VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ | KATEDRA MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Parciální diferenciální rovnice pro inženýry

Radek Kučera

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Ostrava 2021

OBSAH

KAPITOLA

1

ÚVOD

O diferenciální rovnici hovoříme v situaci, kdy daná rovnice obsahuje jako neznámou funkci, která se v rovnici vyskytuje spolu se svými derivacemi. Pokud jde o funkci jedné proměnné, která má „obyčejné“ derivace, hovoříme o *obyčejné diferenciální rovnici*, zkráceně ODR. V tomto textu se budeme zabývat *parciálními diferenciálními rovnicemi*, zkráceně PDR. Neznámou je v tomto případě funkce více proměnných, která se v rovnici vyskytuje spolu se svými parciálními derivacemi. Některým parciálním diferenciálními rovnicím se také říká *rovnice matematické fyziky*, protože popisují různé fyzikální jevy.

1.1 Základní pojmy

Neznámou funkci budeme zpravidla značit

$$u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_d).$$

Její proměnnou jsou body v d-dimenzionálním Euklidově prostoru $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d).$$

V praktických úlohách mají smysl dimenze $d = 2, 3, 4$. V rovině, je $d = 2$ a složky proměnné obvykle zapisuje $\mathbf{x} = (x, y)$. V prostoru je $d = 3$ a značíme $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Je-li další proměnnou čas, označujeme jej většinou t a píšeme $u(\mathbf{x}, t)$ nebo s vypsáním složek bodu $\mathbf{x}$. Řešení zpravidla hledáme na nějaké oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Připomeňme, že oblastí rozumíme otevřenou souvislou množinu.

Parciální derivace standardně zapisujeme pomocí zlomku a symbolů ∂. Budeme ale používat i zkrácené zápisy ∂_x, nebo jen u_x, anebo symbol D s multiindex. Například pro funkci $u = u(x, y)$ můžeme psát:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \partial_y u = D^{(0,1)} u, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \partial_{xyy} u = D^{(1,2)} u.$$

Multiindexem pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ je vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, jehož složky jsou nezáporná celá čísla α_i a složka α_i se týká souřadnice x_i. Zavádíme pojmy délka multiindexu $|\alpha| = \alpha_1 +$

$\alpha_2 + \cdots + \alpha_d$ a faktoriál multiindexu $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_d!$. Mocninu $\mathbf{x}^\alpha$ a parciální derivaci D^α multiindexu α definujeme takto:

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}, \qquad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Jednoduchý tvar má pak například Taylorova řada funkce u d proměnných se středem v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha.$$

Symbolem Du nebo ∇u označujeme gradient funkce u, což je vektor všech parciálních derivací funkce $u$prvního řádu, tj.

$$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right).$$

Symbol $D^k u$, kde k je nezáporné celé číslo, představuje soubor všech parciálních derivací řádu k (tj. s multiindexem délky k). Tento soubor derivací chápeme podle potřeby jako vektor nebo jako k-rozměrnou matici.

1.2 Obecný zápis PDR

PDR k-tého řádu lze zapsat pomocí multiindexů takto:

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, Du, u, \mathbf{x}) = 0, \tag{1.1}$$

kde D^k je vektor všech parciálních derivací řádu k a F je daná funkce.

PDR k-tého řádu se nazývá *lineární*, je-li funkce F lineární vzhledem k proměnným, na jejichž pozicích se v (1.1) vyskytují derivace. Lineární PDR k-tého řádu můžeme zapsat ve tvaru:

$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

kde funkce a_α a f jsou *koeficienty* této rovnice; f se také nazývá *pravá strana*. Je-li v dané lineární PDR pravá strana nulová funkce, nazýváme tuto rovnici *homogenní*. Jsou-li v dané lineární PDR koeficienty a_α konstantní vzhledem k proměnné $\mathbf{x}$, hovoříme o rovnici s *konstantními koeficienty*.

Lineární PDR 2-hého řádu můžeme zapsat takto:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}).$$

Uvažujeme-li tuto rovnici v rovině ($d = 2$ a $\mathbf{x} = (x, y)$), můžeme ji také psát ve tvaru:

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g.$$

PDR rovnice se nazývá *semilineární*, je-li nelineární vzhledem k u a lineární vzhledem ke všem derivacím řádu $k \geq 1$.

PDR rovnice se nazývá *kvazilineární*, je-li lineární pouze vzhledem derivacím nejvyššího řádu, tedy je tvaru:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, \mathbf{x}) D^\alpha u(\mathbf{x}) = f(D^{k-1}u, \dots, Du, u, \mathbf{x}).$$

Je-li jednou z nezávisle proměnných čas, hovoříme o *evoluční rovnici*. Pokud rovnice na čase nezávisí, ale závisí jen na prostorových proměnných, hovoříme o *stacionární rovnici*.

Uvedeme několik příkladů:

1. Transportní rovnice je evoluční, prvního řádu, lineární, homogenní:
$$u_t + u_x = 0.$$
2. Laplaceova rovnice je stacionární, druhého řádu, lineární, homogenní:
$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$
3. Poissonova rovnice je stacionární, druhého řádu, lineární, nehomogenní:
$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y).$$
4. Vlnová rovnice s interakcí je evoluční, druhého řádu, nelineární:
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u^3 = 0.$$
5. Difuzní rovnice je evoluční, druhého řádu, lineární, nehomogenní:
$$u_t - u_{xx} = f(x, t).$$
6. Rovnice vibrujícího nosníku je evoluční, čtvrtého řádu, lineární, homogenní:
$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0.$$
7. Schrödingerova rovnice je evoluční, druhého řádu, lineární, homogenní:
$$u_t - iu_{xx} = 0.$$
8. Rovnice disperzní vlny je evoluční, třetího řádu, nelineární:
$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

1.3 Klasické řešení PDR

Řekneme, že funkce u náleží do množiny funkcí $C^k(\Omega)$, nebo-li je na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ třídy C^k, jestliže má na Ω spojité všechny parciální derivace až do řádu k včetně.

PDR (1.1) uvažujeme na Ω. Řekneme, že funkce u je *klasickým řešením* rovnice (1.1) na oblasti $G \subset \Omega$, jestliže

1. $u \in C^k(G)$,

2. funkce F je definována pro všechny hodnoty $D^\alpha u(\mathbf{x})$, $|\alpha| \leq k$, $\mathbf{x} \in G$, a jejich dosazením do (1.1) je tato rovnost splněna.

V teorii PDR se zajímáme především o *existenci* řešení, o jeho *jednoznačnost* a o *stabilitu* (nebo-li o spojitou závislost řešení na datech). Pokud PDR řešení má, je určeno jednoznačně a je stabilní, říkáme, že je daná úloha *dobře formulována* (korektní). V opačném případě se snažíme pozměnit formulaci úlohy. Je-li daná úloha dobře formulována, zajímáme se o další aspekty, jako je hladkost (regularita) řešení, metody výpočtu, aproximace řešení atp.

Uvažujeme-li PDR bez počáteční nebo okrajové podmínky, není její řešení určeno jednoznačně. V takovém případě používáme pojmy jako *obecné řešení* nebo *generické řešení*. V případě obyčejných diferenciálních rovnic je obecné řešení závislé na volitelných konstantách. U PDR je situace složitější. Budeme ji demonstrovat na příkladech.

Příklad 1.1 Hledáme-li funkci $u = u(x,y)$, která splňuje rovnici

$$u_{xx} = 0,$$

dojdeme po dvou integracích ke tvaru

$$u(x,y) = f(y)x + g(y),$$

kde f a g jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce proměnné y.

Příklad 1.2 Hledáme-li funkci $u = u(x,y,z)$, která splňuje rovnici

$$u_{xx} + u = 0,$$

dojdeme podobnými postupy jako v případě obyčejných diferenciálních rovnic k funkci ve tvaru

$$u(x,y,z) = f(y,z)\cos x + g(y,z)\sin x,$$

kde f a g jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce proměnných y a z.

Příklad 1.3 Hledáme-li funkci $u = u(x,y)$, která splňuje rovnici

$$u_{xy} = 0,$$

dojdeme po dvou integracích ke tvaru

$$u(x,y) = F(y) + G(x),$$

kde F a G jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce.

Tyto příklady naznačují, že obecné řešení PDR by mohlo záviset na *volitelných funkcích* $n-1$ proměnných, jejichž počet je dán řádem rovnice. Následující příklad ukazuje, že tomu tak vždy být nemusí.

Příklad 1.4 Hledejme funkci $u = u(x, y)$, která splňuje rovnici

$$(u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 = 0.$$

Tato rovnice se rozpadne na dvě rovnice: $u_{xx} = 0$ a $u_{yy} = 0$. Řešením první rovnice dostaneme

$$u(x, y) = f_1(y)x + f_2(y)$$

a řešením druhé rovnice dostaneme

$$u(x, y) = g_1(x)y + g_2(x),$$

kde f_1, f_2 a g_1, g_2 jsou libovolné funkce. Protože oba předpisy mají platit současně, musí být řešení naší původní rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = axy + bx + cy + d,$$

kde a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla.

Obecným řešení PDR nazýváme soubor všech jejich řešení.

Generickým řešení PDR řádu k s n nezávislými proměnnými nazýváme řešení, které závisí na k volitelných funkcích $n-1$ proměnných, které jsou třídy C^k.

1.4 Okrajové a počáteční podmínky

U úloh stacionárních, doplňujeme k PDR *okrajovou podmínku*. Dostaneme tak *okrajovou úlohu*. Například:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= g \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ je její hranice (hraniční křivka) a f, resp. g jsou dané funkce dvou proměnných na Ω, resp. $\partial\Omega$.

Základní typy okrajových podmínek pro omezenou oblast Ω v $\mathbb{R}^3$ jsou tyto:

Dirichletova okrajová podmínka:

$$u(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

Neumanova okrajová podmínka:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

Newtonova (také *Robinova*) okrajová podmínka:

$$A\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) + Bu(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial n}$ je derivace podle vnější normály n k hranici oblasti Ω a A, B, $A^2 + B^2 \neq 0$, jsou daná reálná čísla. Je-li funkce g nulová, hovoříme o *homogenních* okrajových podmínkách, v opačném případě o *nehomogenních* okrajových podmínkách. Jsou-li na různých částech hranice $\partial\Omega$ zadány různé typy okrajových podmínek, hovoříme o úloze se *smíšenými* okrajovými podmínkami. Je-li oblast jednodimenzionální, tj. $\Omega = (a, b)$, má nehomogenní Dirichletova okrajová podmínka tento tvar:

$$u(a) = g_a, \quad u(b) = g_b$$

a podobně pro další typy okrajových podmínek. Je-li oblast neomezená, zapisujeme okrajové podmínky v limitním tvaru. Např. pro neomezený interval $\Omega = (0, \infty)$ má homogenní Dirichletova okrajová podmínka tvar:

$$u(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

U evolučních úloh doplňujeme k PDR kromě okrajové podmínky ještě *počáteční podmínku* a hovoříme *počátečně-okrajové* úloze. Například pro vlnovou rovnici uvažujeme úlohu:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx},\ t \in (0, \infty),\ x \in (0, 1),\\
&u(0, t) = u(1, t) = 0,\ t \in (0, \infty),\\
&u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x),\ x \in (0, 1),
\end{aligned}$$

kde derivace u_t pro $t = 0$ uvažujeme jako derivace zprava. Pokud hledáme klasické řešení, musí být zadaná data dostatečně hladká a počáteční a okrajové podmínky musejí být „v souladu“, tzn. musí být splněny *podmínky kompatibility*: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Kontrolní otázky

1. Co je to oblast v $\mathbb{R}^d$?
2. Pro multiindex $\alpha = (2, 1, 3)$ a bod $\mathbf{x} = (3, -2, 1)$ určete $|\alpha|$, $\alpha!$, $\mathbf{x}^\alpha$ a $D^\alpha f(\mathbf{x})$.
3. Pomocí multiindexu napište derivace u_{xyyy}, v_{xxyz} a mocninu xy^2z^3 v $\mathbb{R}^3$.
4. Napište Taylorův polynom druhého a třetího stupně pro funkci $f(x, y)$.
5. Napište a vysvětlete pojem PDR k-tého řádu.
6. Co je to lineární, semilineární, kvazilineární, evoluční a stacionární PDR? Napište příklady.
7. Upravte vzorec (1.2) tak, aby vyjadřoval semilineární PDR.
8. Jak se charakterizuje klasické řešení PDR? Jak otázky nás zajímají v souvislosti s řešením PDR?
9. Co rozumíme obecným a co generickým řešením PDR?
10. Jaké rozeznáváme základní typy okrajových podmínek?
11. Vysvětlete pojem počátečně-okrajová úloha a podmínky kompatibility.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte generické řešení rovnice $u_{xx} + 2ku_{xt} + k^2u_{tt} = 0$, $k \neq 0$ pomocí substituce $\xi = x + bt$, $\tau = x + dt$ s koeficienty b a d (dostaneme $u^*_{\xi\xi} = 0$ a $u(x, t) = f(x - \frac{t}{k})x + g(x - \frac{t}{k})$).
2. Řešte rovnici $xu_{xx} - 4u_{xt} = 0$, $x > 0$, pomocí nelineární substituce $\xi = t + 4\ln x$, $\tau = t$ (dostaneme $u^*_\xi + 4u^*_{\xi\tau} = 0$ a $u(x, t) = e^{-t/4}f(t + 4\ln x) + g(t)$).

KAPITOLA

2

ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Budeme se zabývat lineárními PDR prvního řádu, které mají blízko k ODR. Výchozím bodem jejich řešení je totiž charakteristický systém obyčejných diferenciálních rovnic a podél řešení tohoto systému přechází samotná PDR v ODR. Dále se budeme zabývat kvazilineárními PDR prvního řádu, které nám umožní řešit nehomogenní úlohy.

2.1 Modelový příklad

Uvažujme nejprve následující homogenní rovnici:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstantní koeficienty, které nejsou oba současně nulové (tj. $a^2 + b^2 \neq 0$). Vytvoříme-li z koeficientů a, b vektor $\mathbf{v} = (a, b)$, můžeme levou stranu rovnice (2.1) vyjádřit pomocí skalárního součinu takto:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{v} \cdot (\nabla u) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}.$$

Poslední výraz je derivace funkce u ve směru $\mathbf{v}$ a rovnice (2.1) proto říká, že řešení u má nulovou směrovou derivaci ve směru $\mathbf{v}$. Protože toto zjištění platí v libovolném bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, je řešení u konstantní podél přímek se směrovými vektory $\mathbf{v}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & at + x_0 \\ y & = & bt + y_0 \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Přímkám (2.2) se říká *charakteristické přímky*. Můžeme je také zapsat implicitní rovnicí:

$$ay - bx = c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Obecné řešení rovnice (2.1) je proto tvaru:

$$u(x, y) = g(ay - bx), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.4}$$

kde g je libovolná spojitě diferencovatelná funkce jedné proměnné. Poznamenejme ještě, že charakteristické přímky jsou řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= a, \\ y' &= b, \end{aligned} \tag{2.5}$$

která představuje *charakteristický systém rovnice* (2.2).

Řešení rovnice (2.2) určíme jednoznačně předepsáním *počáteční podmínky* na křivce, která (vhodným způsobem) protíná všechny charakteristické přímky. Za předpokladu $b \neq 0$ může být touto křivkou osa x (určená rovnicí $y = 0$), na níž předepíšeme počáteční podmínku funkcí u_0 a požadujeme

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2.6}$$

Použijeme-li (2.4), dostaneme

$$g(-bx) = u_0(x),$$

odkud určíme, že funkce g má následující podobu:

$$g(x) = u_0(-x/b).$$

Řešení rovnice (2.2) vyhovující podmínce (2.6) má potom tvar:

$$u(x, y) = u_0(x - ay/b), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

což můžeme snadno prověřit derivováním a dosazením do obou rovností.

Konkrétní úloha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ u(x, 0) &= e^x \end{aligned}$$

má řešení $u(x, y) = e^{x-y/2}$.

