



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Simulační a numerické metody

Zuzana Morávková, Radek Kučera

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

Obsah

Informace o předmětu	3
1 Laplaceova transformace a její využití pro řešení diferenciálních rovnic	4
1.1 Laplaceova transformace	4
1.2 Zpětná Laplaceova transformace	8
1.3 Laplaceova transformace impulsu a periodických funkcí	10
1.4 Zpětná transformace obrazů impulsů	15
1.5 Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace	16
1.6 Řešení soustav diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace . . .	19
1.7 Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace impulsu . .	22
2 Numerické řešení diferenciálních rovnic	25
2.1 Eulerova metoda	25
2.2 Rungeova-Kuttova metoda	30
2.3 Příkaz ode45	37
2.4 Vícekrokové metody	39
3 Aplikované úlohy	45
3.1 Elektrický obvod se sériově zapojenou cívkou	45
3.2 Tlumené kyvadlo	47
3.3 Parašutista	51
3.4 Šikmý vrh v odporovém prostředí	54
Reference	61
4 Přílohy	62
Rozklad na parciální zlomky	62



Toto dílo je licencováno pod licencí Creative Commons BY 4.0.
Licenční podmínky navštivte na adrese
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

Informace o předmětu

Předmět se zabývá matematickým modelováním založeným na obyčejných diferenciálních rovnicích.

Program přednášek a cvičení

1. Opakování diferenciálních rovnic a jejich soustav
2. Motivační aplikované úlohy
3. Laplaceova transformace
4. Zpětná Laplaceova transformace
5. Laplaceova transformace impulsů a periodických funkcí
6. Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceova transformace
7. Řešení soustav diferenciálních rovnic pomocí Laplaceova transformace
8. Aplikované úlohy
9. Numerické řešení počátečních úloh – Eulerova metoda a její modifikace
10. Numerické řešení počátečních úloh – Rungeova-Kuttova metoda
11. Numerické řešení soustav diferenciálních rovnic
12. Numerické řešení počátečních úloh – víceukrokové metody
13. Aplikované úlohy (fyzikální, matematická formulace a numerické řešení)
14. Shrnutí, rezerva

1 Laplaceova transformace a její využití pro řešení diferenciálních rovnic

K řešení některých obyčejných diferenciálních rovnic, zvláště rovnic s konstantními koeficienty, se s využívají transformační metody. Setkáme se s nimi např. při řešení elektrických obvodů, při vyšetřování lineárních systémů, při sledování vedení tepla, při studování kmitání struny či membrány apod.

Transformační metody jsou založeny na tom, že nejprve rovnici pomocí zvolené transformace zobrazíme, přičemž transformovaná rovnice, obsahující jako neznámou funkci obraz hledaného řešení, je výrazně jednodušší. Tento obraz z transformované rovnice vypočítáme a pomocí zpětné transformace získáme hledané řešení původního problému.

1.1 Laplaceova transformace

Definice

Nechť je funkce $f(t)$ spojitá (nebo alespoň po částech spojitá) a definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Pak **Laplaceova transformace** $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ funkce $f(t)$ je definována vztahem:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Funkce $f(t)$ je reálnou funkcí reálné proměnné a nazývá se **vzorem**.

Funkce $F(p)$ je komplexní funkcí komplexní proměnné a nazývá se **obrazem**.

Pro řešení praktických úloh pomocí Laplaceovy transformace uvedeme některá pravidla, kterými se tato transformace řídí.

Tabulka 1: Pravidla Laplaceovy transformace

vzor	obraz	
$f(t)$	$F(p)$	
$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(p) + bF_2(p)$	linearita
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \quad a \neq 0$	změna měřítka
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$	posunutí vzoru, $t \leq a$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$	obraz derivace
$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$	obraz druhé derivace
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$	obraz n -té derivace

Řešený příklad 1

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce: $f(t) = 1$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{\infty} = -\frac{1}{p} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} - e^{-p0} \right) = -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p}$$

Pro praktické počítání uvedeme tabulku obrazů vybraných funkcí.

Tabulka 2: Tabulka obrazů daných vzorů, $a, \omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

vzor $f(t)$	obraz $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$

Řešený příklad 2

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce: $f(t) = t + 1$

Použijeme vzorec pro transformaci $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ a $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$:

$$\mathcal{L}\{t + 1\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{1\} = \frac{1!}{p^{1+1}} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Řešený příklad 3

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce: $f(t) = t^3 + 7t^2 - 5t$

Použijeme vzorec pro transformaci $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$:

$$\mathcal{L}\{t^3 + 7t^2 - 5t\} = \mathcal{L}\{t^3\} + 7\mathcal{L}\{t^2\} - 5\mathcal{L}\{t\} = \frac{3!}{p^{3+1}} + 7\frac{2!}{p^{2+1}} - 5\frac{1!}{p^{1+1}} = \frac{6}{p^4} + \frac{14}{p^3} - \frac{5}{p^2}.$$

Řešený příklad 4

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce: $f(t) = a^t$

Nejprve funkci upravíme do tvaru e^{at} :

$$f(t) = a^t = e^{\ln a^t} = e^{t \cdot \ln a}.$$

Použijeme vzorec pro transformaci $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$:

$$\mathcal{L}\{a^t\} = \mathcal{L}\{e^{t \cdot \ln a}\} = \frac{1}{p - \ln a}.$$

Řešený příklad 5

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce: $f(t) = \cos^3 t$

Nejprve funkci upravíme s použitím známých goniometrických vzorců: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$$\begin{aligned} \cos 3t &= \cos(2t + t) = \cos 2t \cdot \cos t - \sin 2t \cdot \sin t = (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot \cos t - 2 \sin t \cos t \cdot \sin t = \\ &= \cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t = \cos^3 t - 3(1 - \cos^2 t) \cos t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \end{aligned}$$

Z předchozího vztahu vyjádříme předpis naší funkce $f(t) = \cos^3 t$:

$$f(t) = \frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t).$$

Použijeme vzorec pro transformaci $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos^3 t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t)\right\} = \frac{1}{4} \mathcal{L}\{\cos 3t\} + \frac{3}{4} \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{1}{4} \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{3}{4} \frac{p}{p^2 + 1} \\ &= \frac{p}{4(p^2 + 9)} + \frac{3p}{4(p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Řešený příklad 6

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce: $f(t) = \cos 5t \cdot \sin 3t$

Nejprve funkci upravíme s použitím známého goniometrického vzorce:

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

$$\cos 5t \cdot \sin 3t = \frac{1}{2} (\sin 8t - \sin 2t)$$

Použijeme vzorec pro transformaci $\mathcal{L} \{ \sin \omega t \} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \cos 5t \cdot \sin 3t \} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} (\sin 8t - \sin 2t) \right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ \sin 8t \} - \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ \sin 2t \} = \frac{1}{2} \frac{8}{p^2 + 64} - \frac{1}{2} \frac{2}{p^2 + 4} \\ &= \frac{4}{p^2 + 64} - \frac{1}{p^2 + 4}. \end{aligned}$$

Příklad

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce:

a) $f(t) = 3t^2 - 5t + 1$

n) $f(t) = (1 - t) \sin 5t$

b) $f(t) = 2e^t - 3e^{-2t} + 5e^{-t}$

o) $f(t) = te^{3t} \sin t$

c) $f(t) = te^{-2t} + t^2e^{-3t}$

p) $f(t) = (2t - 3)e^{-2t} \cos 4t$

d) $f(t) = 6te^{-2t} + 2e^{-t} + t^3e^{-4t}$

q) $f(t) = (1 - 2t)e^{3t} \sin t$

e) $f(t) = 2 \sin t - 3 \cos t$

r) $f(t) = t^2 \sin 2t$

f) $f(t) = 3 \sin 2t + 4 \cos 2t$

s) $f(t) = t^2 \cos 3t$

g) $f(t) = 8t^2e^{-2t} + 3 \sin t$

t) $f(t) = 4 \sin^2 3t + te^{3t} \sin 2t$

h) $f(t) = t \sin 2t$

u) $f(t) = 2 + e^{-3t} \cos t \cos 3t$

i) $f(t) = t \cos 5t$

v) $f(t) = 4e^{-t} + 3e^{-3t} + 5 \sin 2t$

j) $f(t) = e^{-3t} \sin 2t$

w) $f(t) = \sin 2t \sin 3t$

k) $f(t) = e^{-2t} \cos 2t$

x) $f(t) = 3 \cos^2 2t$

l) $f(t) = (3t - 1)e^{-2t}$

y) $f(t) = 4 \cos 2t \cos 3t$

m) $f(t) = (3 + 2t) \cos t$

z) $f(t) = 6 \sin 3t \cos t$

1.2 Zpětná Laplaceova transformace

Přechod od funkce $F(p)$ ke vzoru $f(t)$ se nazývá zpětná Laplaceova transformace a značí se $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Tabulka 3: Tabulka vzorů daných obrazů, $a, \omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

obraz $F(p)$	vzor $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t)$
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$
$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{1}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$

Řešený příklad 7

Pomocí zpětné Laplaceovy transformace najděte vzor dané funkce:

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}$$

Nejprve funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{1}{p^2(p-4)} = -\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{16(p-4)}$$

Použijeme vzorce pro zpětnou transformaci (tabulka 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{16(p-4)}\right\} = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} - \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \\ &+ \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-4}\right\} = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t} \end{aligned}$$

Řešený příklad 8

Pomocí zpětné Laplaceovy transformace najděte vzor dané funkce:

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+3}$$

Nejprve funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{2p+3}{p^2+4p+3} = \frac{3}{2(p+3)} + \frac{1}{2(p+1)}$$

Použijeme vzorce pro zpětnou transformaci (tabulka 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2p+3}{p^2+4p+3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{2(p+3)} + \frac{1}{2(p+1)} \right\} = \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+3} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} = \\ &= \frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

Řešený příklad 9

Pomocí zpětné Laplaceovy transformace najděte vzor dané funkce:

$$F(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p}$$

Nejprve funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p} = -\frac{4}{7p} - \frac{2}{3(p+2)} + \frac{61}{15(p+5)}$$

