obecně NENÍ komutativní, proto je třeba rozlišovat násobení maticí zleva nebo zprava.

Pro využití při řešení úloh vyrovnání měření definujeme následující:

n – počet měřených veličin

k – počet určovaných veličin

r – počet nadbytečných měření ($r = n - k$)

$$\text{Vektor měřených veličin } \mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad \text{Vektor oprav (měřených veličin) } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor vyrovnaných veličin } \bar{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \vdots \\ \bar{l}_n \end{pmatrix} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

$$\text{Vektor sblížených hodnot } \mathbf{x}^o = \begin{pmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ \vdots \\ x_k^o \end{pmatrix} \quad \text{Vektor doplňků neznámých } \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_k \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor neznámých } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \mathbf{x}^o + \delta \mathbf{x}$$

$$\text{Vektor uzávěrů (odchylek) } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$$

Matice plánu (obsahuje koeficienty přetvořených rovnic oprav, resp. podmínkových rovnic)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & k_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Matice vah } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \text{ resp. matice váhových koeficientů } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$$

4.2 Postup vyrovnání měření zprostředkujících

Postup je opět popsán pro 3 neznámé, ale jinak je obecný a použitelný pro libovolný počet neznámých, protože se změní jen rozměr matic.

1. Zvolíme neznámé, sestavíme funkční vztahy a linearizované rovnice oprav.
2. Určíme sblížené hodnoty a zapíšeme rovnice oprav s využitím doplňků, čímž dostaneme soustavu přetvořených rovnic oprav ve tvaru $v_i = a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + c_i \delta x_3 + l'_i$ s váhami p_i .
3. Soustavu zapíšeme v maticovém tvaru jako $\mathbf{v} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{l}'$

Prvky matice plánu A tvoří parciální derivace funkčních vztahů podle jednotlivých doplňků (neznámých) a jedná se koeficienty přetvořených rovnic oprav.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \delta x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial \delta x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial \delta x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \delta x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial \delta x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \delta x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial \delta x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial \delta x_2} & \frac{\partial v_n}{\partial \delta x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

4. Sestavíme normální rovnice, které by v klasickém zápisu vypadaly takto:

$$\begin{aligned} [paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + [pac]\delta x_3 + [pal'] &= 0 \\ [pab]\delta x_1 + [pbb]\delta x_2 + [pbc]\delta x_3 + [pbl'] &= 0, \\ [pac]\delta x_1 + [pbc]\delta x_2 + [pcc]\delta x_3 + [pcl'] &= 0 \end{aligned}$$

kde koeficienty v hranatých závorkách jsme určovali v tabulce – viz např. tabulka na str. 28.

Zde se naplno ukazuje elegance a síla maticového řešení, kdy potřebné koeficienty získáme jednoduchým součinem matic $A^T P A$

Můžeme si to ukázat na příkladu dvouřádkové matice:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \text{ a } P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \\ A^T P &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 a_1 & p_2 a_2 \\ p_1 b_1 & p_2 b_2 \\ p_1 c_1 & p_2 c_2 \end{pmatrix} \\ (A^T P)A &= \begin{pmatrix} p_1 a_1 & p_2 a_2 \\ p_1 b_1 & p_2 b_2 \\ p_1 c_1 & p_2 c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 & p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 & p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 \\ p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 & p_1 b_1 b_1 + p_2 b_2 b_2 & p_1 b_1 c_1 + p_2 b_2 c_2 \\ p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 & p_1 b_1 c_1 + p_2 b_2 c_2 & p_1 c_1 c_1 + p_2 c_2 c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normální rovnice tedy zapíšeme výrazem $A^T P A \delta x + A^T P l' = 0$

Označíme-li matici koeficientů normálních rovnic $N = A^T P A$ a absolutní část rovnice $n = A^T P l'$, můžeme normální rovnice zapsat výrazem $N \delta x + n = 0$

Soustavu rovnic vyřešíme znovu elegantně s využitím inverzní matice N^{-1} , kdy vynásobením rovnice inverzní maticí zleva dostaneme $N^{-1} N \delta x + N^{-1} n = 0$, čímž osamostatníme hledané δx a dále po úpravě $\delta x = -N^{-1} n$. Vlastní výpočet inverzní matice sice není triviální, ale nepředpokládáme, že bychom ji určovali ručně.

5. Vypočtené doplňky δx použijeme pro výpočet neznámých $x = x^0 + \delta x$ a oprav $v = A \delta x + l'$.

6. Připočtením oprav k měřeným veličinám získáme vyrovnané hodnoty měřených veličin $\bar{l} = l + v$.
7. Odhad střední chyby jednotkové vypočteme ze známého vzorce $m_o = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}$, kde výraz $[pvv]$ získáme analogicky jako $[paa]$, $[pab]$,... součinem $[pvv] = v^T P v$.
8. Odhad středních chyb vyrovnaných neznámých vypočteme ze vztahu $m_{x_i} = m_o \sqrt{Q_{x_i x_i}}$, kde Q_x je matice váhových koeficientů $Q_x = N^{-1}$.
9. Odhad středních chyb vyrovnaných měřených veličin $m_{\bar{l}_i} = m_o \sqrt{Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i}}$, kde $Q_{\bar{l}_i} = A N^{-1} A$
10. Zápis výsledků: $x_i \pm m_{x_i}, \bar{l}_i \pm m_{\bar{l}_i}$