2.2 Homogenní lineární rovnice v rovině

Uvažujme úlohu

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{v } \Omega, \tag{2.7}$$

$$u = u_0 \quad \text{na } \gamma, \tag{2.8}$$

kde Ω je daná oblast v $\mathbb{R}^2$ obsahující hladkou křivku γ,

$$\gamma = \{(x, y) \in \Omega : \; x = \gamma_1(s), \, y = \gamma_2(s), \, s \in I\}$$

a $I \subseteq \mathbb{R}$ je vhodný interval. Připomeňme, že křivka γ je hladká, jestliže $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(I)$ a platí $\gamma_1'(s)^2 + \gamma_2'(s)^2 \neq 0$ pro všechna $s \in I$. O koeficientech a, b budeme předpokládat, že to jsou spojitě diferencovatelné funkce, tj. $a, b \in C^1(\Omega)$, které nejsou současně nulové v žádném bodě Ω.

Rovnici (2.7) přiřadíme *charakteristický systém*

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= a(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= b(x(t), y(t)) \end{aligned}\right\} \quad t \in J, \tag{2.9}$$

kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je vhodný interval. Charakteristický systém je soustavou ODR, jejímž řešením jsou *charakteristické křivky* neboli *charakteristiky*. Budeme předpokládat, že charakteristiky pokrývají celou oblast Ω a neprotínají se. Podobně jako v odstavci 2.1 lze ukázat, že řešení u rovnice (2.7) je podél charakteristik konstantní. Množinu charakteristik lze zapsat ve tvaru

$$\gamma_{(x_0,y_0)} = \{(x(t),y(t)) \in \Omega:\ t \in J,\ x_0 = x(t_0),\ y = y(t_0),\ t_0 \in J\},$$

kde bod (x_0,y_0) představuje počáteční podmínku pro řešení charakteristického systému (2.9) (zpravidla $(x_0,y_0) \in \gamma$). Vhodnější je popsat charakteristiky implicitně pomocí nějaké funkce φ (jako analogii k (2.3)):

$$\gamma_c = \{(x,y) \in \Omega:\ \varphi(x,y) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení rovnice (2.7) pak je tvaru

$$u(x,y) = g(\varphi(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega,$$

kde g je libovolná spojitě diferencovatelná funkce jedné proměnné. Funkci g určíme tak, aby byla splněna počáteční podmínka (2.8). Aby to bylo možné, musí systém charakteristik γ_c a kivka γ splňovat podmínku z následující věty.

Věta 2.1 Nechť existují charakteristiky γ_c, které pokrývají celou oblast Ω a neprotínají se. Nechť křivka γ protíná každou charakteristiku γ_c právě jednou a svírá s ní nenulový úhel. Pak existuje jediné řešení úlohy (2.7)-(2.8), které je podél charakteristik konstantní.

Následující existenční věta nevyžaduje předpoklad o existenci charakteristik na celé oblasti Ω, ale zahrnuje v sobě analýzu řešitelnosti charakteristického systému (2.9). Tvrzení je pak slabší, je formulováno jen na okolí křivky γ.

Věta 2.2 Nechť $a, b \in C^1(\Omega)$ a $\gamma \subset \Omega$ je hladká křivka. Dále nechť platí

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{na } \gamma. \tag{2.10}$$

Pak existuje jediné řešení úlohy (2.7)-(2.8) v okolí γ a je určeno jednoznačně.

Podmínka (2.10) zaručuje, mimo jiné, že křivka γ a charakteristiky svírají nenulový úhel.

Implicitní popis charakteristik pomocí funkce φ v γ_c hledáme vhodným postupem řešení charakteristického systému (2.9). Ukážeme to v následujících příkladech.

Příklad 2.5 Budeme řešit úlohu:

$$u_x + 3u_y = 0, \tag{2.11}$$

$$u(x,0) = \sin x. \tag{2.12}$$

Řešení: Charakteristický systém jsou rovnice

$$x' = 1, \quad y' = 3. \tag{2.13}$$

Charakteristikami jsou přímky $x = t + x_0$, $y = 3t + y_0$, $t \in \mathbb{R}$, jejichž implicitní popis dostaneme vyloučením parametru t. Můžeme však postupovat také tak, že v (2.13) vynásobíme první rovnici -3 a obě rovnice sečteme: $-3x' + y' = 0$. Tuto výslednou rovnici integrujeme (podle t), čímž dostaneme $-3x + y = c$. Charakteristiky jsou tedy popsány funkcí $\varphi(x, y) = -3x + y$, takže obecné řešení rovnice (2.11) je $u(x, y) = g(-3x + y)$. Dosazením do počáteční podmínky (2.12) máme $g(-3x) = \sin x$ a odtud určíme $g(x) = \sin(-x/3)$. Řešení úlohy (2.11)-(2.12) má proto tvar $u(x, y) = \sin(x - y/3)$. □

Příklad 2.6 Budeme řešit úlohu:

$$xu_x - yu_y = 0, \tag{2.14}$$

$$u(x, x) = x^2. \tag{2.15}$$

Řešení: Charakteristický systém jsou rovnice

$$x' = x, \quad y' = -y. \tag{2.16}$$

První rovnici vynásobíme $1/x$, druhou $1/y$ a obě rovnice sečteme: $x'/x + y'/y = 0$. Integrací dostaneme $\ln|x| + \ln|y| = c$. Levou stranu bychom mohli vzít rovnou za funkci φ. Provedeme ale ještě úpravu, kdy použijeme vzorec pro logaritmus součinu, tj. $\ln|xy| = c$, a odlogaritmujeme, tj. $xy = \bar{c}$. Vidíme, že charakteristiky jsou hyperboly a $\varphi(x, y) = xy$. Obecné řešení rovnice (2.14) je $u(x, y) = g(xy)$. Z počáteční podmínky (2.15) máme $g(x^2) = x^2$, takže $g(x) = x$. Řešení úlohy (2.14)-(2.15) má tvar $u(x, y) = xy$. □

Používá se také následující terminologie.

Definice 2.1 Funkci $\varphi = \varphi(x, y)$, která je konstantní podél charakteristik systému (2.9) nazýváme *první integrál*.

Řešení rovnice (2.7) tedy spočívá ve hledání prvního integrálu. V příkladu 2.5 byla prvním integrálem funkce $\varphi(x, y) = -3x + y$ nebo $u(x, y) = g(-3x + y)$. V příkladu 2.6 se jednalo funkce $\varphi(x, y) = xy$ nebo $u(x, y) = g(xy)$.

Charakteristický systém (2.9) bývá také zvykem zapisovat v *kanonické tvaru*:

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}. \tag{2.17}$$

Obdržíme ho z (2.9) formálním vyloučením parametru t a představuje jednu ODR, jejímž řešením dostaneme první integrál.

Příklad 2.7 Vypočítáme první integrál pro rovnici (2.14) pomocí (2.17).

Řešení: Charakteristický systém v kanonickém tvaru je:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}.$$

Provedeme jeho integraci

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{-y}, \quad \ln|x| = -\ln|y| + \ln\bar{c}, \quad \ln|xy| = \ln\bar{c}$$

a po odlogaritmování dostaneme první integrál $\varphi(x, y) = xy$. □

2.3 Homogenní lineární rovnice v prostoru

Uvažujme úlohu

$$a(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x} + b(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial y} + c(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{v } \Omega, \tag{2.18}$$

$$u = u_0 \quad \text{na } \Gamma, \tag{2.19}$$

kde $\mathbf{x} = (x, y, z)$, Ω je daná oblast v $\mathbb{R}^3$ obsahující regulární plochu Γ,

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \Omega :\ x = \gamma_1(s_1, s_2),\ y = \gamma_2(s_1, s_2),\ z = \gamma_3(s_1, s_2),\ (s_1, s_2) \in D\}$$

a D je oblast v $\mathbb{R}^2$. Připomeňme, že plocha Γ je regulární, jestliže $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C^1(D)$, matice parciálních derivací těchto funkcí podle s_1 a s_2 má hodnost 2 a plocha se neprotíná. O koeficientech a, b, c předpokládáme, že to jsou spojitě diferencovatelné funkce, tj. $a, b, c \in C^1(\Omega)$, které nejsou současně nulové v žádném bodě Ω. Zaměříme se na hlavní rozdíly oproti odstavci 2.2.

Rovnici (2.18) přiřadíme *charakteristický systém*, který nyní sestává ze tří rovnic:

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) & = & b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) & = & c(x(t), y(t), z(t)) \end{array}\right\} \quad t \in J, \tag{2.20}$$

kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je vhodný interval. Řešením (2.20) je systém křivek – charakteristik, které lze zapsat implicitně pomocí dvou funkcí φ_1, φ_2:

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi_1(x,y,z) & = & c_1 \\ \varphi_2(x,y,z) & = & c_2 \end{array}\right\} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Jednotlivé charakteristiky dostaneme volbou různých hodnot c_1, c_2. Protože levá strana (2.18) představuje opět směrovou derivaci ve směru charakteristik, je řešení podél charakteristik konstantní. Obecné řešení rovnice (2.18) lze nyní zapsat pomocí spojitě diferencovatelné funkce g dvou proměnných ve tvaru:

$$u(x,y,z) = g(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)), \quad (x,y,z) \in \Omega, \tag{2.22}$$

Funkci g určíme tak, aby byla splněna počáteční podmínka (2.19). Podobně jako v odstavci 2.2 platí věty o existenci řešení (analogie věty 2.1 a věty 2.2).

Postup řešení analogický k postupu z odstavce 2.2 si předvedeme na příkladě.

Příklad 2.8 Budeme řešit úlohu:

$$x u_x - y u_y + (x^2 + y^2) u_z = 0, \tag{2.23}$$

$$u(x, x, z) = xz. \tag{2.24}$$

Řešení: Charakteristickým systémem jsou rovnice

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = x^2 + y^2. \tag{2.25}$$

Při hledání funkce φ_1 vynásobíme první rovnici $1/x$, druhou rovnici $1/y$, třetí rovnici 0 a všechny rovnice sečteme. Podobně jako při řešení příkladu 2.6 dospějeme k $\varphi_1(x,y,z) =$

xy. Při hledání funkce φ_2 navrhneme druhou úpravu. První rovnici vynásobíme $-x$, druhou rovnici y, třetí rovnici 1 a všechny rovnice sečteme: $-xx' + yy' + z' = 0$. Integrací a vynásobením 2 dostaneme $-x^2 + y^2 + 2z = c$, a proto položíme $\varphi_2(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 2z$. Obecné řešení rovnice (2.23) můžeme zapsat ve tvaru $u(x, y, z) = g(xy, -x^2 + y^2 + 2z)$. Z počáteční podmínky dostaneme požadavek $g(x^2, 2z) = xz$, takže $g(x, y) = \sqrt{x}y/2$. Řešení úlohy (2.23)-(2.24) má tvar $u(x, y, z) = \sqrt{xy}(-x^2 + y^2 + 2z)/2$. □

Podobně jak v případě rovnic v rovině, nazýváme řešení rovnice (2.18) prvním integrálem. Je to tedy funkce, která je konstantní podél charakteristik systému (2.20) a lze ji obecně zapsat vztahem (2.22). *Kanonický tvar charakteristického systému* (2.20) nyní vypadá takto:

$$\frac{dx}{a(x,y,z)} = \frac{dy}{b(x,y,z)} = \frac{dz}{c(x,y,z)}. \tag{2.26}$$

Při výpočtech můžeme zápisy (2.20) a (2.26) kombinovat tak, abychom řešení vypočetli co možná nejjednodušším způsobem.

Příklad 2.9 Vypočítáme obecné řešení rovnice

$$yu_x + xu_y + (x - y)u_z = 0.$$

Řešení: Charakteristický systém zapíšeme v obou tvarech:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& y, \\ y' &=& x, \\ z' &=& x - y, \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x - y}.$$

Z prvního tvaru dostaneme $x' - y' + z' = 0$ a po integraci $\varphi_1(x, y, z) = x - y + z = c_1$. Z kanonického tvaru využijeme první rovnici, kterou zintegrujeme:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \qquad \int x\,dx = \int y\,dy, \qquad \varphi_2(x, y, z) = x^2 - y^2 = c_2.$$

Obecným řešením je první integrál, který můžeme zapsat ve tvaru

$$u(x, y, z) = g(x - y + z, x^2 - y^2),$$

kde $g = g(\xi_1, \xi_2)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných. O správnosti vypočítaného řešení se můžeme přesvědčit zkouškou. Nejdříve vypočítáme derivace u:

$$u_x = g_{\xi_1} + 2xg_{\xi_2}, \quad u_y = -g_{\xi_1} - 2yg_{\xi_2}, \quad u_z = g_{\xi_1}$$

a ty dosadíme do levé strany zadané rovnice:

$$yu_x + xu_y + (x - y)u_z = y(g_{\xi_1} + 2xg_{\xi_2}) + x(-g_{\xi_1} - 2yg_{\xi_2}) + (x - y)g_{\xi_1} = 0.$$

□

2.4 Kvazilineární rovnice

Budeme se zabývat kvazilineární rovnicí ve tvaru

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z) \qquad \text{v } \Omega, \tag{2.27}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je daná oblast a koeficienty a, b, c jsou spojitě diferencovatelné funkce na nějaké vhodné otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^3$, které nejsou současně nulové v žádném bodě této množiny. Ukážeme si postup jak tuto rovnici převést na homogenní lineární PDR prvního řádu v prostoru, tedy na rovnici, kterou už umíme řešit.

Předpokládejme, že $z = z(x,y)$ je řešením (2.27) a dále, že $U = U(x,y,z)$ je spojitě diferencovatelná funkce, pro niž platí $U(x,y,z(x,y)) = 0$, tj. funkce z je poslední rovnicí definována implicitně. Derivováním dostaneme vztahy:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

které postupně vynásobíme $a = a(x,y,z)$, $b = b(x,y,z)$ a sečteme:

$$a\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\underbrace{\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{=c(x,y,z)} = 0,$$

Odtud je vidět, že funkce $U = U(z,y,z)$ je řešením rovnice

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{2.28}$$

Platí i opačné tvrzení.

Věta 2.3 Nechť funkce $U = U(z,y,z)$ je spojitě diferencovatelná v $D \subset \mathbb{R}^3$ a splňuje rovnici (2.28). Jestliže navíc $\dfrac{\partial U}{\partial z} \neq 0$, potom existuje funkce $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice $U(x,y,z(x,y)) = 0$, má spojité derivace a řeší rovnici (2.27).

Příklad 2.10 Budeme hledat obecné řešení rovnice

$$yz_x + xz_y = (x - y).$$

Řešení: Nejdříve najdeme funkci U, která splňuje rovnici (2.28):

$$y\frac{\partial U}{\partial x} + x\frac{\partial U}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Tuto rovnici jsme řešili v příkladě 2.9 a nalezli jsme její obecné řešení:

$$U(x,y,z) = G(x - y + z, x^2 - y^2)$$

pro libovolnou spojitě diferencovatelnou funkci $G = G(s,t)$. Předpokládáme-li navíc, že $0 \neq \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial s}(x-y+z, x^2-y^2)$ plyne odtud, že rovnice $G(s,t) = 0$ implicitně určuje funkci $s = g(t)$, takovou, že platí $G(g(t),t) = 0$ a tedy řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$x - y + z = g(x^2-y^2), \quad \text{tj.} \quad z = y - x + g(x^2-y^2),$$

kde g je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. O správnosti vypočítaného řešení se lze přesvědčit zkouškou. □

Přidáme-li k rovnici (2.27) počáteční podmínku

$$z = z_0 \quad \text{na } \gamma,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ je hladká křivka, můžeme o jednoznačnosti řešení vyslovit větu analogickou větě 2.2, tj. jednoznačnost řešení je zaručena v okolí křivky γ.