Použijeme vzorce pro zpětnou transformaci (tabulka 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{4}{7p} - \frac{2}{3(p+2)} + \frac{61}{15(p+5)} \right\} = -\frac{4}{7} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} - \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+2} \right\} + \\ &+ \frac{61}{15} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+5} \right\} = -\frac{4}{7} - \frac{2}{3} e^{-2t} + \frac{61}{15} e^{-5t} \end{aligned}$$

Příklad

Pomocí zpětné Laplaceovy transformace najděte vzor dané funkce:

a) $F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p}$

m) $F(p) = \frac{2p + 3}{(p^2 + 4)^2}$

b) $F(p) = \frac{1}{p(p + 3)^2}$

n) $F(p) = \frac{2p^2 - 4p + 5}{p^3 + 7p^2 + 9p + 8}$

c) $F(p) = \frac{1}{(p - 1)^2(p + 2)}$

o) $F(p) = \frac{4p + 5}{p^2 + 6p + 13}$

d) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$

p) $F(p) = \frac{3p^2 - 6p + 2}{(p + 1)^3(p + 3)}$

e) $F(p) = \frac{1}{(p + 1)^3}$

q) $F(p) = \frac{2p^2 - 3p + 5}{p(p + 1)(p + 3)}$

f) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$

r) $F(p) = \frac{4p + 6}{p^3 + 7p^2 + 10p}$

g) $F(p) = \frac{4p - 3}{p^2 - 2p + 5}$

s) $F(p) = \frac{5p - 2}{p^2 + 4p + 5}$

h) $F(p) = \frac{2p + 3}{p^2 + 4}$

t) $F(p) = \frac{2p + 3}{(p + 1)^3}$

i) $F(p) = \frac{3p + 4}{p^2 + 2p + 10}$

u) $F(p) = \frac{p + 3}{p^2(p^2 + 1)}$

j) $F(p) = \frac{3p - 5}{p^2 + 2p + 5}$

v) $F(p) = \frac{5p^2 + 10}{p(p^2 - 2p + 5)}$

k) $F(p) = \frac{6p + 3}{p^3 + 5p^2 + 9p + 5}$

w) $F(p) = \frac{p^2 + p - 4}{(p + 4)^2}$

l) $F(p) = \frac{4p - 3}{p^2(p + 1)^2(p + 2)}$

x) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$

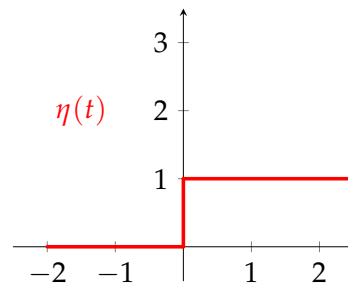
1.3 Laplaceova transformace impulsu a periodických funkcí

Při hledání obrazů konečných impulsů užíváme tzv. **jednotkový skok** a **Diracův impuls**.

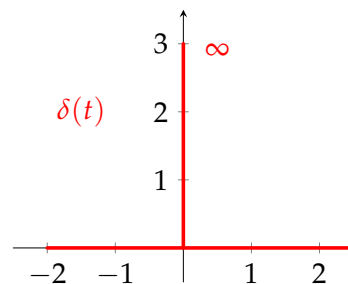
Definice

Jednotkový skok

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$$

**Definice****Diracův impuls**

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases}$$



Vlastnosti:

$$\mathcal{L}\{\eta(t)\} = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Diracův impuls je derivací jednotkového skoku.

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt$$

Věta

Věta o translaci Je-li $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, pak:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\eta(t-a)\} = F(p)e^{-ap} \quad \text{pro } a > 0.$$

Řešený příklad 10

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } t \in \langle 3, 5 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 3, 5 \rangle \end{cases}$$

Vidíme, že $f(t) = 2\eta(t-3) - 2\eta(t-5)$.

Použijeme Laplaceovu transformaci a dostaneme

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{2\eta(t-3) - 2\eta(t-5)\} = \frac{2}{p}e^{-3p} - \frac{2}{p}e^{-5p}$$

Řešený příklad 11

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce:

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

Vidíme, že $f(t) = (1-t)(\eta(t) - \eta(t-1))$.

Použijeme Laplaceovu transformaci a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(1-t)(\eta(t) - \eta(t-1))\} = \eta(t) - t\eta(t) + (t-1)\eta(t-1) = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p} \end{aligned}$$

Řešený příklad 12

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce:

$$f(t) = \begin{cases} t-t^2 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

Vidíme, že $f(t) = (t-t^2)(\eta(t) - \eta(t-1))$.

Použijeme Laplaceovu transformaci a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t-t^2)(\eta(t) - \eta(t-1))\} = \mathcal{L}\{(t-t^2)\eta(t) - (t-t^2)\eta(t-1)\} = \\ &= \mathcal{L}\{(t-t^2)\eta(t) + (t^2-t)\eta(t-1)\} = \mathcal{L}\{(t-t^2)\eta(t) + ((t-1)^2 + (t-1))\eta(t-1)\} = \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^3}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-p} \end{aligned}$$

Řešený příklad 13

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 & \text{pro } t \in (1, 3) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vidíme, že $f(t) = 2t\eta(t) - 2t\eta(t-1) + 2\eta(t-1) - 2\eta(t-3)$.

Použijeme Laplaceovu transformaci a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{2t\eta(t) - 2t\eta(t-1) + 2\eta(t-1) - 2\eta(t-3)\} = \\ &= \mathcal{L}\{2t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) - 2\eta(t-3)\} = \\ &= 2\frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-p} - 2\frac{1}{p}e^{-3p} = \\ &= \frac{1}{p^2} (2 - 2e^{-p} - 2pe^{-3p}) \end{aligned}$$

Příklad

Pomocí Laplaceovy transformace najděte obraz dané funkce:

a)

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

b)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pro } t \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

c)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pro } t \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 2 \rangle \end{cases}$$

d)

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 & \text{pro } t \notin \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

e)

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

f)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ -1 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 2 \rangle \end{cases}$$

g)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 3-t & \text{pro } t \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

h)

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 3-t & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

i)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$$

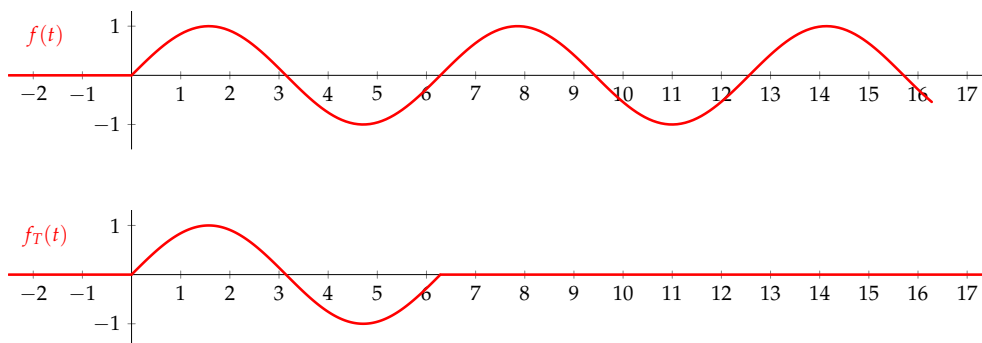
j)

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2-t & \text{pro } t \in \langle 1, 3 \rangle \\ t-4 & \text{pro } t \in \langle 3, 4 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 4 \rangle \end{cases}$$

Periodické funkce

Je dána periodická funkce $f(t)$, pro $t \geq 0$ s periodou T . Pak lze snadno určit impuls $f_T(t)$, popisující základní periodu.

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0, T \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, T \rangle \end{cases}$$



Pak funkci $f(t)$ můžeme zapsat jako součet posunutých impulsů $f_T(t)$.

Věta

Pro obraz funkce $f(t)$ platí:

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Připomeňme, že obraz impulsu $f_T(t)$ spočítáme z vyjádření

$$f_T(t) = f(t)(\eta(t) - \eta(t - T)).$$

Řešený příklad 14

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má periodu T :

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{pro } 1 < t < 2 \end{cases}$$

Vidíme, že $f_T(t) = \eta(t) - 2\eta(t - 1) + \eta(t - 2)$ pro $t \geq 0$.

$$F_T(p) = \mathcal{L}\{f_T(t)\} = \mathcal{L}\{\eta(t) - 2\eta(t - 1) + \eta(t - 2)\} = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$$

A použijeme vzorec pro obraz periodické funkce $F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}$:

$$F(p) = \frac{1 - e^{-p} + e^{-2p}}{p(1 - e^{-2p})} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p(1 + e^{-p})(1 - e^{-p})} = \frac{1 - e^{-p}}{p(1 + e^{-p})}$$

Řešený příklad 15

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má periodu T :

$$f_T(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{pro } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Vidíme, že $f(t) = \sin(\eta(t) - \eta(t - \pi))$.

$$F_T(p) = \mathcal{L}\{f_T(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(\eta(t) - \eta(t - \pi))\} = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}e^{-\pi p}$$

A použijeme vzorec pro obraz periodické funkce $F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}$:

$$F(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-2\pi p})} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}$$

Řešený příklad 16

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má peri-

odu T :

$$f_T(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{pro } 1 < t \leq 2 \\ -1 & \text{pro } 2 < t < 3 \end{cases}$$

Vidíme, že

$$\begin{aligned} f_T(t) &= t(\eta(t) - \eta(t-1)) + (2-t)(\eta(t-1) - \eta(t-2)) = \\ &= t\eta(t) - ((t-1)+1)\eta(t-1) + (1+(1-t))\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2) = \\ &= t\eta(t) - 2\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2) \end{aligned}$$

$$F_T(p) = \mathcal{L}\{f_T(t)\} = \mathcal{L}\{t\eta(t) - 2\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2)\} = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$$

A použijeme vzorec pro obraz periodické funkce $F(p) = \frac{F_T(p)}{1-e^{-pT}}$:

$$F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2(1 - e^{-3p})}$$

Příklad

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má periodu T :

a)

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{pro } 1 < t < 2, \end{cases} \quad T = 2$$

b)

$$f_T(t) = \sin t \quad \text{pro } 0 \leq t < \pi, \quad T = \pi$$

c)

$$f_T(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{pro } 1 \leq t \leq 3 \\ t - 4 & \text{pro } 3 < t < 4, \end{cases} \quad T = 4$$

d)

$$f_T(t) = 1 - t \quad \text{pro } 0 \leq t < 1, \quad T = 1$$

1.4 Zpětná transformace obrazů impulsů

Při hledání vzoru k funkcím, které obsahují výraz e^{-ap} , $a > 0$, používáme větu o translaci, kterou použijeme tím způsobem, že danou funkci rozdělíme na součet členů tvaru $F(p)e^{-ap}$, kde k funkci $F(p)$ známe vzor. Je-li $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, pak hledaný předmět k funkci $F(p)e^{-ap}$ je funkce $f(t-a)\mu(t-a)$, $t \geq 0$. Tedy výraz e^{-ap} nás informuje o tom, že provedeme posunutí.