4.3 Postup vyrovnaní měření podmínkových

1. Sestavíme podmínkové rovnice, dosadíme měřené hodnoty pro zjištění odchylek a zapíšeme přetvořené podmínkové rovnice.

$$Bv + u = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta l_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \delta l_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta l_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta l_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \delta l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial \delta l_1} & \frac{\partial f_r}{\partial \delta l_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial \delta l_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

2. Zavedeme váhy (p_i) a určíme jejich reciproké hodnoty.
3. Sestavíme normální rovnice pro výpočet korelát. Koeficienty normálních rovnic získáme podobně jako u zprostředkujících měření vynásobením matice plánu $N = B P^{-1} B^T$, normální rovnice pak

$$Nk + u = 0$$

4. Vypočítáme koreláty s využitím inverzní matice $k = -N^{-1}u$
5. Pomocí vypočtených korelát určíme opravy $v = P^{-1} B^T k$
6. Opravíme měřené veličiny $\bar{l} = l + v$
7. Vypočítáme střední chybu jednotkovou $m_o = \sqrt{\frac{v^T P v}{n-k}}$
8. Vypočteme střední chyby měřených veličin $m_{l_i} = m_o \sqrt{\frac{1}{p_i}} = m_o \sqrt{q_i}$
9. Vypočteme střední chyby vyrovnaných veličin $m_{\bar{l}_i} = m_o \sqrt{Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i}}$ (využijeme speciální případ střední chyby funkce měřených veličin, kdy $F_i = \bar{l}_i$)

$$Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i} = F P^{-1} F^T - F P^{-1} B^T N^{-1} B P^{-1} F^T$$

F – matice partiálních derivací funkcí vyrovnaných veličin.

10. Zapišeme výsledek vyrovnaní $l_i \pm m_{l_i}, \bar{l}_i \pm m_{\bar{l}_i}$

4.4 Ukázkový příklad

Na ukázkou maticově vyřešíme příklad 2.1 ze strany 47.

Přetvořené podmínkové rovnice jsou:

$$\begin{aligned}v_5 + v_7 - v_2 - 12 &= 0 \\v_6 - v_5 - v_4 - 2 &= 0 \\v_3 + v_{10} - v_9 - v_{11} + 17 &= 0 \\v_1 - v_3 + v_2 + 5 &= 0 \\v_1 + v_{10} - v_9 - v_8 + v_6 + v_7 - 7 &= 0\end{aligned}$$

Pokud maticový zápis je $\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{u} = 0$, pak

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 17 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice vah

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Koeficienty normálních rovnic $\mathbf{N} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 97 & -23 & 0 & -36 & 38 \\ -23 & 102 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 110 & -25 & 50 \\ -36 & 0 & -25 & 103 & 42 \\ 38 & 37 & 50 & 42 & 209 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,02080 & 0,00816 & 0,00729 & 0,01294 & -0,00957 \\ 0,00816 & 0,01392 & 0,00432 & 0,00646 & -0,00628 \\ 0,00729 & 0,00432 & 0,01451 & 0,00908 & -0,00739 \\ 0,01294 & 0,00646 & 0,00908 & 0,02042 & -0,00977 \\ -0,00957 & -0,00628 & -0,00739 & -0,00977 & 0,01137 \end{pmatrix}$$

Koreláty $\mathbf{k} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0,010219 \\ -0,024033 \\ -0,247743 \\ -0,156751 \\ 0,126658 \end{pmatrix}$$

Hledané opravy $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1,2639 \\ -6,0109 \\ -2,2748 \\ 1,0094 \\ 0,7878 \\ 3,7971 \\ 5,2013 \\ -5,3196 \\ 2,3006 \\ -3,7536 \\ 8,6710 \end{pmatrix}$$

Střední chyba jednotková m_0

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - k}} = \sqrt{\frac{5,956543}{11 - 6}} = 1,091 \text{ mm}$$

Střední chyby měřených veličin $m_{l_i} = m_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}}$

i	$\frac{1}{p_i}$	m_{l_i} [mm]
1	42	7,1
2	36	6,5
3	25	5,5
4	42	7,1
5	23	5,2
6	37	6,6
7	38	6,7
8	42	7,1
9	19	4,8
10	31	6,1
11	35	6,5

Střední chyby vyrovnaných veličin $m_{\bar{l}_i} = m_0 \sqrt{Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i}}$ $Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i} = \mathbf{F} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}^T$

$Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i}$	i	$Q_{\bar{l}_i \bar{l}_i}$	$m_{\bar{l}_i}$ [mm]
20,40	1	20,40	4,9
-11,00	2	16,12	4,4
9,40	3	14,52	4,2
0,32	4	17,44	4,6
-3,08	5	13,27	4,0
-2,76	6	19,58	4,8
-7,92	7	19,19	4,8
2,81	8	21,94	5,1
2,63	9	14,99	4,2
-4,28	10	20,33	4,9
2,49	11	17,22	4,5