Příklad 2.11 Budeme hledat řešení rovnice

$$xz_x + 2yz_y = x^2y + z,$$

které na křivce $\gamma = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2\}$ splňuje počáteční podmínku $z_0 = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro rovnici

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + 2y\frac{\partial U}{\partial y} + (x^2y+z)\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

máme tento kanonický charakteristický systém:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2y+z}.$$

Z první rovnice dostáváme:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{2y}, \quad 2\ln|x| = \ln|y| + \ln c_1, \quad \varphi_1(x,y,z) = \frac{x^2}{y} = c_1.$$

Dosazením $y = \frac{x^2}{c_1}$ do třetí části charakteristického systému dostaneme spolu s první částí charakteristické systému ODR, kterou vzřešíme separací proměnných a variací konstant:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\frac{x^4}{c_1} + z}, \quad z' = \frac{z}{x} + \frac{x^3}{c_1}, \quad z = xc_2 + \frac{x^4}{3c_1}.$$

Dosadíme $c_1 = \frac{x^2}{y}$ a po vyjádření c_2 dostaneme druhý první integrál:

$$z = xc_2 + \frac{x^2y}{3}, \quad \varphi_2(x,y,z) = \frac{z}{x} - \frac{xy}{3} = c_2.$$

Obecné řešení naší rovnice má tvar:

$$U(x,y,z) = F\left(\frac{x^2}{y}, \frac{z}{x} - \frac{xy}{3}\right) = 0,$$

kde F je libovolná, spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných. Obvyklým způsobem přejdeme k explicitnímu vyjádření řešení:

$$\frac{z}{x} - \frac{xy}{3} = f\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad z = \frac{x^2 y}{3} + x f\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

kde f je libovolná, spojitě diferencovatelná funkce. Nakonec určíme neznámou funkci f pomocí počáteční podmínky, jejíž využití vede na rovnici:

$$t^3 = \frac{t^3}{3} + t f(t), \quad f(t) = \frac{2t^2}{3}.$$

Řešení zadané úlohy má tvar:

$$z = \frac{x^2 y}{3} + \frac{2x^5}{3y^2}.$$

O správnosti vypočítaného řešení se lze přesvědčit zkouškou. □

Kontrolní otázky

1. Zapište homogenní lineární PDR prvního řádu v rovině. Vysvětlete pojem charakteristických křivek.
2. Kdy má počáteční úloha pro homogenní lineární PDR prvního řádu v rovině právě jedno řešení? Jak se toto řešení chová?
3. Co je to první integrál? K čemu se používá?
4. Zapište homogenní lineární PDR prvního řádu v prostoru. Jak se zavádí systém charakteristických křivek?
5. Zapište kanonický tvar charakteristického systému pro homogenní lineární PDR prvního řádu v rovině a v prostoru a vysvětlete jak se používá při výpočtu řešení.
6. Zapište kvazilineární PDR prvního řádu v prostoru. Jak se postupuje při jejím řešení?.
7. Jak se postupuje při řešení nehomogenní lineární PDR prvního řádu v rovině?

Úlohy k samostatnému řešení

1. $2u_x - u_y = 0, u(x,1) = 1 + x^2$.
2. $u_x + yu_y = 0, u(2,y) = \sin y$.
3. $u_x + xu_y = 0, u(0,y) = y$.
4. $u_x + yu_y + 2zu_z = 0, u(x,1,z) = e^x/z$.
5. $xu_x + yu_y + 2zu_z = 0, u(x,y,1) = xy$.
6. $yu_x - xu_y + 2xyu_z = 0, u(1,y,z) = z - 1$.
7. $xz_x - yz_y = x^2 + y^2, z(x,-x) = x^2$.
8. $xz_x + yz_y = 2z, z(x,1) = x$.
9. $yzz_x + xzz_y = 2xy, z(x,0) = 2x$.

KAPITOLA

3

KLASIFIKACE LINEÁRNÍCH ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU

Pro lineární PDR druhého řádu existují tři typy rovnic se zcela odlišným chováním. Základem jejich klasifikace je transformace na tzv. *kanonický tvar*. Pro každý typ rovnic existuje jeden kanonický tvar, na nějž lze ostatní rovnice daného typu převést. Při transformaci mají rozhodující roli členy s nejvyšší (druhou) derivací, o členy s nižšími derivacemi se proto (při klasifikaci) budeme zajímat pouze okrajově.

3.1 Klasifikace v rovině

Budeme uvažovat rovnici pro proměnné x, y ve tvaru

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{3.1}$$

kde koeficienty a, b, c nejsou současně všechny nulové a mohou závist na x a y. V lineárním případě je funkce f lineární také v proměnných u, u_x, u_y. Pro klasifikaci to však není podstatné. Dále budeme předpokládat dostatečnou hladkost všech funkcí na určité oblasti Ω.

Abychom vysvětlili zavedení charakteristické rovnice a charakteristických křivek, budeme uvažovat Cauchyho úlohu, kdy na (dostatečně hladké) křivce

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : \ t \in J\},$$

kde $J \subset \mathbb{R}$ je vhodný interval, předepisujeme pro řešení u *počáteční podmínky*: funkční hodnoty a hodnoty derivací ve směru různém od tečného směru křivky γ. Bude nás zajímat otázka jaké křivky γ vylučují řešitelnost Cauchyho počáteční úlohy. Hodnoty derivací pro předpokládané řešení u na křivce γ vyjádříme parametrickým popisem:

$$p(t) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q(t) = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r(t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad u(t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad v(t) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Derivace podle t budeme zapisovat tečkou. Platí

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dot{x}(t) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dot{y}(t),\\ \dot{q}(t) &= +\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dot{x}(t) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\dot{y}(t).\end{aligned}$$

Tyto rovnice spolu s PDR (3.1) tvoří soustavu lineárních rovnic (ve zkráceném zápisu)

$$\begin{array}{ccccccl} ar & + & bu & + & cv & = f, \\ \dot{x}r & + & \dot{y}u & & & = \dot{p}, \\ & & \dot{x}u & + & \dot{y}v & = \dot{q}, \end{array}$$

kde jako neznáme uvažujeme r, u a v. Determinant této soustavy má tvar

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a(\dot{x})^2 - b(\dot{x}\dot{y}) + c(\dot{x})^2.$$

Aby měla lineární soustava jediné řešení, musí být její determinant nenulový. Je-li nulový, pak soustav nemá žádné řešení nebo je jich nekonečně mnoho. Cauchyho počáteční úlohu proto nelze formulovat na křivce γ, jejíž parametrický popis je řešením diferenciální rovnice

$$a(\dot{y})^2 - b(\dot{x}\dot{y}) + c(\dot{x})^2 = 0. \tag{3.2}$$

Tato rovnice je *charakteristickou rovnicí* příslušnou PDR (3.1) a systém křivek, který ji splňuje, jsou *charakteristické křivky*.

Pro praktické počítání se používají další tvary charakteristické rovnice. Je-li $\dot{x} \neq 0$, můžeme vydělit $(\dot{x})^2$ a dostaneme charakteristickou rovnici ve tvaru

$$a(y')^2 - b(y') + c = 0, \tag{3.3}$$

přičemž jsme použili $y' = \dot{y}/\dot{x}$. Charakteristické křivky pak hledáme jako funkce $y = y(x)$ integrací rovnosti

$$y'_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a \neq 0. \tag{3.4}$$

Podobně lze charakteristické křivky hledat jako funkce $x = x(y)$.

Výhodné je hledat charakteristické křivky v implicitním tvaru $n(x, y) = c$. Protože pro derivaci implicitně zadané funkce platí vzorec $y' = -n_x/n_y$ při $n_y \neq 0$, můžeme jeho dosazením do (3.3) zapsat charakteristickou rovnici jako

$$an_x^2 + bn_x n_y + cn_y^2 = 0. \tag{3.5}$$

Všimněme si změny znaménka. Při výpočtu nyní postupujeme tak, že vydělíme n_y^2 ($n_y \neq 0$), označíme $\lambda = n_x/n_y$ a vyřešíme kvadratickou rovnici

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.6}$$

Je-li $\bar{\lambda}$ kořen této rovnice, dostáváme lineární PDR prvního řádu

$$n_x - \bar{\lambda} n_y = 0. \tag{3.7}$$

Je-li $\bar{\lambda}$ konstantní, má první integrál této rovnice má tvar $\varphi(x,y) = \bar{\lambda}x + y$. Protože nám stačí libovolné řešení rovnice (3.7), vezmeme to nejednodušší, $n(x,y) = \bar{\lambda}x + y$ (volíme $g(\xi) = \xi$).

Je zřejmé, že o počtu systémů charakteristických křivek, jejich existenci nebo neexistenci, rozhoduje znaménko diskriminantu

$$D = b^2 - 4ac. \tag{3.8}$$

Znaménko diskriminantu je proto základem pro klasifikaci PDR (3.1).

Definice 3.2 a) Jestliže $D > 0$, nazývá se rovnice (3.1) hyperbolická.
b) Jestliže $D = 0$, nazývá se rovnice (3.1) parabolická.
c) Jestliže $D < 0$, nazývá se rovnice (3.1) eliptická.

V hyperbolickém případě má kvadratická rovnice (3.6) dva různé reálné kořeny, kterým odpovídají v daném bodě dva charakteristické směry. Daným bodem procházejí dvě charakteristické křivky, jejichž tečny jsou určeny charakteristickými směry. V parabolickém případě má kvadratická rovnice (3.6) jeden reálný kořen, jemuž odpovídá jeden charakteristický směr a jedna charakteristická křivka, jejíž tečna je v daném bodě určena charakteristickým směrem. V eliptickém případě nemá kvadratická rovnice (3.6) reálný kořen a charakteristický směr ani charakteristická křivka neexistuje.

Poznámka

Vysvětlíme terminologii z definice (3.2). Rovnici (3.1) přiřadíme v daném bodě kvadratickou formu

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.9}$$

Je-li $D < 0$, je forma Q nulová na dvou přímkách, které jsou určeny charakteristickými směry, jinak nabývá kladných i záporných hodnot, takže je indefinitní. Jejím grafem je sedlová plocha. Vrstevnice této plochy jsou hyperboly. Je-li $D = 0$, je forma Q všude kladná, nebo všude záporná vyjma přímky určené charakteristickým směrem. Je tedy pozitivně semidefinitní, nebo negativně semidefinitní. Řezy grafem této formy kolmé na rovinu xy jsou paraboly. Je-li $D > 0$, je forma Q vyjma počátku všude kladná, je pozitivně definitní, nebo všude záporná, je negativně definitní. Její vrstevnice jsou elipsy.

Poznámka

Kvadratickou formu (3.9) lze zapsat pomocí matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x,y)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Klasifikaci PDR (3.1) můžeme provést pomocí klasifikace kvadratických forem, která používá vlastní čísla matice **A**. PDR (3.1) je hyperbolická, je-li jedno vlastní číslo kladné a druhé záporné. PDR (3.1) je parabolická, je-li jedno vlastní číslo nulové a druhé nenulové. PDR (3.1) je eliptická, jsou-li vlastní čísla současně kladná, nebo současně záporná.

V následujících příkladech vypočítáme systémy charakteristických křivek pro konkrétní PDR (3.1).

Příklad 3.12 Budeme klasifikovat a určíme charakteristiky následující rovnice

$$u_{xx} - (y^2+1)u_{yy} = yu_y.$$

Řešení: V tomto příkladě je $a = 1, b = 0, c = -(y^2+1)$, takže pro diskriminant dostáváme $D = 4(y^2+1) > 0$. Daná rovnice je proto hyperbolická. Charakteristická rovnice typu (3.3) má tvar

$$(y')^2 - (y^2+1) = 0.$$

Její řešení hledáme z obyčejné diferenciální rovnice, kterou řešíme pomocí separace proměnných:

$$y' = \pm\sqrt{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \pm \int dx.$$

Integrací dostaneme

$$\ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| = \pm x + \ln c \quad (= \ln ce^{\pm x})$$

a po odlogaritmování zapíšeme dva systémy charakteristických křivek:

$$\xi(x,y) = e^{-x}\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = c_1, \quad \eta(x,y) = e^{x}\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = c_2.$$

□

Příklad 3.13 Budeme klasifikovat a určíme charakteristiky následující rovnice

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$$

Řešení: V tomto příkladě je $a = 1$, $b = c = 4$ a $D = 0$. Daná rovnice je proto parabolická. Charakteristická rovnice typu (3.3) má tvar

$$(y')^2 - 4y' + 4 = 0.$$

Dostáváme

$$y' = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + c.$$

Daná rovnice má jeden systém charakteristik tvaru $\eta(x,y) = y - 2x = c$. □

Příklad 3.14 Budeme klasifikovat a určíme charakteristiky následující rovnice

$$4u_{xx} + 12u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$$

Řešení: V tomto příkladě je $a = 4$, $b = 12$, $c = 13$ a $D = -64$. Daná rovnice je eliptická a charakteristiky proto neexistují. Poznamenejme však, že charakteristickou rovnici

$$4(y')^2 - 12y' + 13 = 0$$

umíme vyřešit v komplexním oboru:

$$y' = \frac{12 \pm 8i}{8} = \frac{3}{2} \pm i \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x \pm ix + c,$$

nebo-li

$$\varphi(x,y) = y - \frac{3}{2}x + ix = c_1, \quad \psi(x,y) = y - \frac{3}{2}x - ix = c_2.$$

Tyto „komplexní charakteristiky“ lze využít při transformaci eliptické rovnice na kanonický tvar. □

Poznámka

Pokud koeficienty a, b a c nejsou konstanty, může nastat situace, že rovnice (3.1) mění svůj typ. Například rovnice $xu_{xx} + u_{yy} = 0$ je pro $x < 0$ hyperbolická ($D = -4x > 0$), pro $x > 0$ je eliptická ($D = -4x < 0$) a pro $x = 0$ je parabolická ($D = 0$).

3.2 Převod na kanonický tvar

Opět budeme studovat rovnici

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{3.11}$$

s koeficienty a, b, c, které nejsou současně všechny nulové a mohou závist na x a y.

Budeme uvažovat transformační funkce

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \tag{3.12}$$

které převádějí proměnné (x, y) na nové proměnné (ξ, η). O transformaci předpokládáme, že je regulární, tj. ξ a η jsou C^1-funkce a jsou nezávislé:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mezi původní funkcí $u(x,y)$ a transformovanou funkcí $u^*(\xi,\eta)$ je následující transformační vztah:

$$u(x,y) = u^*(\xi(x,y), \eta(x,y)). \tag{3.13}$$

Podle pravidel pro derivování složené funkce vyjádříme derivace až do druhého řádu:

$$\begin{aligned}
u_x &= u^*_\xi \xi_x + u^*_\eta \eta_x, \\
u_y &= u^*_\xi \xi_y + u^*_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= u^*_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u^*_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u^*_{\eta\eta}\eta_x^2 + u^*_\xi \xi_{xx} + u^*_\eta \eta_{xx}, \\
u_{xy} &= u^*_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u^*_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u^*_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u^*_\xi \xi_{xy} + u^*_\eta \eta_{xy}, \\
u_{yy} &= u^*_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u^*_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u^*_{\eta\eta}\eta_y^2 + u^*_\xi \xi_{yy} + u^*_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Transformace členu f na pravé straně pro převod na kanonický tvar není podstatná, budeme ji stručně označovat f^*. Transformovanou rovnici (3.11) zapíšeme ve tvaru

$$a^* u^*_{\xi\xi} + b^* u^*_{\xi\eta} + c^* u^*_{\eta\eta} = f^*, \tag{3.14}$$

kde

$$\begin{aligned} a^* &= a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ b^* &= 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y, \\ c^* &= a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

3.2.1 Kanonický tvar pro hyperbolickou rovnici

Pravé strany koeficientů a^*, c^* jsou vyjádřeny výrazem, který odpovídá charakteristické rovnici ve tvaru (3.5). V hyperbolickém případě máme dva systémy charakteristik, které můžeme popsat implicitně pomocí dvou funkcí proměnných x, y. Použijeme-li funkce vyjadřující tyto implicitní popisy jako transformační funkce (3.12), podaří se nám vynulovat koeficienty a^* a c^*. Koeficientem b^* vydělíme (musí být nenulový) a z (3.14) tak dostaneme *kanonický tvar hyperbolické rovnice*

$$u^*_{\xi\eta} = \bar{f}^*, \tag{3.15}$$

kde $\bar{f}^* = f^*/b^*$.