Řešený příklad 17

Pomocí zpětné Laplaceovy transformace najděte vzor dané funkce:

$$F(p) = \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-3p}$$

Použijeme vzorce pro zpětnou transformaci (tabulka 3):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-3p}\right\} = (t-2)\eta(t-2) + \eta(t-3).$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat:

$$f(t) = \begin{cases} t-2 & \text{pro } 2 \leq t \leq 3 \\ t-1 & \text{pro } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

1.5 Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

Ze základních pravidel Laplaceovy transformace víme, že operace derivování podle t v prostoru vzorů odpovídá násobení proměnnou p v prostoru obrazů. Lze tedy očekávat, že Laplaceova transformace převede jisté typy diferenciálních rovnic na algebraické.

Budeme postupovat v těchto krocích:

1. Jednotlivé části diferenciální rovnice s počátečními podmínkami transformujeme pomocí pravidel z tabulek 1 a 2.
2. Dostaneme algebraickou rovnici, kterou snadno vyřešíme.
3. Řešení této rovnice převedeme pomocí zpětné Laplaceovy transformace, s využitím vztahů z tabulky 3, a dostaneme řešení diferenciální rovnice vyhovující podmínkám.

Řešený příklad 18

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y' - 2y = 1$$

s počáteční podmínkou $y(0) = -2$.

Transformujeme jednotlivé části dané rovnici (tabulky 1, 2).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) + 2 \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(p) \\ \mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

A dostáváme rovnici

$$pY(p) + 2 - 2Y(p) = \frac{1}{p},$$

ze které vyjádříme $Y(p)$.

$$pY(p) + 2 - 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p)(p - 2) = \frac{1}{p} - 2$$

$$Y(p)(p - 2) = \frac{1 - 2p}{p}$$

$$Y(p) = \frac{1 - 2p}{p(p - 2)}$$

provedeme rozklad na parciální zlomky

$$Y(p) = -\frac{1}{2p} - \frac{3}{2(p - 2)}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací převedeme řešení $Y(p)$ na $y(t)$ (tabulka 3)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{2p} \right\} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{3}{2(p - 2)} \right\} = -\frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p - 2} \right\} = -\frac{3}{2} e^{2t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{2p} - \frac{3}{2(p - 2)} \right\} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{2t}$$

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y(t) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{2t}$.

Řešený příklad 19

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y = \sin 2t$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Transformuje jednotlivé části dané rovnici (tabulky 1, 2).

$$\mathcal{L} \{y''(t)\} = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1$$

$$\mathcal{L} \{y(t)\} = Y(p)$$

$$\mathcal{L} \{\sin 2t\} = \frac{2}{p^2 + 4}$$

A dostáváme rovnici

$$p^2 Y(p) - 1 + 4Y(p) = \frac{2}{p^2 + 4},$$

ze které vyjádříme $Y(p)$.

$$\begin{aligned} p^2 Y(p) - 1 + 4Y(p) &= \frac{2}{p^2 + 4} \\ Y(p)(p^2 + 4) &= \frac{2}{p^2 + 4} + 1 \\ Y(p) &= \frac{2}{(p^2 + 4)^2} + \frac{1}{p^2 + 4} \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací převedeme řešení $Y(p)$ na $y(t)$ (tabulka 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(p^2 + 4)^2} \right\} &= 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p^2 + 2^2)^2} \right\} = 2 \frac{1}{2 \cdot 2^3} (\sin 2t - 2t \cos 2t) = \frac{1}{8} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 4} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 2^2} \right\} = \frac{1}{2} \sin 2t \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(p^2 + 4)^2} + \frac{1}{p^2 + 4} \right\} = \\ &= \frac{1}{8} (\sin 2t - 2t \cos 2t) + \frac{1}{2} \sin 2t = \frac{5}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t \end{aligned}$$

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y(t) = \frac{5}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t$.

Příklad

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení diferenciální rovnice s podmínkami.

- $y' + 3y = 0, \quad y(0) = 5$
- $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
- $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-3t} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y' + 2y = \sin t, \quad y(0) = 0$
- $y'' + 3y' = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$
- $y'' + 4y = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y'' + 2y' = t \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y'' + 2y' + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y'' - 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y'' + y = \cos t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
- $y'' - 4y = 4t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- $y'' = 4e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y'' + y = t^3 + 6t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- $y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

o) $y'' + y = \cos t + \sin 2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

p) $y'' + y = 2 + e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

q) $y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

r) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

s) $y'' - y' = 2 - 2t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

t) $y'' + y = 4e^t, \quad y(0) = 4, y'(0) = -3$

u) $y'' + y = 3 \sin 2t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

v) $y'' + 9y = 5 \cos 3t, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$

w) $y'' + y' = 2t - 3, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

x) $y'' + 6y' + 9y = (2t + 1)e^t, \quad y(0) = 5, y'(0) = \frac{1}{8}$

1.6 Řešení soustav diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

Ukážeme použití transformace na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Budeme postupovat v těchto krocích:

1. Jednotlivé části soustavy diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami transformujeme pomocí pravidel z tabulek 1 a 2.
2. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme například Cramerovým pravidlem.
3. Řešení této rovnice převedeme pomocí zpětné Laplaceovy transformace, s využitím vztahů z tabulky 3, a dostaneme řešení soustavy diferenciálních rovnic vyhovující podmínkám.

Řešený příklad 20

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$y' = 4y - 3z + \sin t$$

$$z' = -2y - z - 2 \cos t$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0, z(0) = 0$.

Transformujeme jednotlivé části soustavy rovnic (tabulky 1, 2).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(p) \\ \mathcal{L}\{\sin t\} &= \frac{1}{p^2 + 1} \\ \mathcal{L}\{\cos t\} &= \frac{p}{p^2 + 1} \\ \mathcal{L}\{z'(t)\} &= pZ(p) - z(0) = pZ(p) \\ \mathcal{L}\{z(t)\} &= Z(p)\end{aligned}$$

A dostáváme soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}pY(p) &= 4Y(p) - 3Z(p) + \frac{1}{p^2 + 1} \\ pZ(p) &= 2Y(p) - Z(p) - 2\frac{p}{p^2 + 1}\end{aligned}$$

tu upravíme a zapíšeme v maticovém tvaru.

$$\begin{aligned}(p - 4)Y(p) + 3Z(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} \\ -2Y(p) + (p + 1)Z(p) &= \frac{-2p}{p^2 + 1}\end{aligned} \quad \begin{pmatrix} p - 4 & 3 \\ -2 & p + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(p) \\ Z(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 + 1} \\ \frac{-2p}{p^2 + 1} \end{pmatrix}$$

Soustavu vyřešíme, tedy najdeme $Y(p)$, $Z(p)$ a to například pomocí Cramerova pravidla.

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} p - 4 & 3 \\ -2 & p + 1 \end{vmatrix} = (p - 4)(p + 1) - 3(-2) = p^2 - 3p + 2 = (p - 1)(p - 2) \\ D_Y &= \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2 + 1} & 3 \\ \frac{-2p}{p^2 + 1} & p + 1 \end{vmatrix} = (p + 1)\frac{1}{p^2 + 1} - 3\frac{-2p}{p^2 + 1} = \frac{7p + 1}{p^2 + 1} \\ D_Z &= \begin{vmatrix} p - 4 & \frac{1}{p^2 + 1} \\ -2 & \frac{-2p}{p^2 + 1} \end{vmatrix} = (p - 4)\frac{-2p}{p^2 + 1} - (-2)\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{-2p^2 + 8p + 2}{p^2 + 1} \\ Y(p) &= \frac{D_Y}{D} = \frac{\frac{7p + 1}{p^2 + 1}}{(p - 1)(p - 2)} = \frac{7p + 1}{(p^2 + 1)(p - 1)(p - 2)} \\ Z(p) &= \frac{D_Z}{D} = \frac{\frac{-2p^2 + 8p + 2}{p^2 + 1}}{(p - 1)(p - 2)} = \frac{-2p^2 + 8p + 2}{(p^2 + 1)(p - 1)(p - 2)}\end{aligned}$$

Funkce $Y(p)$, $Z(p)$ rozložíme na parciální zlomky :

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{7p + 1}{(p^2 + 1)(p - 1)(p - 2)} = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{4}{p - 1} + \frac{3}{p - 2} \\ Z(p) &= \frac{-2p^2 + 8p + 2}{(p^2 + 1)(p - 1)(p - 2)} = \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{4}{p - 1} + \frac{2}{p - 2}\end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací převedeme řešení $Y(p)$, $Z(p)$ na $y(t)$, $z(t)$ (tabulka 3)

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + 1} - \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{4}{p - 1} + \frac{3}{p - 2}\right\} = \cos t - 2 \sin t - 4e^t + 3e^{2t} \\ z(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Z(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{4}{p - 1} + \frac{2}{p - 2}\right\} = 2 \cos t - 2 \sin t - 4e^t + 2e^{2t}\end{aligned}$$

Řešení soustavy diferenciálních rovnic je $y(t) = \cos t - 2 \sin t - 4e^t + 3e^{2t}$, $z(t) = 2 \cos t - 2 \sin t - 4e^t + 2e^{2t}$.