Při převodu dané rovnice na kanonický tvar nejprve vypočteme z kvadratické rovnice (3.6) její kořeny λ_1, λ_2. Pak odvodíme implicitní popis charakteristik vyřešením dvou PDR prvního řádu

$$\xi_x - \lambda_1\xi_y = 0, \quad \eta_x - \lambda_2\eta_y = 0,$$

čímž získáme transformační funkce (3.12). Transformační funkce můžeme odvodit také integrací (3.4), jak jsme viděli v příkladu 3.12. Nakonec pomocí transformačních funkcí vyjádříme derivace hledaného řešení a dosadíme je do dané rovnice podobně jako v obecném případě.

Používá se ještě *druhý kanonický tvar hyperbolické rovnice*

$$u^{**}_{\sigma\sigma} - u^{**}_{\tau\tau} = f^{**}, \tag{3.16}$$

který vznikne z (3.15) pomocí substituce

$$\sigma = \xi + \eta, \quad \tau = \xi - \eta. \tag{3.17}$$

Příklad 3.15 Na kanonický tvar převedeme rovnici

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 2u_x + u_y.$$

Řešení: Protože $D = 4 > 0$, je zadaná rovnice hyperbolická. Vyřešením rovnice (3.6), tj. $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, získáme kořeny $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. PDR prvního řádu

$$\xi_x + \xi_y = 0, \quad \eta_x + 3\eta_y = 0$$

mají charakteristiky $x - y = c_1$ a $3x - y = c_2$ (odvoďte) a jejich nejjednodušší řešení proto je

$$\xi(x,y) = x - y, \quad \eta(x,y) = 3x - y.$$

Toto jsou transformační funkce (3.12). Vyjádříme-li nyní z (3.13) derivace až do druhého řádu, dostaneme

$$\begin{aligned} &u_x = u^*_\xi + 3u^*_\eta, \quad u_y = -u^*_\xi - u^*_\eta, \\ &u_{xx} = u^*_{\xi\xi} + 6u^*_{\xi\eta} + 9u^*_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -u^*_{\xi\xi} - 4u^*_{\xi\eta} - 3u^*_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u^*_{\xi\xi} + 2u^*_{\xi\eta} + u^*_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice a po úpravě dojdeme k tomuto kanonickému tvaru:

$$u^*_{\xi\eta} = -\frac{1}{4}u^*_\xi - \frac{5}{4}u^*_\eta. \tag{3.18}$$

Odvodíme ještě druhý kanonický tvar (3.16) pomocí transformace (3.17):

$$\sigma(\xi,\eta) = \xi + \eta, \quad \tau(\xi,\eta) = \xi - \eta.$$

Z transformačního vztahu $u^*(\xi,\eta) = u^{**}(\sigma(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta))$ vypočteme potřebné derivace:

$$u^*_\xi = u^{**}_\sigma + u^{**}_\tau, \quad u^*_\eta = u^{**}_\sigma - u^{**}_\tau, \quad u^*_{\xi\eta} = u^{**}_{\sigma\sigma} - u^{**}_{\tau\tau},$$

které dosadíme do (3.18) a po úpravě dojdeme k tomuto vyjádření zadané rovnice:

$$u^{**}_{\sigma\sigma} - u^{**}_{\tau\tau} = -\frac{3}{2}u^{**}_\sigma + u^{**}_\tau.$$

□

3.2.2 Kanonický tvar pro parabolickou rovnici

V parabolickém případě máme jen jeden systém charakteristik, které můžeme popsat implicitně pomocí jedné funkce proměnných x, y. Stejnou úvahou jako v hyperbolickém případě dojdeme k tomu, že se nám podaří vynulovat jen jeden z koeficientů a^*, c^*. V další budeme nulovat c^*. Podaří se nám ovšem ještě ukázat, že se vynuluje také koeficient b^*. Koeficientem a^* vydělíme (musí být nenulový) a z (3.14) dostaneme *kanonický tvar parabolické rovnice*

$$u^*_{\xi\xi} = \bar{f}^*, \tag{3.19}$$

kde $\bar{f}^* = f^*/a^*$. Aby rovnice nedegenerovala na obyčejnou diferenciální rovnici, zapisujeme kanonický tvar tak, že předpokládáme závislost pravé strany f^* na u_η. Píšeme:

$$qu^*_\eta = u^*_{\xi\xi} + \bar{f}^{**},$$

kde $q \neq 0$.

Při převodu dané rovnice na kanonický tvar nejprve vypočteme z kvadratické rovnice (3.6) kořen $\lambda = -b/(2a)$. Transformační funkce (3.12) získáme vyřešením dvou PDR prvního řádu

$$\xi_x - \mu\xi_y = 0, \quad \eta_x - \lambda\eta_y = 0.$$

Hodnota μ je libovolná, jen musí platit $\mu \neq \lambda$, aby transformace byla regulární. Tím máme zaručeno $c^* = 0$. Protože $\eta_x = -b/(2a)\eta_y$, můžeme toto vyjádření η_x dosadit do b^* a odvodíme:

$$\begin{aligned} b^* &= 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y \\ &= -b\xi_x\eta_y + b\xi_x\eta_y - b^2/(2a)\xi_y\eta_y + 2c\xi_y\eta_y \\ &= -(b^2 - 4ac)/(2a)\xi_y\eta_y. \end{aligned}$$

Protože v parabolickém případě je $D = b^2 - 4ac = 0$, dostáváme $b^* = 0$.

Příklad 3.16 Na kanonický tvar převedeme rovnici

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = u_x + u_y.$$

Řešení: Protože $D = 0$, daná rovnice je parabolická. Kvadratická rovnice $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ má kořen $\lambda = -3$. Pro jednoduchost volíme $\mu = 0$, takže řešíme PDR prvního řádu

$$\xi_x = 0, \quad \eta_x + 3\eta_y = 0,$$

které mají charakteristiky $y = c_1$ a $3x - y = c_2$ (odvoďte) a jejich nejjednodušší řešení je

$$\xi(x,y) = y, \quad \eta(x,y) = 3x - y.$$

Toto jsou naše transformační funkce (3.12). Vyjádříme-li nyní z (3.13) derivace až do druhého řádu, dostaneme

$$\begin{aligned} &u_x = 3u^*_\eta, \quad u_y = u^*_\xi - u^*_\eta, \\ &u_{xx} = 9u^*_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = 3u^*_{\xi\eta} - 3u^*_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u^*_{\xi\xi} - 2u^*_{\xi\eta} + u^*_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice a po úpravě dojdeme k tomuto kanonickému tvaru:

$$u^*_{\xi\xi} = \frac{1}{9}u^*_\xi + \frac{2}{9}u^*_\eta.$$

□

3.2.3 Kanonický tvar pro eliptickou rovnici

V eliptickém případě neexistují charakteristiky a rovnice (3.6) nemá reálné kořeny. Má ovšem dva komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu, \quad \mu = -\frac{b}{2a}, \quad \nu = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.20}$$

Pro tyto kořeny určíme dvě komplexní funkce φ, ψ jako řešení dvou PDR prvního řádu

$$\varphi_x - (\mu + i\nu)\varphi_y = 0, \quad \psi_x - (\mu - i\nu)\psi_y = 0.$$

Vzhledem k tomu, že kořeny jsou komplexně sdružené, stačí určit pouze φ a položit $\psi(x,y) = \overline{\varphi(x,y)}$, protože komplexně sdružená funkce je řešením druhé rovnice. Kombinací φ a ψ určíme reálné transformační funkce (3.12) takto:

$$\xi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad \eta = \frac{1}{2i}(\varphi - \psi). \tag{3.21}$$

Dosazením do a^*, b^* a c^* zjistíme, že platí $a^* = c^*$ a $b^* = 0$. V (3.14) vydělíme a^* (musí být nenulové) a dostaneme *kanonický tvar eliptické rovnice*

$$u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta} = \bar{f}^*, \tag{3.22}$$

kde $\bar{f}^* = f^*/a^*$. Vztahy pro koeficienty a^*, b^*, c^* dokazovat nebudeme, důkaz lze najít v [3], str. 38.

Příklad 3.17 Na kanonický tvar převedeme rovnici

$$4u_{xx} + 12u_{xy} + 13u_{yy} = 2u_x - u_y.$$

Řešení: Protože $D = -64$, je daná rovnice eliptická. Kvadratická rovnice $4\lambda^2 + 12\lambda + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda = -\frac{3}{2} \pm i$. Řešíme tedy dvě PDR prvního řádu

$$\varphi_x - \left(-\frac{3}{2} + i\right)\varphi_y = 0, \quad \psi_x - \left(-\frac{3}{2} - i\right)\psi_y = 0,$$

které mají řešení

$$\varphi(x,y) = \left(y - \frac{3}{2}x\right) + ix, \quad \psi(x,y) = \left(y - \frac{3}{2}x\right) - ix.$$

Transformační funkce (3.21) pak mají tvar

$$\xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = x.$$

Z (3.13) odvodíme derivace až do druhého řádu:

$$\begin{aligned}
&u_x = -\frac{3}{2}u^*_\xi + u^*_\eta, \quad u_y = u^*_\xi, \\
&u_{xx} = \frac{9}{4}u^*_{\xi\xi} - \frac{6}{2}u^*_{\xi\eta} + u^*_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -\frac{3}{2}u^*_{\xi\xi} + u^*_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u^*_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice a dojdeme k následujícímu kanonickému tvaru:

$$u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta} = -u^*_\xi + \frac{1}{2}u^*_\eta.$$

□

3.3 Klasifikace v prostoru vyšší dimenze

V prostoru dimenze d pro proměnnou $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ budeme uvažovat rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right), \tag{3.23}$$

kde a_{ij} jsou konstantní koeficienty. Pro klasifikaci je podstatná linearita členů s druhou derivací, které jsou na levé straně, ostatní členy jsou zahrnuty do pravé strany f a mohou být nelineární. Koeficienty a_{ij} tvoří matici $\mathbf{A}$ řádu d. Protože smíšené derivace se na levé straně vyskytují dvakrát, můžeme odpovídající koeficienty upravit vždy tak, že $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i \neq j$ (porovnej s (3.10)). Matice $\mathbf{A}$ je pak symetrická a má pouze reálná vlastní čísla. Znaménka těchto vlastních čísel lze použít pro klasifikaci rovnice (3.23) (porovnej s druhou poznámkou v odstavci (3.1)).

Definice 3.3 a) Rovnice (3.23) je eliptická, jestliže všechna vlastní čísla matice A jsou nenulová a mají stejné znaménko (matice A je pozitivně definitní, nebo negativně definitní).
b) Rovnice (3.23) je hyperbolická, jestliže všechna vlastní čísla matice A jsou nenulová a jenom jedno je kladné nebo jenom jedno je záporné. Pokud kladných i záporných vlastních čísel je aspoň po dvou, rovnice se nazývá ultrahyperbolická (matice A je indefinitní).
c) Rovnice (3.23) je parabolická, jestliže aspoň jedno vlastní číslo matice A je nulové (matice A je pozitivně semidefinitní, nebo negativně semidefinitní, nebo singulární indefinitní).

Příklad 3.18 Budeme klasifikovat následující rovnice

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0,\\
&\text{b)}\quad u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 3u_z = 0,\\
&\text{c)}\quad 3u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} - 2u_{yz} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z = 0.
\end{aligned}$$

Řešení: Při klasifikaci nás zajímají pouze koeficienty u druhých derivací. V případě a) máme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

která má vlastní čísla $\lambda_1 \doteq 0,0885$, $\lambda_2 \doteq 1,8705$ a $\lambda_3 \doteq 6,0410$. Rovnice je eliptická. V případě b) máme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

která má vlastní čísla $\lambda_1 \doteq -0,5341$, $\lambda_2 \doteq 1,4827$ a $\lambda_3 \doteq 5,0514$. Rovnice je hyperbolická. V případě c) máme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

která má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \doteq 1,3542$ a $\lambda_3 \doteq 6,6458$. Rovnice je parabolická. □

Podobně jako v prostoru dimenze $d = 2$ můžeme každému typu rovnice přiřadit kanonický tvar. Pro jednoduchost zmíníme kanonické tvary v prostoru dimenze $d = 3$ pro transformační funkce označené

$$\xi = \xi(x,y,z), \quad \eta = \eta(x,y,z), \quad \zeta = \zeta(x,y,z).$$

které převádějí proměnné (x,y,z) na nové proměnné (ξ,η,ζ) a kdy mezi původní funkcí $u(x,y,z)$ a transformovanou funkcí $u^*(\xi,\eta,\zeta)$ je transformační vztah

$$u(x,y,z) = u^*(\xi(x,y,z),\eta(x,y,z),\zeta(x,y,z)).$$

Transformační funkce lze odvodit pomocí transformace kvadratické formy určené maticí $\mathbf{A}$:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Podrobný rozbor uvádět nebudeme, napíšeme pouze výsledné kanonické tvary, které jsou obdobou kanonický tvarů pro $d = 2$.

Kanonický tvar pro eliptickou rovnici:

$$u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta} + u^*_{\zeta\zeta} = f^*.$$

Kanonický tvar pro hyperbolickou rovnici:

$$u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta} - u^*_{\zeta\zeta} = f^*.$$

Kanonický tvar pro parabolickou rovnici:

$$u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta} = f^*.$$

Pravá strana f^* vždy obsahuje derivace nižších řádů a další veličiny (jaké?). Kanonický parabolické rovnice popsaný v definici (3.2) je obecný, zahrnuje všechny tvary, které nejsou zahrnuty pod tvar eliptický a hyperbolický.

3.4 D'Alembertova metoda

D'Alembertova metoda umožňuje vyřešit některé rovnice druhého řádu převodem na kanonický tvar. Spočívá v provedení následujících tří kroků:

1. Danou rovnici převedeme na kanonický tvar.
2. Nalezneme obecné řešení, které závisí na dvou libovolných funkcích (v prostoru dimenze $d = 2$).
3. Rovnici transformujeme zpět do původních proměnných a z počátečních nebo okrajových podmínek určíme neznámé funkce (nalezneme tak partikulární řešení).

Postup budeme demonstrovat na dvou příkladech.

Příklad 3.19 Vyřešíme rovnici

$$xu_{xx} - (2x + y)u_{xy} + 2yu_{yy} + \frac{2x + y}{y - 2x}(u_x - 2u_y) = 0 \tag{3.24}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x, 1) = 5x^2, \quad u_y(x, 1) = 2x^2 + 4x. \tag{3.25}$$

Řešení: Protože

$$D = (2x + y)^2 - 8xy = (2x - y)^2,$$

je daná rovnice hyperbolická vyjma přímky $y = 2x$, kde není definována. Budeme ji řešit mimo uvedenou přímku. Charakteristiky určíme ze dvou rovnic (3.4), která mají tvar

$$y' = \frac{-2x - y \pm (2x - y)}{2x} = \begin{cases} -\dfrac{y}{x}, \\ -2. \end{cases}$$

Řešením první ODR dostáváme:

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad xy = c_1;$$

řešením druhé ODR dostáváme:

$$y' = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2\int dx \quad \Rightarrow \quad y + 2x = c_2.$$

Všimněme si, že počáteční podmínka (3.25) není předepsaná na charakteristice. Transformační funkce mají tvar

$$\xi(x,y) = xy, \quad \eta(x,y) = y + 2x.$$

Derivováním $u(x,y) = u^*(\xi(x,y), \eta(x,y))$ dostaneme

$$u_x = yu^*_\xi + 2u^*_\eta, \quad u_y = xu^*_\xi + u^*_\eta, \quad u_{xx} = y^2u^*_{\xi\xi} + 4yu^*_{\xi\eta} + 4u^*_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = xyu^*_{\xi\xi} + (2x+y)u^*_{\xi\eta} + 2u^*_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = x^2u^*_{\xi\xi} + 2xu^*_{\xi\eta} + u^*_{\eta\eta}.$$

Dosazením do (3.24) a úpravou odvodíme rovnici $-(2x-y)^2u^*_{\xi\eta} = 0$, kterou mimo přímku $y = 2x$ vydělíme výrazem $-(2x-y)^2$, čímž dojdeme ke kanonickému tvaru hyperbolické rovnice s nulovou pravou stranou

$$u^*_{\xi\eta} = 0.$$

Integrací zjistíme, že obecné řešení této rovnice má tvar $u^*(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kde f, g jsou libovolné C^2-diferencovatelné funkce. Po zpětné substituci dojdeme k obecnému tvaru řešení rovnice (3.24):

$$u(x,y) = f(xy) + g(y + 2x). \tag{3.26}$$

Nyní určíme funkce f a g z počátečních podmínek (3.25). Z první podmínky (3.25) plyne

$$5x^2 = f(x) + g(1 + 2x). \tag{3.27}$$

Derivací podle y odvodíme z (3.26) vztah $u_y(x,y) = xf'(xy) + g'(y+2x)$, který použijeme ve druhé podmínce (3.25):

$$2x^2 + 4x = xf'(x) + g'(1 + 2x). \tag{3.28}$$

Derivací (3.27) vznikne $10x = f'(x) + 2g'(1+2x)$. Od této rovnice odečteme dvojnásobek rovnice (3.28) a po snadné úpravě dostáváme:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2.$$

Z (3.27) pak plyne $g(1+2x) = 4x^2$ a odtud po substituci $t = 1 + 2x$ získáme

$$g(t) = (t-1)^2.$$

Použitím těchto výsledků v (3.26) zapíšeme řešení naší úlohy:

$$u(x,y) = (xy)^2 + (y + 2x - 1)^2.$$

$\square$

Příklad 3.20 Vyřešíme rovnici

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \tag{3.29}$$

s počáteční podmínkou

$$u(2x, x) = 1 + x^2, \quad u_y(2x, x) = 0. \tag{3.30}$$

Řešení: Protože $D = 0$, jedná se o rovnici parabolickou. Charakteristiky určíme z rovnice (3.4):

$$y' = \frac{2}{2} = 1$$

odkud dostáváme:

$$x - y = c.$$

Transformační funkce mají tvar (porovnejte s příkladem 3.16):

$$\xi(x, y) = y, \quad \eta(x, y) = y - x.$$

Derivováním $u(x, y) = u^*(\xi(x, y), \eta(x, y))$ dostaneme

$$\begin{aligned} &u_x = -u^*_\eta, \quad u_y = u^*_\xi + u^*_\eta, \\ &u_{xx} = u^*_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -u^*_{\xi\eta} - u^*_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u^*_{\xi\xi} + 2u^*_{\xi\eta} + u^*_{\eta\eta} \end{aligned}$$

a dosazením do (3.29) odvodíme kanonický tvar parabolické rovnice

$$u^*_{\xi\xi} = 0.$$

Integrací zjistíme, že obecné řešení této rovnice má tvar $u^*(\xi, \eta) = \xi f(\eta) + g(\eta)$, kde f, g jsou libovolné C^2-diferencovatelné funkce. Po zpětné substituci dojdeme k obecnému tvaru řešení rovnice (3.29):

$$u(x, y) = y f(y - x) + g(y - x). \tag{3.31}$$

Funkce f a g určíme z počátečních podmínek (3.30). Z první podmínky (3.30) plyne

$$1 + x^2 = x f(-x) + g(-x). \tag{3.32}$$

Derivací podle y odvodíme z (3.31) vztah $u_y(x, y) = f(y - x) + y f'(y - x) + g'(y - x)$, který použijeme ve druhé podmínce (3.30):

$$0 = f(-x) + x f'(-x) + g'(-x). \tag{3.33}$$

Derivací (3.32) vznikne $2x = f(-x) - x f'(-x) - g'(-x)$. Sečtením této rovnice s rovnicí (3.33) dostaneme:

$$2x = 2f(-x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x.$$

Z (3.32) pak plyne $1 + x^2 = x^2 + g(-x) = 4x^2$ a odtud $g(x) = 1$. Použitím těchto výsledků v (3.31) zapíšeme řešení naší úlohy:

$$u(x, y) = y(x - y) + 1.$$

□

Kontrolní otázky

1. Jak vypadají různé tvary charakteristické rovnice pro rovnice druhého řádu v rovině.
2. Jaké typy rovnic druhého řádu rozlišujeme, podle čeho je v rovině poznáme? Jak vypadají jejich kanonické tvary?
3. Jak určíme transformační funkce pro převod na kanonický tvar?
4. Jak můžeme klasifikovat rovnice druhého řádu v prostoru vyšší dimenze.
5. Jak vypadají kanonické tvary pro diferenciální rovnice druhého řádu v prostoru?
6. Vysvětlete princip D'Alembertovy metody.

Úlohy k samostatnému řešení

Klasifikujte a převeďte na kanonický tvar.
1. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_x = 0.$
2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 2u_x + u_y.$
3. $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$
4. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$
5. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0.$
6. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$
7. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0.$
8. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x + 5u_y + 4u = 0.$
9. $5u_{xx} - 6u_{xy} + 2u_{yy} = u_y.$

KAPITOLA

4

ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ MODELY

V této kapitole se seznámíme s abstraktní matematickou formulací zákonů zachování v globální (integrální) a lokální (bodové) podobě. S jejich pomocí odvodíme parciální diferenciální rovnice popisujících některé fyzikální jevy. Seznámíme se tak s *matematickým modelováním*, jehož jedním z hlavních nástrojů jsou právě parciální diferenciální rovnice. Matematické modelování se přirozeně využívá i mimo oblast fyziky v dalších přírodních ale jiných vědách. Obecně matematickým modelem rozumíme využití matematických prostředků pro popis zkoumaného jevu (reality).

4.1 Zákony zachování

Při matematickém modelování fyzikálních jevů se používají zákony zachování energie, hybnosti, hmotnosti atp. Obecný princip různých zákonů zachování je podobný, zpravidla se pracuje se třemi veličinami: stav, tok a zdroje. Zákony zachování vyjadřují skutečnost, že *změna stavu dané veličiny uvnitř určité oblasti odpovídá toku této veličiny přes hranici oblasti a jejímu přírůstku nebo úbytku způsobenému zdroji uvnitř oblasti*. Bez vazby na konkrétní fyzikální jev ukážeme přechod od integrálního vyjádření abstraktního zákona zachování k odpovídající diferenciální rovnici. Nejprve budeme tento přechod demonstrovat na jednodimenzionálním případě, pak přejdeme do dvou, resp. tří prostorovým dimenzím.

Při odvozování budeme používat standardní značení: t bude značit časovou proměnnou, x bude prostorová proměnná, $u = u(x,t)$ bude stavová funkce, $\phi = \phi(x,t)$ bude toková funkce a $f = f(x,t)$ bude funkce popisující vliv zdrojů. Budou-li mít některé veličiny vektorový charakter, budeme pro ně používat tučné symboly.

4.1.1 Evoluční zákon zachování v jednodimenzionálním případě

Představme si rovnou trubici s konstantním průřezem $A > 0$ umístěnou rovnoběžně s osou x. Na ose x zvolíme libovolný interval (a,b), $a \leq b$. Zákon zachování nebo také *bi-*

lanční vztah vyjádříme rovnicí obsahující u, ϕ a f:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)A\,\mathrm{d}x = A\phi(a,t) - A\phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)A\,\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

která říká, že změna množství stavové veličiny v trubici na úseku určeném intervalem (a,b) odpovídá přítoku v bodě a, odtoku v bodě b a celkové bilanci zdrojů na daném intervalu. Předpokládáme přitom, že tok při kladných hodnotách funkce ϕ probíhá podél osy x zleva doprava. Konstantu A můžeme vykrátit. Dále předpokládejme dostatečnou hladkost funkce u tak, že na levé straně (4.1) můžeme zaměnit pořadí derivování a integrování, a také dostatečnou hladkost funkce ϕ tak, že můžeme psát

$$\phi(a,t) - \phi(b,t) = -\int_a^b \phi_x(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Rovnici (4.1) přepíšeme do tvaru

$$\int_a^b (u_t(x,t) + \phi_x(x,t) - f(x,t))\,\mathrm{d}x = 0.$$

Protože jsme volili interval (a,b) libovolně, musí být integrand roven nule, tj.

$$u_t(x,t) + \phi_x(x,t) - f(x,t) = 0, \tag{4.2}$$

což je lokální verze rovnice (4.1).

4.1.2 Evoluční zákon zachování v obecném případě

Uvažujme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ v prostoru, $d = 3$ (nebo zjednodušeně v rovině, $d = 2$), která představuje prostředí vyplněné určitou látkou. Pro tuto látku budeme uvažovat stavovou funkci, tokovou funkci a funkci popisující hustotu rozložení zdrojů:

$$u = u(\mathbf{x},t), \quad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t), \quad f = f(\mathbf{x},t),$$

kde $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in \langle 0,T)$, $T > 0$. Stavovou funkci uvažujeme skalární, ale může být i vektorová. Toková funkce je vektorová (v prostoru) téměř vždy.

V prostorové analogii bilančního vztahu (4.1) budeme používat toto značení: $\Omega_B \subset \Omega$ bude libovolná bilanční podoblast oblasti Ω, $\partial\Omega_B$ bude hranice Ω_B a $\langle t_1, t_2\rangle \subset \langle 0,T)$ bude libovolný časový interval. Bilanční vztah v prostoru lze zapsat takto:

$$\int_{\Omega_B} u(\mathbf{x},t_2)\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega_B} u(\mathbf{x},t_1)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_B} f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t, \tag{4.3}$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ je jednotkový vektor vnější normály ke hranici $\partial\Omega_B$ v bodě $\mathbf{x} \in \partial\Omega_B$ a výraz $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})$ představuje skalární součin dvou trísložkový vektorů (dvousložkových v rovině), který určuje projekci vektoru $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)$ do směru $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Znaménko mínus na pravé straně (4.3) vyjadřuje skutečnost, že tok je kladný směrem ven z Ω_B. Poznamenejme ještě, že integrály přes Ω_B jsou objemové, kdežto integrál přes hranici $\partial\Omega_B$ je plošný (křivkový pro $d = 2$). Rovnost (4.3) je *evoluční zákon zachování v globální (integrálním) tvaru*.

Má-li stavová funkce u spojitou parciální vzhledem k časové proměnné, můžeme ji použít na levé straně (4.3) spolu s příslušným integrálem a po záměně pořadí integrace dostaneme:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_B} u_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_B} f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

Protože jsme časový interval volili libovolně, můžeme psát:

$$\int_{\Omega_B} u_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

Předpokládáme-li spojitou diferencovatelnost tokové funkce vzhledem k prostorové proměnné, můžeme použít *Gauss-Ostrogradského* větu (tj. *větu o divergenci*), kterou je následující rovnost:

$$\int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega_B} \mathrm{div}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Z (4.5) tak dostaneme rovnost

$$\int_{\Omega_B} u_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_B} \left(-\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t)\right)\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{4.6}$$

Protože jsme volili Ω_B libovolně, musí platit analogická rovnost pro integrandy (za předpokladu jejich dostatečné hladkosti):

$$u_t(\mathbf{x},t) + \mathrm{div}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t). \tag{4.7}$$

Rovnost (4.7) je *evoluční zákon zachování v lokálním (diferenciálním) tvaru*. Je to však pouze jedna rovnice pro dvě neznámé funkce u a $\boldsymbol{\phi}$. Funkce f je dána, může ale záviset na u, např. $f = f(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t))$. Samotný zákon zachování proto pro vytvoření matematického modelu nestačí, doplňujeme jej pomocí tzv. *konstitutivních vztahů*. Tyto vztahy svazují dohromady stavovou a tokovou funkci a jsou vypozorovány z dalších vlastností studovaných jevů. Zpravidla závisí na měřených konstantách.

4.1.3 Stacionární zákon zachování

Nezajímá-li nás vývoj daného systému v čase, říkáme, že studujeme *stacionárni stav* (také *ustálený stav*, *rovnovážný stav*). V takovém případě jsou uvažované veličiny nezávislé na čase, takže časové derivace ve výše uvedených zákonech zachování jsou nulové. *Stacionární zákon zachování v globální tvaru* je dán vztahem:

$$\int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4.8}$$

a *stacionární zákon zachování v lokálním tvaru* má tvar:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{4.9}$$

4.2 Transportní rovnice

Uvažujme konstitutivní vztah, kdy *tok ϕ je přímo úměrný stavu u (hustotě)*

$$\phi = cu$$

s konstantou úměrnosti c. Dosazením do (4.2) dostaneme za předpokladu nulového f tzv. *transportní rovnici*

$$u_t + cu_x = 0.$$

Popisuje například unášení látky v trubici s tekutinou proudící rychlostí c. Stavová veličina u zde přestavuje koncentraci unášené látky. Řešení lze zapsat ve tvaru

$$u(x,t) = F(x - ct),$$

kde F je libovolná diferencovatelná funkce. Tento výsledek lze interpretovat tak, že profil určený funkcí F v čase $t = 0$ se postupně nezměněn posunuje doprava rychlostí $c > 0$ (pravá postupná vlna). Je-li $c < 0$, posun probíhá doleva (levá postupná vlna).

O nelineárním transportu hovoříme, když tok $\phi = \phi(u)$ je nelineární funkcí hustoty u. Ze vztahu (4.2) dojdeme, opět za předpokladu $f = 0$, k diferenciální rovnici

$$u_t + \phi'(u)u_x = 0.$$

Transport s (radioaktivním) rozpadem popisuje rovnice

$$u_t + cu_x = -\lambda u,$$

kde konstanta λ je rychlost rozpadu. Zde je pravá strana funkcí u, tj. $f = -\lambda u$. (ODR popisující rozpad má tvar $u_t = -\lambda u$.)

4.3 Difuze

Difuze je samovolný proces, kdy látka proniká z míst s vyšší koncentrací do míst s nižší koncentrací. Může se jednat například o plyn v trubici, kde stavová veličina u popisuje koncentraci plynu. Na základě pozorování můžeme říci toto:

a) molekuly plynu se pohybují z míst s vyšší koncentrací do míst s nižší koncentrací,

b) čím je větší gradient, tím je větší tok.

4.3.1 Difuze v jedné dimenzi

Nejjednodušší konstituční vztah, který popisuje výše uvedená pozorování je tzv. *Fikův zákon*:

$$\phi = -ku_x,$$

kde $k > 0$ je difuzní konstanta. Dosazením do (4.2) při $f = 0$ dostaneme

$$u_t - ku_{xx} = 0,$$

což je jednorozměrná *difuzní rovnice*.

Kombinujeme-li transport a difuzi, použijeme konstitutivní vztah

$$\phi = cu - ku_x,$$

který dosadíme do (4.2) a dostaneme diferenciální rovnici

$$u_t + cu_x - ku_{xx} = 0.$$

Tato rovnice modeluje rozložení hustoty chemikálie unášené v trubici tekutinou proudící rychlostí c, která zároveň do této tekutiny difunduje s difuzní konstantou k.

4.3.2 Difuze ve více dimenzích

Uvažujeme-li difuzní proces v prostoru, bude mít *Fickův zákon* tvar:

$$\boldsymbol{\phi} = -k \operatorname{grad} u.$$

Tento konstitutivní vztah dosadíme do (4.7):

$$u_t - k \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0.$$

Použijeme-li rovnost $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$, kde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ je Lapaceův operátor, dostaneme

$$u_t - k\,\Delta u = 0,$$

což je *difuzní rovnice v prostoru*. Pro $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ se bude jednat o difuzní rovnici v rovině.

4.4 Vedení tepla

Vedení tepla modelujeme podobnými principy jako difuzi.