Řešený příklad 21

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y' &= -y + z - 2e^{-t} \\z' &= -6y + 4z - 4e^{-t}\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

Transformujeme jednotlivé části soustavy rovnic (tabulky 1, 2).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 1 \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(p) \\ \mathcal{L}\{e^{-t}\} &= \frac{1}{p+1} \\ \mathcal{L}\{z'(t)\} &= pZ(p) - z(0) = pZ(p) - 1 \\ \mathcal{L}\{z(t)\} &= Z(p)\end{aligned}$$

A dostáváme soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}pY(p) - 1 &= -Y(p) + Z(p) - 2\frac{1}{p+1} \\ pZ(p) - 1 &= -6Y(p) + 4Z(p) - 4\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

tu upravíme a zapíšeme v maticovém tvaru.

$$\begin{aligned}(p+1)Y(p) - Z(p) &= \frac{p-1}{p+1} \\ 6Y(p) + (p-4)Z(p) &= \frac{p-3}{p+1}\end{aligned} \quad \begin{pmatrix} p+1 & -1 \\ 6 & p-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(p) \\ Z(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p-1}{p+1} \\ \frac{p-3}{p+1} \end{pmatrix}$$

Soustavu vyřešíme, tedy najdeme $Y(p)$, $Z(p)$ a to například pomocí Cramerova pravidla.

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ 6 & p-4 \end{vmatrix} = (p+1)(p-4) - (-1)6 = p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2) \\ D_Y &= \begin{vmatrix} \frac{p-1}{p+1} & -1 \\ \frac{p-3}{p+1} & p-4 \end{vmatrix} = (p-4)\frac{p-1}{p+1} - (-1)\frac{p-3}{p+1} = \frac{p^2 - 4p + 1}{p+1} \\ D_Z &= \begin{vmatrix} p+1 & \frac{p-1}{p+1} \\ 6 & \frac{p-3}{p+1} \end{vmatrix} = (p+1)\frac{p-3}{p+1} - 6\frac{p-1}{p+1} = \frac{p^2 - 8p + 3}{p+1} \\ Y(p) &= \frac{D_Y}{D} = \frac{\frac{p^2 - 4p + 1}{p+1}}{(p-1)(p-2)} = \frac{p^2 - 4p + 1}{(p+1)(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+1} \\ Z(p) &= \frac{D_Z}{D} = \frac{\frac{p^2 - 8p + 3}{p+1}}{(p-1)(p-2)} = \frac{p^2 - 8p + 3}{(p+1)(p-1)(p-2)} = \frac{2}{p-1} - \frac{3}{p-2} + \frac{2}{p+1}\end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací převedeme řešení $Y(p)$, $Z(p)$ na $y(t)$, $z(t)$ (tabulka 3)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+1}\right\} = e^t - e^{2t} + e^{-t}$$

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Z(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p-1} - \frac{3}{p-2} + \frac{2}{p+1}\right\} = 2e^t - 3e^{2t} + 2e^{-t}$$

Řešení soustavy diferenciálních rovnic je $y(t) = e^t - e^{2t} + e^{-t}$, $z(t) = 2e^t - 3e^{2t} + 2e^{-t}$.

Příklad

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

a)

$$\begin{aligned} y' &= -y + z + e^t \\ z' &= y - z + e^t \quad y(0) = 0, z(0) = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y' &= -z \\ z' &= 2y + 2z \quad y(0) = 1, z(0) = 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y' &= -y + 3z \\ z' &= y + z + e^{-2t} \quad y(0) = 1, z(0) = 1 \end{aligned}$$

1.7 Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace impulsu

Řešený příklad 22

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y' - y = f(t) \quad f(t) = \begin{cases} 2-t & \text{pro } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = -1$.

Transformuje jednotlivé části dané rovnici (tabulky 1, 2).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) + 1 \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(p) \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(2-t)(\eta(t) - \eta(t-2))\} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}) \end{aligned}$$

A dostáváme rovnici

$$pY(p) + 1 - Y(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p})$$

ze které vyjádříme $Y(p)$.

$$\begin{aligned} pY(p) + 1 - Y(p) &= \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}) \\ (p-1)Y(p) &= -1 + \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}) \\ Y(p) &= \frac{-p^2 + 2p - 1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p^2(p-1)}e^{-2p} \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací převedeme řešení $Y(p)$ na $y(t)$ (tabulka 3)

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-p^2 + 2p - 1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p^2(p-1)}e^{-2p}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \left(\frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right)e^{-2p}\right\} = \\ &= (t-1)\eta(t) + (-1 - (t-2) + e^{t-2})\eta(t-2) \end{aligned}$$

Řešení diferenciální rovnice je funkce

$$y(t) = \begin{cases} t-1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 2 \\ e^{t-2} & \text{jinak} \end{cases}$$

Příklad

Pomocí Laplaceovy transformace najděte partikulární řešení diferenciální rovnice s počátečními podmínkami:

a)

$$y' - 2y = f(t) \quad y(0) = -3 \quad f(t) = \begin{cases} 8 - 4t & \text{pro } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

b)

$$y'' + y = f(t) \quad y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

c)

$$y'' + 4y = f(t) \quad y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ 2 & \text{pro } t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

d)

$$y'' + y = f(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = -1 \quad f(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{pro } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

e)

$$y' + 3y = f(t) \quad y(0) = 1 \quad f(t) = \begin{cases} 9t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 9 & \text{pro } t > 1 \end{cases}$$

f)

$$y' - y = f(t) \quad y(0) = -1 \quad f(t) = \begin{cases} 5 \sin 2t & \text{pro } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

g)

$$y'' + 9y = f(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

2 Numerické řešení diferenciálních rovnic

V této kapitole se budeme věnovat numericému řešení počáteční úlože, tedy problému, kde hledáme funkci $y = y(x)$, která na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyhovuje rovnici

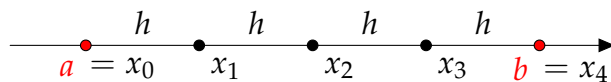
$$y'(x) = f(x, y(x))$$

a počáteční podmínce

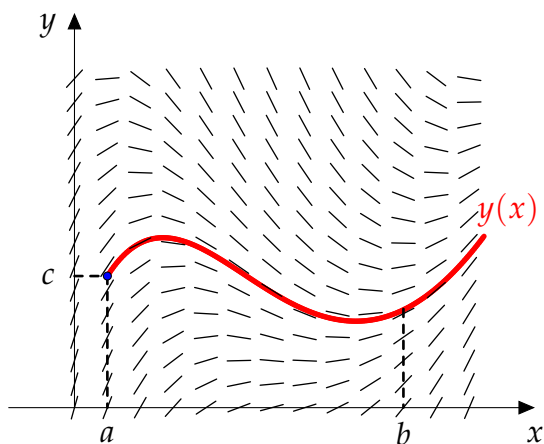
$$y(a) = c.$$

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n dílů. Tedy vytvoříme uzly $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n$ a to s krokem $h = (b - a)/n$. Hodnoty jednotlivých uzlů spočítáme

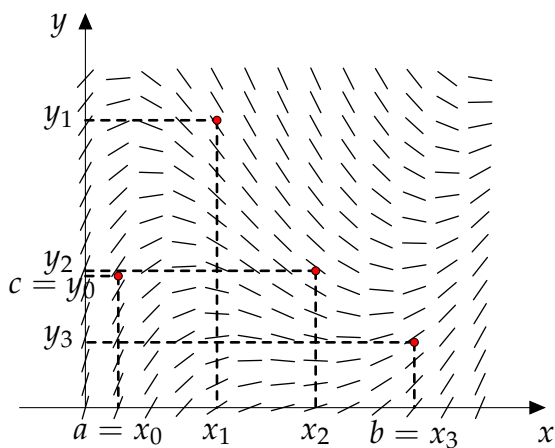
$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$



V každém uzlu stanoví číslo, tedy $y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_n$, která aproximují hodnoty přesného řešení $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$.



Přesné řešení $y(x)$



Numerické řešení
 $[x_0, y_0], [x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$

2.1 Eulerova metoda

Hodnoty jednotlivých uzlů spočítáme

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

V diferenciální rovnici

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

zapsané v uzlu x_i nahradíme přesnou hodnotu $y(x_i)$ její aproximací y_i

Derivaci na levé straně vyjádříme numerickým vzorcem

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i).$$

Známe hodnoty x_i, y_i a vypočítáme hledanou hodnotu y_{i+1}

$$\begin{aligned}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} - y_i &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

Hodnotu y_0 známe z počáteční podmínky a další hodnoty vypočítáme y_{i+1} podle odvozeného vzorce.

$$\begin{aligned}y_0 &= c, \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Řešený příklad 1

Počáteční úlohu

$$y' = x^2 - 0.2y, \quad y(-2) = -1$$

řešte na intervalu $\langle -2, 3 \rangle$ pomocí Eulerovy metody s krokem $h = 1$.

Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$n = \frac{b - a}{h} = \frac{3 - (-2)}{1} = 5.$$

Známe hodnotu $x_0 = -2$ a dále spočítáme hodnoty dalších uzlů:

$$\begin{aligned}x_0 &= a = -2 \\ x_1 &= a + h = -2 + 1 = -1 \\ x_2 &= a + 2h = -2 + 2 = 0 \\ x_3 &= a + 3h = 1 \\ x_4 &= a + 4h = 2 \\ x_5 &= a + 5h = 3\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky známe hodnotu $y_0 = -1$ a další hodnoty y_i pro $i = 1, \dots, 5$ spočítáme ze vzorce $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

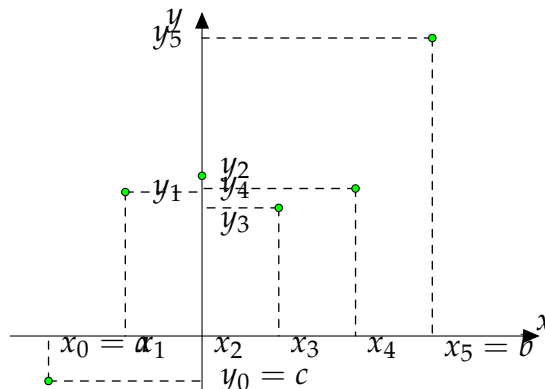
V tomto příkladu je $f(x, y) = x^2 - 0.2y$ a $h = 1$, tedy vzorec bude mít tvar $y_{i+1} = y_i + x_i^2 - 0.2y_i$:

$$\begin{aligned}y_0 &= -1 \quad (\text{počáteční podmínka}) \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + x_0^2 - 0.2y_0 = -1 + (-2)^2 - 0.2 \cdot (-1) = 3.2 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + x_1^2 - 0.2y_1 = 3.2 + (-1)^2 - 0.2 \cdot 3.2 = 3.56 \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + x_2^2 - 0.2y_2 = 3.56 + 0^2 - 0.2 \cdot 3.56 = 2.848 \\ y_4 &= y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + x_3^2 - 0.2y_3 = 2.848 + 1^2 - 0.2 \cdot 2.848 = 3.2784 \\ y_5 &= y_4 + hf(x_4, y_4) = y_4 + x_4^2 - 0.2y_4 = 3.2784 + 2^2 - 0.2 \cdot 3.2784 = 6.6227\end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty, tedy přibližné řešení počáteční úlohy, zapíšeme do tabulky:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	3.2	3.56	2.848	3.2784	6.6227

A zobrazíme si graf přibližného řešení:



Řešený příklad 2

Počáteční úlohu

$$y' = y - x^2 + 2, \quad y(0) = -1$$

řešte na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ pomocí Eulerovy metody s krokem $h = 0.5$ a $h = 0.1$. Výsledky srovnejte také s přesným řešením. K nalezení řešení použijte MATLAB.

Zadáme krajní meze intervalu $\langle a, b \rangle$, hodnotu počáteční podmínky c a funkci pravé strany diferenciální rovnice f . Zadáme velikost kroku h a vypočítáme počet dílů dělení n .

```
>> a=0; b=2; c=-1;
>> f=@(x,y) (y-x.^2+2);
>> h=0.5; n=(b-a)/h
n =
    4
```

Pomocí dvojtečkové konvence vypočítáme hodnoty $x_i = a + ih$ pro $i = 0, \dots, n$.

```
>> x=a:h:b
x =
    0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000
```

Zadáme hodnotu y_0 a spočítáme ostatní hodnoty y . Připomeňme, že v Matlabu se indexuje od 1, tedy hodnoty y_0, y_1, \dots, y_n se uloží do proměnných $y(1), y(2), \dots, y(n+1)$.

```
>> y(1)=c;
>> for i=1:n, y(i+1)=y(i)+h*f(x(i),y(i)); end
>> y
y =
   -1.0000   -0.5000    0.1250    0.6875    0.9063
```

Nalezené numerické řešení diferenciální rovnice je:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	-1	-0.5	0.125	0.6875	0.9063

Nejprve uložíme do proměnných $x_{0.5}$ a $y_{0.5}$ řešení pro krok $h = 0.5$ a pro další výpočet smažeme proměnné x, y, n, h .

```
x05=x; y05=y;  
clear x y n h
```

Zadáme velikost kroku h a vypočítáme počet dílů dělení n . Pomocí dvojtečkové konvence vypočítáme hodnoty x_i .

```
>> h=0.1; n=(b-a)/h  
n =  
    20  
>> x=a:h:b;
```

Zadáme hodnotu první hodnoty y_0 a spočítáme ostatní hodnoty y .

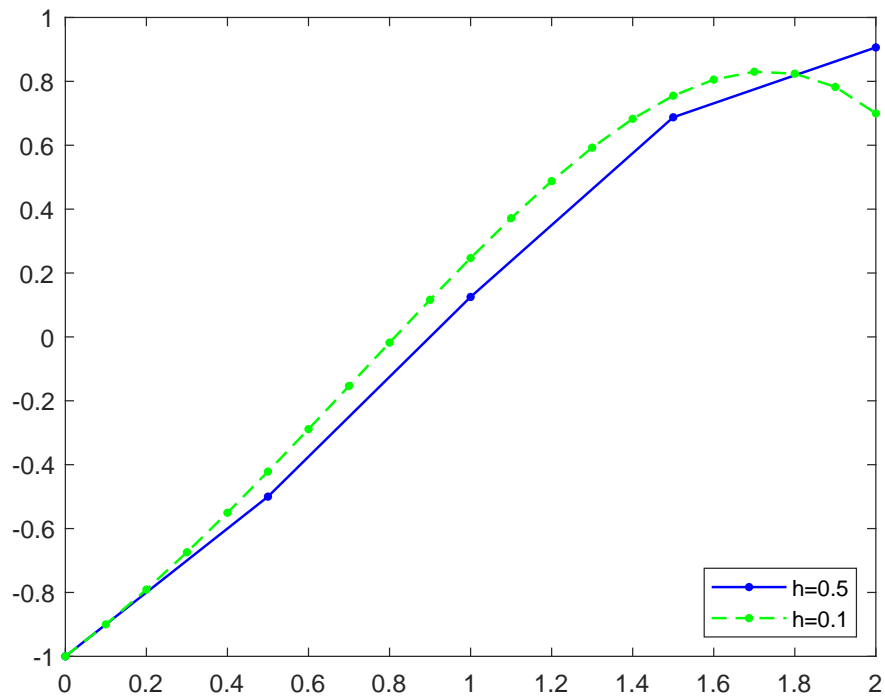
```
>> y(1)=c;  
>> for i=1:n, y(i+1)=y(i)+h*f(x(i),y(i)); end
```

Hodnoty numerického řešení vypíšeme do tabulky.

```
>> [x;y]  
ans =  
Columns 1 through 6  
  
    0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000  
-1.0000 -0.9000 -0.7910 -0.6741 -0.5505 -0.4216  
  
Columns 7 through 12  
  
    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000    1.1000  
-0.2887 -0.1536 -0.0179    0.1163    0.2469    0.3716  
  
Columns 13 through 18  
  
    1.2000    1.3000    1.4000    1.5000    1.6000    1.7000  
0.4877    0.5925    0.6828    0.7550    0.8055    0.8301  
  
Columns 19 through 21  
  
    1.8000    1.9000    2.0000  
0.8241    0.7825    0.6998
```

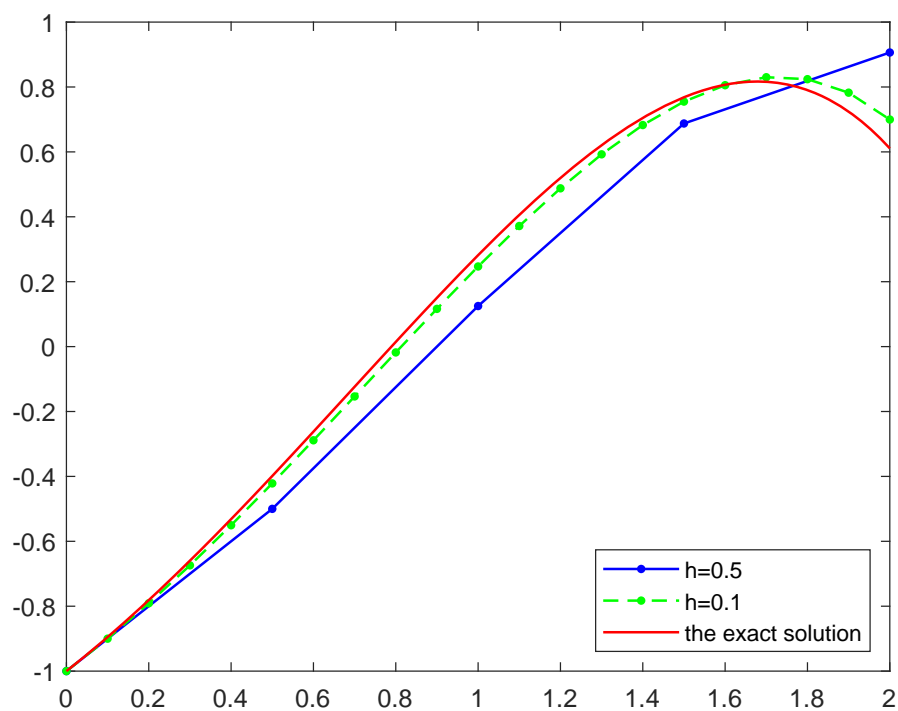
Vykreslíme numerické řešení pro krok $h = 0.5$ (které jsme uložili do proměnných $x_{0.5}$, $y_{0.5}$) a pro krok $h = 0.1$.

```
>> x01=x; y01=y;  
>> plot(x05,y05,'b.-',x01,y01,'g.--')  
>> legend('h=0.5','h=0.1')
```



Graficky srovnáme numerická řešení s přesným řešením $y = x^2 + 2x - e^x$ počáteční úlohy.

```
>> plot(x05,y05,'b.-',x01,y01,'g.--')
>> hold on
>> fplot(@(x) x.^2+2*x-exp(x),[0,2],'r')
>> legend('h=0.5','h=0.1','the exact solution')
```



Příklad

Počáteční úlohu

$$y' = \frac{3y - 2x}{x + y}, \quad y(3) = 2$$

řešte na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ pomocí Eulerovy metody

- a) s krokem $h = 0.5$.
- b) s krokem $h = 0.5$. K nalezení řešení použijte MATLAB.
- c) s krokem $h = 0.5$, $h = 0.1$ a $h = 0.05$. Výsledky porovnejte graficky a do tabulky. K nalezení řešení použijte MATLAB.