4.4.1 Vedení tepla jedné dimenzi

Budeme uvažovat tyč s konstantní hustotou ρ a konstantní měrnou tepelnou kapacitou c. Teplotu tyče v bodě x a v čase t označíme $u = u(x,t)$. Hustota tepelné energie je pak určena funkcí $\theta(x,t) = \rho c u(x,t)$. Konstituvním vztahem je zde *Fourierův tepelný zákon*, podle něhož je tepelný tok ϕ přímo úměrný gradientu teploty se zápornou konstantou úměrnosti, tj.

$$\phi = -K u_x,$$

kde K je konstanta tepelné vodivosti. Tento zákon vyjadřuje skutečnost, že teplo proudí z oblastí teplejších do oblastí chladnějších. Dosadíme-li výše uvedené vztahy do (4.2), tj. do $\theta_t + \phi_x - f = 0$ pro $f = 0$, obdržíme

$$u_t - k u_{xx} = 0,$$

kde $k = K/\rho c$. Jedná se opět o jednorozměrnou difuzní rovnici.

4.4.2 Vedení tepla ve více dimenzích

Uvažujme nyní zákon zachování (4.7) pro modelování vedení tepla v tělese $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tj.

$$c\rho u_t + \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} = f. \tag{4.10}$$

Použijeme trojrozměrnou verzi Fourierova tepelného zákona

$$\boldsymbol{\phi} = -K \operatorname{grad} u,$$

kterou dosadíme do (4.10). Po snadných úpravách odvodíme

$$u_t - k\,\Delta u = \frac{1}{\rho c} f,$$

kde $k = K/\rho c$. Jedná se opět o difuzní rovnici, nyní v prostoru. Formálně stejný tvar má difuzní rovnice popisující vedení tepla v rovině.

4.5 Kmitání struny a vlnová rovnice

Nejprve podrobně odvodíme jednodimenzionální analogii vlnové rovnice – rovnici kmitající struny. Pak přejdeme do dvou prostorových dimenzí, kdy již stručněji odvodíme rovnici kmitající membrány. Vlnovou rovnici ve třech prostorových dimenzí napíšeme jako analogii rovnice ze dvou prostorových dimenzí.

4.5.1 Kmitání struny

Budeme uvažovat strunu o délce l, u níž dochází pouze k malým vertikálním kmitům. Funkce $u(x,t)$ bude popisovat výchylku v bodě x a v čase t. Vlastnosti struny budou vyjadřovat tyto funkce: hustota struny $\rho(x,t)$ a vnitřní napětí struny $T(x,t)$, o němž budeme předpokládat, že má tečný směr k profilu struny.

Pro odvozování rovnice si zvolíme úsek struny určený pevným, ale libovolným intervalem $a < x < b$. Úhel, který svírá tečna k funkci $u(x,t)$ s osou x označíme $\theta(x,t)$. Z definice derivace dostáváme vztah

$$\operatorname{tg}\theta(x,t) = u_x(x,t).$$

Při odvozování použijeme dva zákony:

a) zákon zachování hmoty,
b) Newtonů pohybový zákon.

ad a) V čase $t = 0$ označíme $\rho_0(x) = \rho(x,0)$ a předpokládáme $u(x,0) = u_0 = konst.$. Zachování hmoty v čase $t > 0$ vyjadřuje rovnost

$$\int_a^b \rho(x,t)\sqrt{1 + u_x(x,t)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \rho_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vzhledem k tomu, že interval (a,b) je libovolný, musí platit rovnost integrandů

$$\rho(x,t)\sqrt{1 + u_x(x,t)^2} = \rho_0(x). \tag{4.11}$$

ad b) Podle Newtonova pohybového zákona je změna hybnosti rovna působící síle. Jedinou silou působící na strunu je vnitřní napětí. Protože v horizontálním směru pohyb nepřipouštíme, nesmí se náš úsek struny v tomto směru pohnout a musí tedy platit:

$$T(b,t)\cos\theta(b,t) - T(a,t)\cos\theta(a,t) = 0.$$

Protože náš úsek struny je libovolný, musí platit

$$\tau(t) = T(x,t)\cos\theta(x,t), \tag{4.12}$$

tj. v horizontálním směru je napětí v daném čase konstantní. Ve vertikálním směru vyjádříme pohybový zákon takto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\sqrt{1+u_x(x,t)^2}\,u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = T(b,t)\sin\theta(b,t) - T(a,t)\sin\theta(a,t).$$

Použijeme (4.11) a zaměníme pořadí derivování a integrování:

$$\int_a^b \rho_0(x)u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x = T(b,t)\sin\theta(b,t) - T(a,t)\sin\theta(a,t).$$

Pravou stranu upravíme pomocí (4.12):

$$\begin{aligned} T(b,t)\sin\theta(b,t) - T(a,t)\sin\theta(a,t) &= \tau(t)[\operatorname{tg}\theta(b,t) - \operatorname{tg}\theta(a,t)] \\ &= \tau(t)[u_x(b,t) - u_x(a,t)] \\ &= \tau(t)\int_a^b u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\int_a^b \rho_0(x)u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x = \tau(t)\int_a^b u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Přechodem k diferenciálnímu vyjádření získáme rovnici

$$\rho_0(x)u_{tt}(x,t) = \tau(t)u_{xx}(x,t).$$

Pro zjednodušení ještě položíme $\rho_0(x) = \rho_0$ (homogenní materiál struny), $\tau(t) = \tau_0$ (malé výchylky) a označíme $c = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$. Pak můžeme psát

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t). \tag{4.13}$$

Tím jsme odvodili *vlnovou rovnici* v jedné prostorové dimenzi, nebo-li *rovnici kmitající struny*. Konstanta c odpovídá rychlosti šíření vlny.

Odvození rovnice (4.13) lze modifikovat, tak že vezmeme v úvahu další jevy. Můžeme tak dospět k vlnové rovnici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t + k u = f(x,t),$$

kde člen ru_t reprezentuje tlumení s tlumící konstantou $r > 0$, člen ku reprezentuje elastickou sílu struny s konstantou tuhosti $k > 0$ a člen $f(x,t)$ reprezentuje vnější buzení.

4.5.2 Vibrující membrána

Jeden ze vztahů, kterým můžeme podle předchozího odstavce vyjádřit Newtonův pohybový zákon, má tvar:

$$\int_a^b \rho_0(x)u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x = \tau(t)(u_x(b,t) - u_x(a,t)). \tag{4.14}$$

Při odvozování rovnice kmitající membrány bude analogie tohoto vztahu naším východiskem.

Membránu upevněnou na pevném rámu v rovině budeme reprezentovat omezenou oblastí $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Budeme uvažovat opět pouze malé vertikální výchylky, které v bodě (x,y) a v čase t vyjadřuje funkce $u(x,y,t)$. Vezměme libovolnou podoblast membrány $D \subset \Omega$ a aplikujeme na ní zákon zachování hmoty a Newtonův pohybový zákon. Analogií (4.14) pro membránu je pak rovnost

$$\iint\limits_{D} \rho_0(x,y) u_{tt}(x,y,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \tau(t) \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, \mathrm{d}s, \tag{4.15}$$

kde $\mathbf{n}$ je vektor vnější normály k hranici ∂D. Tento vztah vyjadřuje Newtonův pohybový zákon po těchto úpravách: na levé straně jsme využili zákon zachování hmoty podobně jako v jednodimenzionálním případě, na pravé straně jsme využili skutečnost, že napětí v horizontálním směru se mění pouze s časem. Dále použijeme větu o divergenci

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, \mathrm{d}s = \int\limits_{\partial D} \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \iint\limits_{D} \operatorname{div} \operatorname{grad} u\, \mathrm{d}x = \iint\limits_{D} \Delta u\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

a z (4.15) pak dostaneme

$$\iint\limits_{D} \rho_0(x,y) u_{tt}(x,y,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \tau(t) \iint\limits_{D} \Delta u\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ je opět Laplaceův operátor. Protože D jsme volili libovolně, můžeme přejít k diferenciálnímu vyjádření, přičemž provedeme podobná zjednodušení jako u rovnice struny, tj. položíme $\rho_0(x) = \rho_0$ a $\tau(t) = \tau_0$ a zavedeme konstantu $c = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$. Výseldná rovnice má tvar

$$u_{tt} = c^2 \Delta u. \tag{4.16}$$

Tím jsme odvodili *vlnovou rovnici* ve dvou prostorových dimenzích, nebo-li *rovnici vibrující membrány*.

4.5.3 Vlnová rovnice v prostoru

V prostoru postupujeme podobně jako v rovině, samozřejmě s využitím trojných integrálů. Dojdeme opět k rovnici (4.16), kde nyní $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$. Tato rovnice popisuje vibrace elastického tělesa, šíření zvukových vln ve vzduchu, šíření seizmických vln v zemské kůře, elektromagnetické vlnění apod.

4.6 Laplaceova a Poissonova rovnice: stacionární případ

Často nás zajímá chování modelu v rovnovážném (ustáleném) stavu, kdy nezávisí na čase. V takové případě jsou časové derivace nulové, $u_t = u_{tt} = 0$, a difuzní i vlnová rovnice přejdou na *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta u = 0. \tag{4.17}$$

V jedné dimenzi má Laplaceova rovnice tvar $u_{xx} = 0$ a jejím řešením je lineární funkce $u(x) = c_1 x + c_2$. Ve více dimenzích je situace složitější, řešením Laplaceovy rovnice jsou tzv. *harmonické funkce*.

Jestliže se v modelu vyskytují časově nezávislé zdroje, dostaneme z difuzní i vlnové rovnice *Poissonovu rovnici*

$$\Delta u = f. \tag{4.18}$$

Kromě zmíněných modelů difuze a vlnění se můžeme s Laplaceovou nebo Poissonovou rovnicí setkat například u elektrostatiky, ustáleného proudění nebo u holomorfních funkcí komplexní proměnné.

Kontrolní otázky

1. Slovně formulujte zákon zachování.
2. Vysvětlete rozdíl mezi globálním a lokálním zákonem zachování a zapište je.
3. Která věta se používá při přechodu od globálního zákonu zachování k lokálnímu?
4. Vysvětlete rozdíl mezi evolučním a stacionárním zákonem zachování.
5. Co rozumíme pojmem konstitutivní vztah?
6. Vysvětlete odvození transportní rovnice.
7. Vysvětlete odvození difuzní rovnice.
8. Vysvětlete odvození rovnice vedení tepla.
9. Vysvětlete odvození rovnice kmitající struny.
10. Vysvětlete odvození rovnice kmitající membrány. Zapište vlnovou rovnici.
11. Jak vypadá Laplaceova a Poissonova rovnice a jak souvisí se zákonem zachování?

KAPITOLA

5

ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

V této kapitole nejdříve ukážeme řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici v jedné prostorové proměnné na nekonečném intervalu, kde je základem d'Alembertův vzorec. Poté budeme řešit počátečně-okrajovou úlohu s jednostrannou okrajovou podmínkou na polonekonečném intervalu pomocí metody lichého nebo sudého rozšíření. Nakonec se budeme věnovat počátečně-okrajové úloze na konečném intervalu a pro řešení použijeme Fourierovu metodu.

5.1 Počáteční úloha na přímce

Budeme se zabývat úlohou

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \tag{5.2}$$

kde φ je počáteční rozložení vlny a ψ je její počáteční rychlost.

Nejprve určíme obecné řešení rovnice (5.1), kterou zapíšeme takto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0.$$

Zavedeme-li novou neznámou funkci $v = u_t + cu_x$, můžeme rovnic (5.1) převést na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} v_t - cv_x &= 0, \\ u_t + cu_x &= v. \end{aligned}$$

Z teorie diferenciálních rovnic prvního řádu víme, že obecné řešení první z těchto rovnic je

$$v(x,t) = h(x+ct),$$

kde h je libovolná diferencovatelná funkce. Druhou rovnici pak můžeme zapsat jako

$$u_t + cu_x = h(x+ct).$$

Řešení příslušné homogenní rovnice je

$$u_H(x,t) = g(x-ct),$$

kde g je opět libovolná diferencovatelná funkce. Partikulární řešení pak musí mít stejný tvar jako pravá strana $h(x+ct)$, tj.

$$u_P(x,t) = f(x+ct),$$

kde f je znovu libovolná diferencovatelná funkce. Z těchto úvah obdržíme obecné řešení rovnice (5.1):

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct). \tag{5.3}$$

Jedná se o součet dvou postupných vln, levé a pravé, které se šíří rychlostí $c > 0$ podél přímek $x + ct = konst.$ a $x - ct = konst.$, což jsou *charakteristiky vlnové rovnice*.

Nyní budeme hledat funkce f a g tak, abychom splnili počáteční podmínky (5.2). Tyto podmínky dosadíme do (5.3), čímž získáme vztahy

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \quad \psi(x) = cf'(x) - cg'(x).$$

Derivováním první rovnosti vznikne

$$\varphi'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Z posledních dvou rovností snadno vypočtememe derivace hledaných funkcí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2c}\psi(x), \\ g'(x) &= \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2c}\psi(x) \end{aligned}$$

a po jejich integrování dojdeme k vyjádření

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s + A, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s + B. \end{aligned}$$

Pro integrační konstanty A, B musí platit $A + B = 0$, protože $f(x) + g(x) = \varphi(x)$. Dosazením do (5.3) proto vznikne vzorec pro řešení naší úlohy ve tvaru

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.4}$$

Tento vzorec byl odvozen d'Alembertem v roce 1746. Lze z něj vyčíst, že počáteční vlna φ se rozdělí na dvě, které postupují podél charakteristik doleva a doprava. Podobně lze interpretovat vliv počáteční rychlosti ψ prostřednictvím primitivní funkce k funkci ψ.

Věta 5.4 Nechť $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Úloha (5.1)-(5.2) má právě jedno klasické řešení, které je určeno d'Alembertovým vzorcem (5.4).

Příklad 5.21 Vyřešte počáteční úlohu pro vlnovou rovnici (5.1)-(5.2) s počáteční výchylkou $\varphi(x) = 0$ a počáteční rychlostí $\psi(x) = \sin x$.

Řešení: Dosadíme do d'Alembertova vzorce:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \sin s \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{2c}(\cos(x+ct) - \cos(x-ct)).$$

Výsledek ještě upravíme pomocí vzorce $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ a dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{c}\sin x \sin ct.$$

Řešení této rovnice popisuje *stojaté vlnění*, kdy nulové body prostorové proměnné jsou $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a jsou neměnné pro jakýkoliv čas t. □

Vzorec (5.4) má smysl i v případě, že funkce popisující počáteční podmínky mají nižší hladkost, než vyžaduje věta (5.4). Řešení chápeme v zobecněném smyslu tak, že vlnová rovnice je splněna v těch bodech, kde jsou definovány příslušné derivace.

Příklad 5.22 Vyřešte počáteční úlohu pro vlnovou rovnici (5.1)-(5.2) s počáteční výchylkou

$$\varphi(x) = \begin{cases} b - \frac{b}{a}|x| & \text{pro } |x| < a, \\ 0 & \text{pro } |x| \geq a \end{cases}$$

a s nulovou počáteční rychlostí.

Řešení: Počáteční výchylka odpovídá struně „přidržené třemi prsty“ a poté uvolněné. Z d'Alembertova vzorce dostáváme:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)].$$

Výsledek ukazuje, že počáteční trojúhelníková výchylka se rozdělí na dvě trojúhelníkové vlny, které se od sebe rozbíhají podél charakteristik. □

Příklad 5.23 Vyřešte počáteční úlohu pro vlnovou rovnici (5.1)-(5.2) s nulovou počáteční výchylkou a s počáteční rychlostí

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pro } |x| > a. \end{cases}$$

Řešení: Z d'Alembertova vzorce dostáváme:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2c} \times \text{ délka intervalu } \{(-a,a) \cap (x-ct, x+ct)\}.$$

Tato úloha odpovídá modelu, kdy počáteční rychlost byla struně udělena „úderem kladiva“ o šířce $2a$. Počáteční vzruch se postupně rozšiřuje na obě strany struny, opět podél charakteristik. □

Z d'Alembertova vzorce (5.4) lze vyčíst tzv. *zákon kauzality* (vlivu). Tento zákon říká, že počáteční podmínky v bodě $(x_0, 0)$ má vliv na řešení pouze v oblasti nad charakteristikami procházejícími tímto bodem, tj., nad přímkami $x \pm ct = x_0$ (včetně přímek samotných). Opačně lze zákon kauzality formulovat tak, že řešení v bodě (x, t) je ovlivněno hodnotami počátečních podmínek φ, ψ na intervalu, který na x-ové ose vytyčí charakteristiky procházející bodem (x, t), tj. na intervalu s krajními body $x - ct$ a $x + ct$. Trojúhelníku s vrcholy (x, t), $(x - ct, 0)$ a $(x + ct, 0)$ se říká *oblast historie* bodu (x, t).

5.2 Počáteční úloha se zdrojem

Budeme uvažovat úlohu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5.5}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \tag{5.6}$$

kde φ je počáteční rozložení vlny, ψ je její počáteční rychlost a f je vnější buzení.

Věta 5.5 Nechť $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ a $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Úloha (5.5)-(5.6) má právě jedno klasické řešení, které je určeno vzorcem

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\iint_{\triangle} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s, \tag{5.7}$$

kde $\triangle$ je oblast historie bodu (x, t).

Důkaz vzorce (5.7) lze provést pomocí Greenovy věty [2]. Integrál přes oblast historie můžeme počítat takto:

$$\iint_{\triangle} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

5.3 Počátečně-okrajová úloha na polopřímce

Budeme uvažovat úlohu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0, \tag{5.8}$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{5.9}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0. \tag{5.10}$$

Úloha popisuje polonekonečnou strunu, jejíž konec $x = 0$ je pevně uchycen. Pro řešení použijeme metodu *lichého rozšíření* počátečních podmínek φ a ψ. Definujeme nové počáteční podmínky $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{\psi}$ předpisem

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

a zavedeme novou úlohu

$$\begin{aligned} &v_{tt} = c^2 v_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &v(x,0) = \tilde{\varphi}(x),\ v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože počáteční podmínky jsou liché, bude řešení také liché, a proto $v(0,t) = 0$, $t > 0$. Řešení nové úlohy je dáno d'Alembertovým vzorcem

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+ct) + \tilde{\varphi}(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zúžením funkce v pro $x > 0$ získáme řešení u původní úlohy (5.8)-(5.10). Přejdeme přitom k původním okrajovým podmínkám φ, ψ. Pro $x > ct$ je řešení u dáno obvyklým vzorcem, protože průnik oblasti historie bodu (x,t) a x-ové osy je pouze na kladné poloose. Proto

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s, \quad x > ct. \tag{5.11}$$

Pro $0 < x < ct$ ovšem dojde k tomu, že část oblasti historie na x-ové ose je na její záporné poloose. Jedná se o interval s krajními body $x - ct$ a 0. Na tomto intervalu přejdeme k původním okrajovým podmínkám φ a ψ pomocí lichého rozšíření $\tilde{\varphi}(y) = -\varphi(-y)$, $\psi(y) = -\psi(-y)$, takže

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) - \varphi(-x+ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{0} -\psi(-s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 < x < ct.$$

U prvního integrálu provedeme substituci $s := -s$, která umožní zapsat poslední vzorec kompaktněji takto:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(ct+x) - \varphi(ct-x)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{ct+x} \psi(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 < x < ct. \tag{5.12}$$

Vzorce (5.11), (5.12) popisují řešení výchozí úlohy.

Člen $-\varphi(ct - x)$ ve vzorci (5.12) lze interpretovat jako odraz vlny. Počáteční vlna φ se z bodu $(ct - x, 0)$, $ct - x > 0$, přesune v časo-prostorové rovině k časové ose, tj. ke svému konci $x = 0$, kde je uchycena. Zde se odrazí, přičemž „změní amplitudu“ a takto doputuje do bodu (x,t).

V případě homogenní Neumannovy podmínky bychom postupovali analogicky metodou *sudého rozšíření*.

5.4 Počátečně-okrajová úloha na úsečce: Fourierova metoda

5.4.1 Dirichletova okrajová podmínka

Budeme uvažovat úlohu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{5.13}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0, \tag{5.14}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l. \tag{5.15}$$

Úloha popisuje strunu délky l, jejíž konce jsou pevně uchyceny.

Budeme předpokládat, že řešení je tvaru

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

kde $X = X(x)$ a $T = T(t)$ jsou funkce jedné proměnné, které jsou dostatečně hladké. Dosazením do rovnice (5.13) dostaneme

$$XT'' = c^2 X'' T$$

a po vydělení $-c^2 XT$ dojdeme k rovnosti

$$-\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Protože levá strana je funkcí pouze proměnné t, pravá strana je funkcí pouze proměnné x a rovnost má platit pro všechna t a x (z příslušných intervalů), musí být obě strany konstantní a rovnat se stejné konstantě, kterou označíme λ, tj. musí platit

$$-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Z parciální diferenciální rovnice tak dostáváme dvě *separované* obyčejné diferenciální rovnice pro neznámé funkce X a T ve tvaru

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5.16}$$

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0. \tag{5.17}$$

Z (5.14) dále plyne $X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$ pro všechna $t > 0$, takže musí platit

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{5.18}$$

Nejprve se budeme zabývat okrajovou úlohou (5.16),(5.18). Máme-li dostat nenulové řešení X, musí být λ kladné (prověřte, že pro $\lambda \leq 0$, dostaneme řešení X, které je identicky rovno nule). Pro $\lambda > 0$ má rovnice (5.16) obecné řešení

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Z okrajové podmínky (5.18) dostaneme $X(0) = c_1 = 0$ a dále

$$X(l) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Má-li být řešení netriviální, musí platit

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Tato rovnost nastane pro následující speciální volby konstanty λ:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.19}$$

a každé z těchto konstant odpovídá řešení

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.20}$$

kde C_n jsou libovolné konstanty. Podívejme se nyní na rovnici (5.17). Její obecná řešení mají pro již odvozené konstanty $\lambda = \lambda_n$ tvar

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.21}$$

kde A_n, B_n jsou opět libovolné konstanty. Původní parciální diferenciální rovnici (5.13) a okrajovým podmínkám (5.14) vyhovuje posloupnost řešení

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde A_n, B_n jsou libovolné konstanty (nahrazující součiny A_nC_n, B_nC_n). Protože se jedná o úlohu lineární, je jejím řešení také libovolný konečný součet tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{5.22}$$

Podívejme se nyní na počáteční podmínky (5.15). Funkce (5.22) bude těmto podmínkám vyhovovat, budou-li funkce φ a ψ tvaru

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\frac{n\pi x}{l},\\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{N} B_n \frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

V takové případě je úloha (5.13)-(5.15) jednoznačně řešitelná a (5.22) je její řešení.

Uvedený tvar počátečních podmínek je ovšem příliš omezující. Řešení proto hledáme ve tvaru *Fourierovy řady*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{5.23}$$

Konstanty A_n a B_n jsou pak určeny jako koeficienty sinových řad

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l},\\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

Vypočteme je pomocí vzorců

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tento výpočet je důsledkem ortogonality systému funkcí $\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Aby řešení (5.23) bylo korektní, je potřeba dokázat, že tato řada konverguje. Této otázce se zde věnovat nebudeme.

5.4.2 Neumannova okrajová podmínka

Budeme uvažovat úlohu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{5.24}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ t > 0, \tag{5.25}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l. \tag{5.26}$$

Pro řešení použijeme stejný postup jako v případě Dirichletovy okrajové podmínky. Tentokrát vede separace proměnných na obyčejnou diferenciální rovnici

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(l) = 0, \tag{5.27}$$

která má netriviální řešení pro $\lambda > 0$ a pro $\lambda = 0$. Dostaneme tedy konstanty

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.28}$$

a jim odpovídající řešení

$$X_n(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.29}$$

Řešení ve tvaru *Fourierovy řady* vypadá nyní takto:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{5.30}$$

kde konstanty A_n a B_n jsou určeny jako koeficienty kosinových řad

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete odvození d'Alembertova vzorce a formulujte větu o řešitelnosti příslušné úlohy.
2. Vysvětlete zákon kauzality.
3. Jak vypadá d'Alembertův vzorec pro úlohu se zdrojem.
4. Vysvětlete princip metody sudého nebo lichého rozšíření.
5. Vysvětlete Fourierovu metodu pro rovnici kmitání struny.

Úlohy k samostatnému řešení

Vyřešte následující počáteční úlohy.
1. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = e^x$, $u_t(x,0) = \sin x$.
2. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = \ln(1+x^2)$, $u_t(x,0) = 4 + x$.
3. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + xt$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.
4. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos x$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 1 + x$.
5. Vyřešte následující úlohu na polopřímce:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = xe^{-x},\ u_t(x,0) = 0,\ x > 0. \end{aligned}$$

Vyřešte následující úlohy na úsečce.
6.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = \sin \pi x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = x \sin \pi x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = x(1-x),\ u_t(x,0) = \sin \pi x,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} &u_{tt} + u_t = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = \sin \pi x,\ 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

KAPITOLA

6

ŘEŠENÍ DIFUZNÍ ROVNICE

Nejdříve ukážeme řešení počáteční úlohy pro difuzní rovnici na nekonečném intervalu, postup ale bude zde zcela jiný než u vlnové rovnice, bude využívat tzv. tepelné jádro. Budeme se přitom zajímat o homogenní i nehomogenní rovnici. Poté budeme řešit počátečně-okrajovou úlohu na polonekonečném intervalu a na konečném intervalu. V tomto případě získáme řešení podobně jako u analogických úloh pro vlnovou rovnici.

6.1 Počáteční úloha na přímce

Budeme se zabývat úlohou

$$u_t = ku_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{6.1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{6.2}$$

kde φ popisuje počáteční rozložení difuzní látky v nekonečné trubici v případě difuze, nebo počáteční teplotu v nekonečně dlouhé tyči v případě vedení tepla. Pro difuzní rovnici není znám tvar obecného řešení. Proto při odvození řešení postupujeme jinak než u vlnové rovnice.

Nejprve vyřešíme úlohu (6.2)-(6.1) se skokovou funkcí φ. Jedná se o úlohu

$$w_t = kw_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{6.3}$$
$$w(x,0) = 0 \quad \text{pro } x < 0, \quad w(x,0) = u_0 \quad \text{pro } x \geq 0. \tag{6.4}$$

K odvození řešení této úlohy použijeme úvahu, že každý fzyikální zákon lze převést do *bezrozměrného tvaru*. Naše úloha používá veličiny x, t, w, u_0, k, jež v případě vedení tepla mají fyzikální rozměry délky, času, stupňů, znovu stupňů a kvadrátu délky za čas. Bezrozměrnou veličinou je určitě podíl w/u_0. Jedinou další bezrozměrnou veličinou je podíl $x/\sqrt{4kt}$ (konstanta 4 zjednoduší další postupy). Řešení úlohy bude mít tvar kombinace těchto bezrozměrných veličin, tj.

$$\frac{w}{u_0} = f\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right),$$

kde f je funkce, kterou se budeme snažit určit. Pro zjednodušení položíme $u_0 = 1$ a zavedeme substituci

$$w = f(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}.$$

Nejprve vypočítáme potřebné derivace

$$w_t = f'(z)z_t = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{4kt^3}}f'(z),$$
$$w_x = f'(z)z_x = \frac{1}{\sqrt{4kt}}f'(z), \quad w_{xx} = \frac{1}{4kt}f''(z),$$

které dosadíme do rovnice (6.4) a dostaneme

$$f''(z) + 2zf'(z) = 0.$$

Postupně integrací dostáváme

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -2z, \quad \ln f'(z) = -z^2 + c, \quad f(x) = c_1 \int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + c_2,$$

kde c_1, c_2 jsou integrační konstanty. Řešení rovnice (6.4) má tvar

$$w(x,t) = c_1 \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + c_2$$

Konstanty c_1, c_2 určíme z počáteční podmínky (6.4). Vezmeme $x < 0$ pevné a provedeme limitní přechod $t \to 0$:

$$0 = w(x,0) = c_1 \int_0^{-\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + c_2 = -c_1 \int_0^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + c_2.$$

Dále vezmeme $x > 0$ pevné a opět provedeme limitní přechod $t \to 0$:

$$1 = w(x,0) = c_1 \int_0^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + c_2.$$

Protože platí

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

dostaneme

$$0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}c_1 + c_2, \quad 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}c_1 + c_2$$

a odtud $c_1 = 1/\sqrt{\pi}$ a $c_2 = 1/2$. Řešení úlohy (6.3)-(6.4) má tvar

$$w(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s. \tag{6.5}$$

Nyní budeme řešit původní úlohu (6.1)-(6.2). Je-li w řešením difuzní rovnice, je řešením difuzní rovnice také derivace w_x, protože

$$0 = (w_t - kw_{xx})_x = (w_x)_t - k(w_x)_{xx}.$$

Proto funkce

$$G(x,t) \equiv w_x(x,t),$$

kde w je určeno (6.5), je také řešením difuzní rovnice. Derivováním odvodíme

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt}. \tag{6.6}$$

Tato funkce se nazývá *tepelné jádro* nebo *fundamentální řešení* difuzní rovnice. Platí pro ni

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,\mathrm{d}x = 1, \quad t > 0$$

a pro $t \to 0$ se blíží Diracově distribuci $\delta(x)$.

Funkce $G(x,t)$ udává rozložení teploty jako reakci na jednotkový zdroj v bodě $x = 0$. Protože řešení difuzní rovnice je invariantní vůči posunutí, je také $G(x-y,t)$ řešením difuzní rovnice (reakce na jednotkový zdroj v bodě $x = y$). Není-li počáteční zdroj jednotkový, ale má hodnotu $\varphi(y)$, je jeho reakce v bodě (x,t) dána funkcí $\varphi(y)G(x-y,t)$. Představuje-li $\varphi(y)$ spojité rozložení zdrojů podél $y \in \mathbb{R}$, je výsledné rozložení teploty součtem všech reakcí:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)G(x-y,t)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,\mathrm{d}y. \tag{6.7}$$

Věta 6.6 Nechť φ je omezená spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Úloha (6.1)-(6.2) má právě jedno klasické řešení dané vztahem (6.7). Dále platí $u(x,t) \to \varphi(x)$ pro $t \to 0$.

Integrální vztah nelze většinou vyjádřit analyticky, musí se počítat numerickou integrací. Pro $t > 0$ je řešení nenulové všude, i když je počáteční podmínka φ nenulová je na malém intervalu, takže podle tohoto modelu se teplo nebo difuze šíří nekonečnou rychlostí. To neodpovídá realitě, kterou tento model popisuje jen přibližně. Nicméně pokles je velmi rychlý, takže shoda s realitou je většinou dostatečná. Řešení je také velmi hladké. Bez ohledu na hladkost φ je funkce u nekonečně krát diferencovatelná podle obou proměnných.

6.2 Počáteční úloha se zdrojem

Budeme uvažovat úlohu

$$u_t = ku_{xx} + f(x,t), \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \tag{6.8}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{6.9}$$

kde φ je počáteční podmínka a f popisuje rozložení zdrojů difuzní látky (nebo tepla) v libovolném čase t.

Při odvozování řešení použijeme operátorovou metodu. Začneme analogií s obyčejnou diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av(t) = f(t), \quad v(0) = \varphi,$$

kde A a φ jsou dané konstanty. Řešení této rovnice můžeme zapsat takto:

$$v(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{6.10}$$

kde $S(t) = e^{-tA}$. O správnosti se snadno přesvědčíme dosazením provedením zkoušky (člen $S(t)\varphi$ řeší přidruženou rovnici homogenní a zajišťuje splnění počáteční podmínky, integrální člen je partikulárním řešením nehomogenní rovnice, při jehož derivování podle t je potřeba postupovat jako u funkce dvou proměnných).

Řešení homogenní difuzní rovnice lze zapsat vzorcem (6.7), tj. ve tvaru

$$(\mathcal{S}(t)\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathcal{S}(t)$ se nazývá *zdrojovým operátorem* a převádí počáteční podmínku φ na řešení homogenní difuzní rovnice. Můžeme se proto domnívat, že řešení úlohy (6.8)-(6.9) bude mít tvar

$$u(x,t) = \mathcal{S}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s, \tag{6.11}$$

kde x je ukryto ve zdrojovém operátoru. Dosazením předpisu pro $\mathcal{S}(t)$ dostanem

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-s)\, f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s, \tag{6.12}$$

O správnosti takto odvozeného řešení se přesvědčíme provedením zkoušky, viz [2].