2.2 Rungeova-Kuttova metoda

Hodnoty jednotlivých uzlů spočítáme

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Hodnotu y_0 známe z počáteční podmínky

$$y_0 = c.$$

Připomeňme, že pro každé $i = 0, \dots, n-1$ známe hodnoty x_i, y_i a hledáme hodnotu y_{i+1} . Pro každé i si vždy spočítáme konstanty k_1, k_2, k_3, k_4 a z nich pak vypočítáme hledanou hodnotu y_{i+1} :

pro $i = 0, \dots, n-1$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, \dots, n-1$$

Řešený příklad 3

Počáteční úlohu

$$y' = y - x^2 + 2, \quad y(0) = -1$$

řešte na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ pomocí Rungeovy-Kuttovy metody s krokem $h = 0.5$.Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-0}{0.5} = 4.$$

Známe hodnotu $x_0 = -2$ a dále spočítáme hodnoty dalších uzlů:

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = a + h = 0 + 0.5 = 0.5$$

$$x_2 = a + 2h = 0 + 1 = 1$$

$$x_3 = a + 3h = 1 + 1.5 = 1.5$$

$$x_4 = a + 4h = 0 + 2$$

Z počáteční podmínky známe hodnotu $y_0 = -1$ a další hodnoty spočítáme tak, že pro každé i si vždy spočítáme konstanty k_1, k_2, k_3, k_4 a z nich pak vypočítáme hledanou hodnotu y_{i+1} .

$$y_0 = -1 \quad (\text{počáteční podmínka})$$

V tomto příkladu je $f(x, y) = y - x^2 + 2$ a $h = 0.5$:

pro $i = 0$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.5$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.5938$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.6172$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.6836$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ &= -1 + \frac{1}{6}(0.5 + 2 \cdot 0.5938 + 2 \cdot 0.6172 + 0.6836) = -0.3991 \end{aligned}$$

pro $i = 1$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0.6755$$

$$k_2 = hf(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.6881$$

$$k_3 = hf(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.6912$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.6461$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.2809$$

pro $i = 2$

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0.6405$$

$$k_2 = hf(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_1) = 0.5193$$

$$k_3 = hf(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_2) = 0.4890$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = 0.2600$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.7671$$

pro $i = 3$

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = 0.2586$$

$$k_2 = hf(x_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + \frac{1}{2}k_1) = -0.0830$$

$$k_3 = hf(x_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + \frac{1}{2}k_2) = -0.1684$$

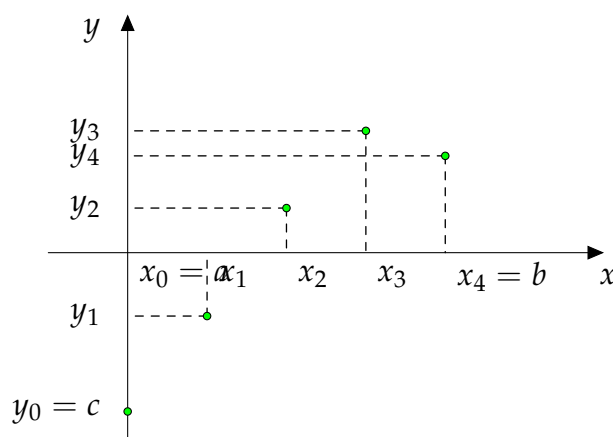
$$k_4 = hf(x_3 + h, y_3 + k_3) = -0.7007$$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.6096$$

Vypočtené hodnoty, tedy přibližné řešení počáteční úlohy, zapíšeme do tabulky:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	-1	-0.3991	0.2809	0.7671	0.6096

A zobrazíme si graf přibližného řešení:



Řešený příklad 4

Počáteční úlohu

$$y' = y - x^2 + 2, \quad y(0) = -1$$

řešte na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ pomocí Rungeovy-Kuttovy metody s krokem $h = 0.5$. K nalezení řešení použijte MATLAB.

Zadáme krajní meze intervalu $\langle a, b \rangle$, hodnotu počáteční podmínky c a funkci pravé strany diferenciální rovnice f . Zadáme velikost kroku h a vypočítáme počet dělení n .

```
>> a=0; b=2; c=-1;
>> f=@(x,y) (y-x.^2+2);
>> h=0.5;
>> n=(b-a)/h
n =
    4
```

Pomocí dvojtečkové konvence vypočítáme hodnoty x_i .

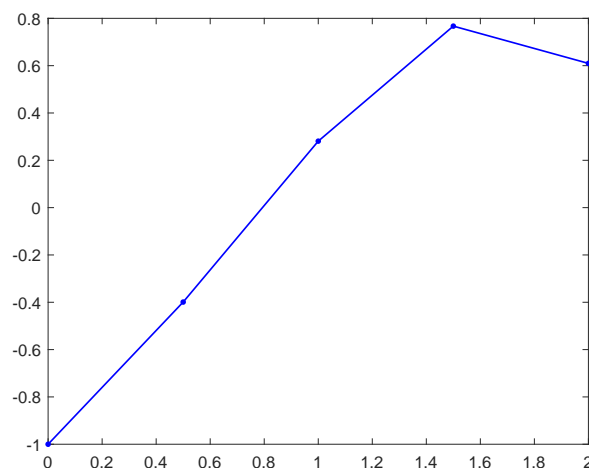
```
>> x=a:h:b
x =
    0    0.5    1    1.5    2
```

Zadáme hodnotu y_0 a spočítáme ostatní hodnoty y . Připomeňme, že v Matlabu se indexuje od 1, tedy hodnoty y_0, y_1, \dots, y_n se uloží do proměnných $y(1), y(2), \dots, y(n+1)$. A příkaz cyklu tvoří vše počínaje `for` a konče `end`. Nakonec vykreslíme graf

```
>> y(1)=c;
>> for i=1:n
    k1=h*f(x(i),y(i));
    k2=h*f(x(i)+h/2,y(i)+1/2*k1);
    k3=h*f(x(i)+h/2,y(i)+1/2*k2);
    k4=h*f(x(i)+h,y(i)+k3);
    y(i+1)=y(i)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
>> y
y =
   -1.0000   -0.3991    0.2809    0.7671    0.6096
>> plot(x,y,'b.-')
```

Nalezené přibližné řešení diferenciální rovnice je:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	-1	-0.3991	0.2809	0.7671	0.6096



Řešený příklad 5

Počáteční úlohu

$$y' = x^2 - 0.2y, \quad y(-2) = -1$$

řešte na intervalu $\langle -2, 3 \rangle$ pomocí metody Runge-Kutta s krokem $h = 1$. K nalezení řešení použijte MATLAB. Výsledky srovnajte také s přesným řešením.

```
>> a=-2; b=3; c=-1;
>> f=@(x,y) (x.^2-0.2*y);
>> h=1;
>> n=(b-a)/h
>> x=a:h:b
>> y(1)=c;
>> for i=1:n
    k1=h*f(x(i),y(i));
    k2=h*f(x(i)+h/2,y(i)+1/2*k1);
    k3=h*f(x(i)+h/2,y(i)+1/2*k2);
    k4=h*f(x(i)+h,y(i)+k3);
    y(i+1)=y(i)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
```

Nalezené přibližné řešení diferenciální rovnice a srovnání s přesným řešením $y(x) = 5x^2 - 50x + 250 - 248.688737e^{-0.2x}$ je:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1.0000	1.2508	1.3112	1.3910	3.2994	8.5175
$ y_i - y(x_i) $	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0004	0.0008

Příklad

Počáteční úlohu

$$y' = \frac{3y - 2x}{x + y}, \quad y(3) = 2$$

řešte na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ pomocí metody Runge-Kutta

- s krokem $h = 0.5$.
- s krokem $h = 0.5$. K nalezení řešení použijte MATLAB.
- s krokem $h = 0.5$, $h = 0.1$ a $h = 0.05$. Výsledky porovnejte graficky a do tabulky. K nalezení řešení použijte MATLAB.

Příklad

Počáteční úlohu řešte na daném intervalu pomocí Eulerovy metody a metody Runge-Kutta

- s krokem $h = 0.1$.
- s krokem $h = 0.1$. K nalezení řešení použijte MATLAB. Výsledky srovnajte také

s přesným řešením.

c) s krokem $h = 0.1$, $h = 0.05$ a $h = 0.01$. Výsledky porovnejte graficky a do tabulky. K nalezení řešení použijte MATLAB.

1.

$$y' = \frac{y}{x^2 + 1} \quad y(0) = 2 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

2.

$$y' = 3xy^2 + \frac{y}{x} \quad y(1) = -1 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

3.

$$y' = \frac{x^2 + y}{x} \quad y(1) = 0 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

4.

$$y' = \frac{y}{x} - y^2 \quad y(1) = 1 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

5.

$$y' = x - xy \quad y(0) = 3 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

6.

$$y' = \frac{3x + y - 2}{2 - x} \quad y(0) = 4 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

7.

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x}} \quad y(1) = 4 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

8.

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) \quad y(1) = e \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

9.

$$y' = \frac{y + 2}{x + 3} \quad y(0) = 1 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

10.

$$y' = \sin^2(y - x) \quad y(0) = 0 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

11.

$$y' = \frac{xy + y}{x} \quad y(1) = \frac{1}{e} \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

12.

$$y' = \frac{1 - x^2}{xy} \quad y(1) = 2 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

13.

$$y' = e^y - 1 + x \quad y(0) = -2 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

14.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad y(1) = 2 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

15.

$$y' = x^3 + \frac{2y}{x} \quad y(1) = 0 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

16.

$$y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x} \quad y(1) = 1 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

17.

$$y' = x^2 + 1 + \frac{2xy}{x^2 + 1} \quad y(0) = 0 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

18.

$$y' = (x + y)^2 \quad y(0) = 0 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

19.

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} \quad y(3) = 3 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 3, 4 \rangle$$

20.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad y(3) = 1 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 3, 4 \rangle$$

21.

$$y' = \frac{y}{x^2 + 1} \quad y(1) = 4 \quad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

22.

$$y' = 3xy^2 + \frac{y}{x} \quad y(-2) = 1 \quad \text{na intervalu } x \in \langle -2, -1 \rangle$$

2.3 Příklad ode45

V této části se seznámíme s použitím vestavěného příkazu MATLABu, kterým lze numericky vyřešit diferenciální rovnici, případně i soustavu diferenciálních rovnic.

Řešený příklad 6

Počáteční úlohu:

$$y' = \frac{3y - 2x}{x + y}, \quad y(3) = 2$$

řešte na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$. K nalezení řešení použijte vestavěnou funkci MATLABu.

Nejjednodušší je přímo zavolat `ode45`, kde prvním parametrem je pravá strana diferenciální rovnice, druhým interval (na kterém hledáme řešení) a třetím hodnota počáteční podmínky. Výstupem bude graf numerického řešení.

```
>> ode45(@(x,y) (3*y-2*x) ./ (x+y), [3, 6], 2)
```

Pokud chceme výsledek uložit do proměnných, zavoláme jej takto:

```
>> [x, y]=ode45(@(x,y) (3*y-2*x) ./ (x+y), [3, 6], 2)
```

Druhou možností je zadat vstupní hodnoty do proměnných.

```
>> a=3, b=6, c=2
>> f=@(x,y) (3*y-2*x) ./ (x+y)
>> ode45(f, [a, b], c)
```

Další možností je pravou stranu zapsanu jako funkci v souboru.

```
function f=prava(x,y)
f=(3*y-2*x) ./ (x+y)
```

A pak ji použít při volání funkce:

```
>> ode45(@prava, [3, 6], 2)
```

Řešený příklad 7

Soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_1 - \sin(x), & y_1(2) &= 1, \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + x, & y_2(2) &= -1. \end{aligned}$$

řešte na intervalu $\langle 2, 10 \rangle$. K nalezení řešení použijte vestavěnou funkci MATLABu.

Pravé strany zadáme jako funkci:

```
function f=soustava(x,y)
f=[y(2)-y(1)-sin(x);
   y(1)-3*y(2)+x];
```

A příkaz `ode45` zavoláme, všimněte si, že počáteční podmínky zadáváme jako vektor:

```
>> ode45(@soustava, [2, 10], [1, -1])
```

Řešený příklad 8

Diferenciálních rovnicí druhého řádu s podmínkami:

$$y'' - (1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

řešte na intervalu $\langle 0, 25 \rangle$. K nalezení řešení použijte vestavěnou funkci MATLABu.

Zavedeme substituci $y' = z$ a převedeme na soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu s podmínkami:

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -y + (1 - y^2)z, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3 \end{aligned}$$

Pro Matlab označíme y jako y_1 a z jako y_2 :

```
function f=druheho(x,y)
f=[y(2);
   -y(1)+(1-y(1).^2).*y(2)];
```

A zavoláme `ode45`:

```
>> ode45(@duruheho, [0, 25], [1, 3])
```

Řešený příklad 9

Diferenciálních rovnicí druhého řádu s podmínkami a parametrem:

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

řešte na intervalu $\langle 0, 25 \rangle$ a pro hodnotou parametru $\mu = 7$. K nalezení řešení použijte vestavěnou funkci MATLABu.

Opět převedeme rovnici na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -y + \mu(1 - y^2)z, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3 \end{aligned}$$

```
function f=druhehosparametrem(x,y,mi)
f=[y(2);
   -y(1)+mi*(1-y(1).^2).*y(2)];
```

A příkaz `ode45` zavoláme. Všimněte si, jak zadáváme hodnotu parametru $\mu = 7$:

```
>> ode45(@duruhehosparametrem, [0, 25], [1, 3], [], 7)
```

2.4 Vícekrokové metody

V tomto odstavci si ukážeme odvození některých vícekrokových metod. Zavedeme také pojmy, pomocí nichž lze vyjádřit vztah mezi řádem metody a složitostí výpočtu.

Definice

Rekurentní metoda pro řešení počáteční úlohy se nazývá k -kroková, jestliže při výpočtu y_{i+1} potřebujeme v jednom rekurentním kroku použít hodnoty přibližného řešení z k předcházejících kroků, tj. hodnoty

$$y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}.$$

Je zřejmé, že u k -krokové metody potřebujeme pro zahájení výpočtu použít hodnoty přibližného řešení

$$y_0, y_1, \dots, y_{k-1},$$

kterým se říká *počáteční úsek délky k* . Jeho výpočet se provádí vhodnou jednokrokovou metodou, která by měla být aspoň stejného řádu, jako je používaná k -kroková metoda, aby nedošlo ke zbytečné ztrátě přesnosti.

Všechny dosud uvedené metody byly jednokrokové. Příkladem dvoukrokové metody je *metoda skákající žáby*:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), \quad (1)$$

kterou lze odvodit podobně jako Eulerovu metodu ze vzorce numerického derivování. Tato metoda je druhého řádu, protože stejného řádu je vzorec numerického derivování.

Definice

Rekurentní metoda pro řešení počáteční úlohy se nazývá l -bodová, pokud při výpočtu y_{i+1} potřebujeme v jednom rekurentním kroku vypočítat hodnoty pravé strany f v l různých bodech.

Z rekurentních vzorců vyplývá, že Eulerova metoda je jednobodová a Runge-Kutta metoda je čtyřbodová. U jednokrokových metod je tedy dosažení vyššího řádu spojeno se zvětšením objemu výpočtů v jednom rekurentním kroku. U vícekrokových metod lze dosáhnout vyššího řádu, ačkoliv metoda zůstane jednobodová. Například metoda skákající žáby (1) je jednobodová a druhého řádu.

Všechny dosud uvedené metody byly *explicitní*. Znamená to, že v jejich rekurentních vzorcích se y_{i+1} vyskytovalo pouze na levé straně vzorce. Z výpočetního hlediska to představuje příznivou situaci, kdy „stačí dosadit“. U vícekrokových metod se často používají vzorce, které jsou *implicitní*, u nichž se y_{i+1} vyskytuje i na pravé straně vzorce jako argument funkce f . Při použití těchto vzorců je situace složitější, v každém rekurentním kroku je potřeba „řešit rovnici“.

Adamsovy-Bashforthovy metody

Tímto názvem rozumíme skupinu explicitních vícekrokových rekurentních vzorců různých řádů, které lze odvodit integrací interpolačního polynomu sestaveného pro derivaci řešení diferenciální rovnice. Ukážeme si odvození tříkrokového vzorce.

Nechť $y(x)$ je řešením počáteční úlohy a označme $y'_i = y'(x_i)$. Derivaci $y'(x)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y'(x) = p_2(x) + e(x), \quad (2)$$

kde $p_2(x)$ je Newtonův tvar interpolačního polynomu pro uzly x_i, x_{i-1}, x_{i-2} a $e(x)$ je interpolační chyba:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y'_i + y'[x_{i-1}, x_i](x - x_i) + y'[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i](x - x_i)(x - x_{i-1}), \\ e(x) &= \frac{y^{(4)}(\xi)}{3!}(x - x_i)(x - x_{i-1})(x - x_{i-2}). \end{aligned}$$

V (2) budeme integrovat přes interval $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx &= y(x_{i+1}) - y(x_i), \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_2(x) dx &= y'_i \cdot h + y'[x_{i-1}, x_i] \cdot \frac{h^2}{2} + y'[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] \cdot \frac{5h^3}{6} \\ &= y'_i \cdot h + \frac{y'_i - y'_{i-1}}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{y'_i - 2y'_{i-1} + y'_{i-2}}{2h^2} \cdot \frac{5h^3}{6} \\ &= \frac{h}{12}(23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2}), \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x) dx &= \frac{y^{(4)}(\xi)}{3!} \cdot \frac{9}{4} \cdot h^4 = \frac{3}{8} \cdot h^4 \cdot y^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

Dohromady dostáváme:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \frac{h}{12}(23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2}) + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(\xi). \quad (3)$$

Vynecháním posledního členu vznikne rekurentní vzorec, který lze použít pro přibližný výpočet $y(x_{i+1})$. Stačí si uvědomit, že přibližné hodnoty derivací y'_i, y'_{i-1}, y'_{i-2} lze vypočítat dosazením do pravé strany f diferenciální rovnice.

Označíme-li $y_i \approx y(x_i)$ a $f_i = f(x_i, y_i) \approx y'_i$, obdržíme tento rekurentní vzorec:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}).$$

Jedná se o tříkrokovou metodu třetího řádu a současně je to metoda jednobodová! Stačí si uvědomit, že při výpočtu y_{i+1} není nutné počítat hodnoty f_{i-1} a f_{i-2} , protože k tomu již došlo v předchozích krocích. Všimněme si ještě řádu diskretizační chyby této metody. *Lokální chyba*, které se dopouštíme v každém rekurentní kroku je čtvrtého řádu, viz h^4 v posledním členu v (3). Pro posouzení celkové přesnosti je ale důležitější *globální chyba*, která je řádu o jedna menšího, protože v průběhu rekurentního výpočtu dochází ke kumulaci lokálních chyb. Ztráta přesnosti o jeden řád je typická pro numerické řešení počátečních úloh.

Analogickým postupem lze odvodit další Adamsovy-Bashforthovy vzorce lišící se počtem

kroků a řádem. Obvykle se používají vzorce nejvýše čtyřkrokové. Zde je jejich přehled:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i, \quad (4)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), \quad (5)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}), \quad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \quad (7)$$

Řešený příklad 10

Počáteční úlohu

$$y' = x^2 - 0.2y, \quad y(-2) = -1, \quad \text{na intervalu } \langle -2, 3 \rangle$$

řešte pomocí tříkrokové Adamsovy-Bashforthovy metody s krokem $h = 1$. Výsledky porovnejte s přesným řešením.