Věta 6.7 Nechť φ a f jsou omezená spojitá funkce na $\mathbb{R}$ resp. na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Počáteční úloha pro nehomogenní difuzní rovnici (6.8)-(6.9) má právě jedno řešení, které jeurčeno vztahem (6.12).

Dosazením předpisu (6.6) pro tepelné jádro můžeme řešení (6.12) zapsat takto:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}} e^{-(x-y)^2/4k(t-s)}\, f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

6.3 Počátečně-okrajová úloha na polopřímce

Budeme uvažovat úlohu

$$u_t = ku_{xx},\ x > 0,\ t > 0, \tag{6.13}$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{6.14}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ x > 0. \tag{6.15}$$

Úloha popisuje rozložení teploty v polonekonečné tyči, jejíž konec $x = 0$ je ponořen do nádoby s nulovou teplotou. Pro řešení použijeme metodu *lichého rozšíření* počáteční podmínky φ . Definujeme novou počáteční podmínku $\tilde{\varphi}$ předpisem

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

a zavedeme novou úlohu

$$\begin{aligned} v_t &= kv_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x,0) &= \tilde{\varphi}(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože počáteční podmínka je lichá, bude řešení také liché, a proto $v(0,t) = 0$, $t > 0$ (podobně jako pro vlnovou rovnici v analogické úloze). V souladu se vzorcem (6.7) lze řešení nové úlohy zapsat vzorcem

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Zúžením funkce v pro $x > 0$ získáme řešení původní úlohy. Přejdeme přitom k původní okrajové podmínce φ, a to tak, že integrál v (6.3) rozdělíme na dva:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(-y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \varphi(y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_{0}^{\infty} \varphi(y) G(x+y,t)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \varphi(y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{\infty} \varphi(y) [G(x-y,t) - G(x+y,t)]\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Řešení u původní úlohy (6.13)-(6.15) má tvar

$$u(x,t) = \int_{0}^{\infty} \varphi(y) [G(x-y,t) - G(x+y,t)]\,\mathrm{d}y.$$

6.4 Počátečně-okrajová úloha na úsečce: Fourierova metoda

6.4.1 Dirichletova okrajová podmínka

Budeme uvažovat úlohu

$$u_t = ku_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{6.16}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0, \tag{6.17}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l. \tag{6.18}$$

Úloha popisuje rozložení teploty v tyči délky l, jejíž konce jsou udržovány na nulové teplotě. Budeme postupovat podobně jako v analogickém případě pro vlnovou rovnici. Řešení hledáme v separovaném tvaru

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Dosazením do rovnice (6.16) dojdeme k rovnosti

$$-\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

kde λ je konstanta. Z parciální diferenciální rovnice nyní dostáváme tyto dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) + k\lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

K první rovnici přidáme homogenní okrajovou podmínku $X(0) = X(l) = 0$ a dojdeme ke stejnému systému řešení jako v případě rovnice struny:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Obecná řešení druhé rovnice mají pro $\lambda = \lambda_n$ tvar

$$T_n(t) = A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení celé úlohy (6.16)-(6.18) můžeme vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Konstanty A_n jsou určeny jako koeficienty řady

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

6.4.2 Neumannova okrajová podmínka

V případě Neumannovy okrajové podmínky uvažujeme úlohu

$$u_t = ku_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{6.19}$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ t > 0, \tag{6.20}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l. \tag{6.21}$$

Podobným postupem jako v analogickém případě pro rovnici struny dojdeme nyní k řešení ve tvaru Fourierovy řady

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{6.22}$$

kde konstanty A_n jsou určeny jako koeficienty kosinové řady

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete postup odvození fundamentálního řešení difuzní rovnice.
2. Vysvětlete princip řešení počáteční úlohy se zdrojem pro difuzní rovnici.
3. Vysvětlete princip metody lichého rozšíření pro difuzní rovnici.
4. Vysvětlete Fourierovu metodu pro difuzní rovnici.

Úlohy k samostatnému řešení

Vyřešte následující počáteční úlohy.
1. $u_t = ku_{xx}$, $u(x,0) = e^{3x}$.
2. $u_t = ku_{xx}$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $\varphi(x) = 1$ pro $x > 0$ a $\varphi(x) = 3$ pro $x < 0$.
3. $u_t = ku_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = 0$.

Vyřešte následující úlohy na polopřímce.

4.
$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx},\ x > 0,\ t > 0,\\ &u(0,t) = 0,\ t > 0,\\ &u(x,0) = 1,\ x > 0. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx},\ x > 0,\ t > 0,\\ &u(0,t) = 1,\ t > 0,\\ &u(x,0) = 0,\ x > 0. \end{aligned}$$

Vyřešte následující úlohy na úsečce.

6.
$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0,\\ &u(x,0) = 30\sin x,\ 0 < x < l. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0,\\ &u(x,0) = x,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0,\\ &u(x,0) = e^{-x},\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

KAPITOLA

7

ŘEŠENÍ LAPLACEOVY A POISSONOVY ROVNICE

7.1 Základní podoba úloh a princip maxima

Řešení *Laplaceova rovnice* $\Delta u = 0$ se nazývají *harmonické funkce*. V jedné dimenzi má Laplaceova rovnice tvar $u_{xx} = 0$ a jedinou harmonickou funkcí je funkce lineární $u(x) = A + Bx$. Uvažujeme-li tuto funkci na omezeném intervalu, pak je zřejmé, že svého maxima i minima nabývá v krajních bodech. Kromě toho je zřejmé, že tyto extrémy jsou ostré, není-li funkce konstantní. Tomuto tvrzení se říká *princip maxima* a platí i pro vícedimenzionální případy.

Ve dvou dimenzích má Laplaceova rovnice tvar

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{7.1}$$

Příkladem harmonických funkcí jsou nyní například tyto funkce:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2$,
b) $u(x, y) = xy$,
c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$,
d) $u(x, y) = 3x^2y - y^3$.

Lze se o tom přesvědčit ověřením splnění rovnice (7.1). Odvození harmonickým funkcí můžeme provést například výpočtem reálné a imaginární složky vhodné analytické komplexní funkce. V našich příkladech vypočteme pro $z = x + ix$ reálnou a imaginární složku funkcí z^2 a z^3, čímž dostaneme funkce a)-d) (vysvětlete).

Poissonova rovnice $\Delta u = f$ má ve dvou dimenzích tvar

$$u_{xx} + u_{yy} = f. \tag{7.2}$$

Laplaceovu i Poissonovu rovnici dostaneme jako stacionární případ difuzní rovnice nebo vlnové rovnice, tj. když $u_t = 0$ a $u_{tt} = 0$.

Základní úlohou pro Laplaceovu i Poissonovu rovnici je hledání řešení na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se zadanými hraničními podmínkami na hranici $\partial\Omega$. Zapišme tuto úlohu pro Poissonovu rovnici spolu s nejčastějšími hraniční podmínkami (Dirichletovou, Neumanovou a

Newtonovou):

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= h_1 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h_2 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au &= h_3 \quad \text{na } \Gamma_3, \end{aligned}$$

kde f je funkce v Ω a h_1, h_2, h_3, a jsou funkce na částech hranice $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Symbolem n označujeme vektor vnější normály k hranici $\partial\Omega$. V konkrétním případě může být některá část hranice prázdná.

Jak jsme již naznačili, pro harmonické funkce platí princip maxima, který vyjadřuje tato věta (ve slabší podobě).

Věta 7.8 Nechť Ω je souvislá omezená otevřená množina v $\mathbb{R}^2$. Nechť $u(x, y)$ je harmonická funkce na Ω, která je spojitá na $\Omega \cup \partial\Omega$. Pak funkce u nabývá své maximální i minimální hodnoty na hranici $\partial\Omega$.

Pomocí principu maxima lze dokázat jednoznačnost řešení Poissonovy nebo Laplaceovu rovnice s Dirichletovou okrajovou podmínkou.

Věta 7.9 Řešení Poissonovy rovnice na Ω s Dirichletovou okrajovou podmínkou na $\partial\Omega$ je určeno jednoznačně.

Důkaz: Předpokládejme, že uvažovaná úloha má řešení u a v, tj. platí

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= h \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \Delta v &= f \quad \text{v } \Omega, \\ v &= h \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}\right\}$$

Označme $w = u - v$. Vzhledem k linearitě Laplaceova operátoru dostáváme

$$\left.\begin{aligned} \Delta w &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}\right\}$$

Podle principu minima a maxima můžeme psát

$$0 = \min_{\mathbf{y} \in \bar{\Omega}} w(\mathbf{y}) \leq w(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \bar{\Omega}} w(\mathbf{y}) = 0$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in \Omega$. Proto $w \equiv 0$ a tudíž $u \equiv v$. □

Poznámka

Princip maxima má také analogii při numerickém řešení Laplaceovy rovnice, jak ukazuje následující diskuse.

Uvažujme bod (x, y) a jeho „okolní“ body $(x \pm h, y)$, $(x, y \pm h)$. Pomocí Taylorova rozvoje dostaneme

$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x, y) + O(h^3), \\ u(x-h, y) &= u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x, y) + O(h^3). \end{aligned}$$

Sečtením těchto rovností odvodíme

$$u_{xx}(x,y) = \frac{1}{h^2}[u(x+h,y) - 2(x,y) + u(x-h,y)] + O(h^2),$$

což je diferenční schema aproximující druhou parciální derivaci podle x. Podobným postupem dojdeme ke vzorci

$$u_{yy}(x,y) = \frac{1}{h^2}[u(x,y+h) - 2(x,y) + u(x,y-h)] + O(h^2)$$

(všimněme si, že uvedená schemata jsou druhého řádu, protože členy v Taylorově rozvoji s derivacemi lichého řádu se odečtou). Jestliže vynecháme členy vyšších řádů dojdeme součtem k přibližné rovnosti

$$\begin{aligned} 0 &= u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \\ &\approx \frac{1}{h^2}[u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)], \end{aligned}$$

a odtud

$$u(x,y) \approx \frac{1}{4}[u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)].$$

Tento výsledek lze interpretovat tak, že hodnota $u(x,y)$ je průměrem okolních hodnot (při použití numerického schematu přesně), a tudíž nemůže být ani menší ani větší než extrémy okolních hodnot.

7.2 Fourierova metoda

Na některých speciálních oblastech lze řešení Laplaceovy rovnice nalézt pomocí metody separace proměnných. Uvažujme obdélník $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ a na něm úlohu:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{v } D, \\ u(0,y) = u_x(a,y) &= 0, && 0 < y < b, \\ u_y(x,0) + u(x,0) &= 0, && 0 < x < a, \\ u(x,b) &= g(x), && 0 < x < a. \end{aligned}$$

Řešení hledáme v separovaném tvaru $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Dosazením do Laplaceovy rovnice a vydělením dojdeme k rovnosti

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Musí tedy existovat konstanta λ taková, že funkce X a Y splňují následující úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(a) = 0, \tag{7.3}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad Y'(0) + Y(0) = 0 \tag{7.4}$$

(u druhé úlohy nezapisujeme okrajovou podmínku pro $y = b$, její splnění zajistíme na závěr). Nejprve se budeme věnovat úloze (7.3). Abychom dostali netriviální řešení X, musí být λ kladné. Obecné řešení má tvar:

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Z levé okrajové podmínky dostáváme $c_1 = 0$, takže podoba řešení se redukuje na tvar $X(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Podle pravé okrajové podmínky pak musí platit rovnost $0 = X'(a) = c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a$. Při nulové konstantě c_2 bychom dostali triviální řešení. Zajímá nás proto rovnice $\cos \sqrt{\lambda} a = 0$, která je splněna, je-li $\sqrt{\lambda} a = (\frac{1}{2} + n)\pi$. Odtud dostáváme vhodné hodnoty konstanty λ:

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a odpovídající řešení mají tvar

$$X_n(x) = A_n \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde A_n jsou konstanty. Dále se budeme věnovat úloze (7.4) pro $\lambda = \lambda_n$. Obecná řešení lze zapsat takto:

$$Y_n(y) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda_n} y + c_2 \sinh \sqrt{\lambda_n} y$$

(protože $(\sinh x)' = \cosh x$ a $(\cosh x)' = \sinh x$, lze snadno ověřit splnění diferenciální rovnice pro Y). Okrajová podmínka vede na rovnici $0 = Y_n'(0) + Y_n(0) = c_2 \sqrt{\lambda_n} + c_1$, kde máme dvě neznámé c_1 a c_2. Položíme $c_2 = -1$ a vypočteme $c_1 = \sqrt{\lambda_n}$. Řešení úloh (7.4) pak budou mít tvar

$$Y_n(y) = \sqrt{\lambda_n} \cosh \sqrt{\lambda_n} y - \sinh \sqrt{\lambda_n} y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Naše dílčí výsledky poskládáme do Fourierovy řady, která bude mít tvar

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \sqrt{\lambda_n} x (\sqrt{\lambda_n} \cosh \sqrt{\lambda_n} y - \sinh \sqrt{\lambda_n} y).$$

Touto řadou je na obdélníku D definovaná harmonická funkce, která splňuje první tři okrajové podmínky z výchozí formulace naší úlohy. Nyní zajistíme splnění poslední okrajové podmínky $u(x, b) = g(x)$, k čemuž použijeme konstanty A_n. Dosazením Fourierovy řady do této okrajové podmínky dostaneme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\sqrt{\lambda_n} \cosh \sqrt{\lambda_n} b - \sinh \sqrt{\lambda_n} b) \sin \sqrt{\lambda_n} x.$$

Zde se jedná o sinovou řadu funkce g vzhledem k systému funkcí $\sin \sqrt{\lambda_n} x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Podle pravidel pro výpočet koeficientů takovéto řady dostaneme vzorce pro výpočet konstant A_n ve tvaru

$$A_n = \frac{2}{a} (\sqrt{\lambda_n} \cosh \sqrt{\lambda_n} b - \sinh \sqrt{\lambda_n} b)^{-1} \int_0^a g(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx.$$

Kontrolní otázky

1. Formulujete Poissonovu a Laplaceovu rovnici. Co je to harmonická funkce?
2. Vysvětlete princip maxima a uveďte jeho použití.
3. Interpretujte princip maxima při numerickém řešení Laplaceovy rovnice.
4. Vysvětlete použití Fourierovy metody pro Laplaceovu rovnici.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Odvoďte harmonické funkce a)-d) ze začátku odstavce 7.1 uvedeným postupem.
Rozhodněte, které z níže uvedených funkcí jsou harmonické.
2. $u(x,y) = 2x - 3y$.
3. $u(x,y) = x^2 + y^2$.
4. $u(x,y) = 4x^2 - y^2$.
5. $u(x,y) = x/(x^2 + y^2)$.
6. $u(x,y) = y/(x^2 + y^2)$.
Vyřešte následující úlohy.
7.
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{v } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}, \\ u(0,y) &= y(1-y), && 0 < y < 1, \\ u(1,y) &= 0, && 0 < y < 1, \\ u(x,0) &= \sin \pi x, && 0 < x < 1, \\ u(x,1) &= 0, && 0 < x < 1. \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{v } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}, \\ u_x(0,y) &= 0, && 0 < y < 1, \\ u_x(1,y) &= y^2, && 0 < y < 1, \\ u(x,0) &= x, && 0 < x < 1, \\ u(x,1) &= 0, && 0 < x < 1. \end{aligned}$$

LITERATURA

[1] Cooper, J., M.: *Introduction to partial differential equations with MATLAB.* Birkhauser, Boston, 1998. (anglicky)

[2] Drábek, P., Holubová, G.: *Parciální diferenciální rovnice.* http://mi21.vsb.cz.

[3] Franců, J.: *Parciální diferenciální rovnice.* Akademické nakladatelství CERM, Brno 2017.

[4] Tung, K., K.: *Partial differential equations and Fourier analysis: a short introduction.* Applied Mathematics University of Washington, 2005. (anglicky)

[5] Ošťádalová, E. a kol.: *Parciální diferenciální rovnice.* Skriptum VŠB Ostrava, 1988.