Počáteční úsek vypočítáme metodou Runge-Kutta, tj. $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ a $y_0 = -1$, $y_1 = 1.2508$, $y_2 = 1.3112$. Protože je $f(x, y) = x^2 - 0.2y$, vypočítáme $f_0 = (-2)^2 - 0.2 \cdot (-1) = 4.2000$, $f_1 = (-1)^2 - 0.2 \cdot 1.2508 = 0.7498$ a $f_2 = (0)^2 - 0.2 \cdot 1.3112 = -0.2622$. Pomocí vzorce (6) pak provedeme všechny další výpočty:

$$y_3 = -1.3112 + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0) = 1.5588,$$

$$f_3 = 1^2 - 0.2 \cdot 1.5588 = 0.6882,$$

$$y_4 = 1.5588 + \frac{h}{12}(23f_3 - 16f_2 + 5f_1) = 3.5400,$$

$$f_4 = 2^2 - 0.2 \cdot 3.5400 = 3.2920,$$

$$y_5 = 3.5400 + \frac{h}{12}(23f_4 - 16f_3 + 5f_2) = 8.8227.$$

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1.0000	1.2508	1.3112	1.5588	3.5400	8.8227
$ y_i - y(x_i) $	0	0.001	0.001	0.1679	0.2411	0.3060

Adamsovy-Moultonovy metody

Jedná se o skupinu rekurentních vícekrokových vzorců, které jsou implicitní. Odvodí se podobně jako vzorce pro Adamsovy-Bashforthovy metody, tedy integruje se interpolační polynom pro derivaci řešení diferenciální rovnice, nyní na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a pak se po-

sune indexování. Uved'me zde pouze přehled vzorců:

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}, \quad (8)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i), \quad (9)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}), \quad (10)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (11)$$

Například (10) představuje dvoukrokovou metodu třetího řádu. O tom, kolika je bodová, je předčasné hovořit, protože záleží na způsobu použití vzorce. Jak už jsme zmínili, tyto vzorce vyžadují v každém rekurentním kroku řešit rovnici pro neznámou y_{i+1} . Iterační způsob řešení si ukážeme v dalším odstavci. Zde si předvedeme jednodušší použití, kdy se do implicitního vzorce dosadí pravá strana diferenciální rovnice f a vyjádřením y_{i+1} se vzorec převede na explicitní tvar. Tento postup lze použít například, je-li pravá strana f lineární ve druhé proměnné.

Řešený příklad 11

Počáteční úlohu

$$y' = x^2 - 0.2y, \quad y(-2) = -1, \quad \text{na intervalu } \langle -2, 3 \rangle$$

řešte pomocí dvoukrokové Adamsova-Moultonovy metody pro $h = 1$. Výsledky porovnejte s přesným řešením.

Do pravé strany vzorce (10) dosadíme $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) = x_{i+1}^2 - 0.2y_{i+1}$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5(x_{i+1}^2 - 0.2y_{i+1}) + 8f_i - f_{i-1})$$

a vyjádříme y_{i+1} :

$$y_{i+1} = 12(y_i + \frac{h}{12}(5x_{i+1}^2 + 8f_i - f_{i-1})) / (12 + h).$$

Tento přepis Adamsova-Moultonova vzorce je dvoukroková metoda třetího řádu. Pro počáteční úsek vezmeme hodnotu z metody Runge-Kutta. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1.0000	1.2508	1.2929	1.3613	3.2628	8.4773
$ y_i - y(x_i) $	0	0.001	0.0183	0.0296	0.0362	0.0394

Metody prediktor-korektor

Princip odvození metod typu *prediktor-korektor* si ukážeme na dvoukrokovém Adamsově-Moultonově vzorci:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f_i - f_{i-1}).$$

Předpokládejme, že známe hodnoty y_i, y_{i-1}, y_{i-2} a chceme vypočítat y_{i+1} . Na uvedený vzorec můžeme nahlížet jako na rovnici v iteračním tvaru, pro jejíž vyřešení je přirozené použít metodu prostých iterací. Tato úvaha vede na následující výpočetní postup:

Pro $i = 1, \dots, n-1$ vypočti y_{i+1} takto:

(a) urči počáteční odhad y_{i+1}^0 ,

(b) počáteční odhad zpřesňuj pomocí iterací:

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f(x_{i+1}, y_{i+1}^k) + 8f_i - f_{i-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Krok (a) je *prediktor*, krok (b) je *korektor*. Metoda prediktor-korektor uvedená níže používá explicitní Adamsův-Bashforthův vzorec třetího řádu (6) jako prediktor. V korektoru se počítá jen jedno iterační zpřesnění. Pro stručný zápis použijeme symbol přiřazení „:=“ pro změnu hodnoty proměnné, což umožní vynechat iterační index k . Dostáváme následující algoritmus:

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = c; \\ y_1, y_2 \text{ vypočti pomocí jednokrokové metody;} \\ \text{Pro } i = 2, \dots, n-1 \text{ vypočti } y_{i+1} \text{ takto:} \\ \quad (P) \ y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}), \\ \quad (E) \ f_{i+1} := f(x_{i+1}, y_{i+1}), \\ \quad (C) \ y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}), \\ \quad (E) \ f_{i+1} := f(x_{i+1}, y_{i+1}). \end{array} \right\} \quad (12)$$

Uvedený algoritmus je tříkroková, dvoubodová metoda třetího řádu označovaná jako PECE. Podobně se používá označení $PE(CE)^k$, $P(EC)^k$ nebo $P(EC)^kE$, pro varianty algoritmů prediktor-korektor s k vnitřními kroky a s různou organizací doprovodných výpočtů.

Řešený příklad 12

Počáteční úlohu

$$y' = x^2 - 0.2y, \quad y(-2) = -1, \quad \text{na intervalu } \langle -2, 3 \rangle$$

řešte pomocí PECE metody (12) s krokem $h = 1$. Výsledky porovnejte s přesným řešením.

Počáteční úsek vypočítáme metodou Runge-Kutta, tj. $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0$ a $y_0 = -1, y_1 = 1.2508, y_2 = 1.3112$. Pomocí těchto hodnot vypočítáme $f_0 = 4.2000, f_1 = 0.7498$ a $f_2 = -0.2622$. U dalších výpočtů podle (12) uvádíme pouze pořadí v jakém vznikají jednotlivé hodnoty:

$$y_3 := 1.5588, \quad f_3 := 0.6882, \quad y_3 := 1.3607, \quad f_3 := 0.7279,$$

$$y_4 := 3.4178, \quad f_4 := 3.3164, \quad y_4 := 3.2496, \quad f_4 := 3.3501,$$

$$y_5 := 8.5908, \quad f_5 := 7.2818, \quad y_5 := 8.4564, \quad f_5 := 7.3087.$$

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1.0000	1.2508	1.3112	1.3607	3.2496	8.4564
$ y_i - y(x_i) $	0	0.001	0.001	0.0302	0.0493	0.6030

Porovnáním výsledků je vidět, že implicitní metoda je podstatně přesnější než explicitní metoda stejného řádu. Algoritmus prediktor-korektor představuje „nepřesnou“ implicitní metodu, takže přesnost je o něco menší.

Příklad

Počáteční úlohu

$$y' = y(1 + \sin x) - x^3, \quad y(1) = 0$$

řešte na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ pomocí Adamsovy-Bashforthovy metody čtvrtého řádu s krokem $h = 0.2$.

Příklad

Počáteční úlohu

$$y' = \frac{3y - 2x}{x + y}, \quad y(3) = 2$$

řešte na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ pomocí Adamsovy-Bashforthovy metody čtvrtého řádu s krokem $h = 0.5$, $h = 0.1$ a $h = 0.05$. Výsledky porovnejte graficky a do tabulky.

3 Aplikované úlohy

3.1 Elektrický obvod se sériově zapojenou cívkou

Řešený příklad 1

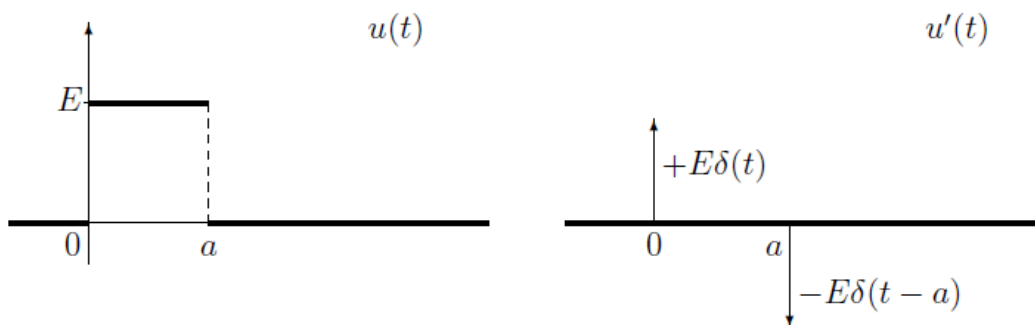
Řešte diferenciální rovnici

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t), \quad i(0) = 0,$$

kterou je popsán průběh proudu v elektrickém obvodu se sériově zapojenou cívkou s indukčností L , ohmickým odporem R a vnějším napětím $u(t)$, kde

$$u(t) = \begin{cases} Et & \text{pro } t \in \langle 0, a \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, a \rangle \end{cases}$$

Pro určení Laplaceovy transformace pravé strany musíme přetransformovat konečný impuls.



Použijeme Laplaceovu transformaci na $u(t)$.

$$\begin{aligned} u(t) &= Et(\mu(t) - \mu(t-a)) \\ \mathcal{L}\{u(t)\} &= \mathcal{L}\{E(t\mu(t) - t\mu(t-a))\} \\ U(p) &= E \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ap} \right) \\ U(p) &= \frac{E}{p} (1 - e^{-ap}) \end{aligned}$$

Připomeňme, že platí $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(p)$, $\mathcal{L}\{i'(t)\} = p I(p)$. Společně s tranformovanou pravou stranou dosadíme do diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri &= u(t) \\ pLI(p) + RI(p) &= \frac{E}{p} (1 - e^{-ap}) \end{aligned}$$

a vyjádříme z této rovnice $I(p)$ a upravíme:

$$\begin{aligned} pLI(p) + RI(p) &= \frac{E}{p}(1 - e^{-ap}) \\ I(p) &= E \frac{1 - e^{-ap}}{p(Lp + R)} \\ I(p) &= \frac{E}{L} \frac{1 - e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \\ I(p) &= \frac{E}{L} \left(\frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \right) \end{aligned}$$

Provedeme zpětnou Laplaceovou transformaci obou výrazů na pravé straně

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right) \right\} = \frac{L}{R} (e^{-0t} - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{L}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L}{R} e^{-ap} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right) \right\} = \frac{L}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}(t-a)}), \quad t > a \end{aligned}$$

A dosadíme do vztahu pro $I(p)$ a to zvlášť pro $t \in \langle 0, a \rangle$ a pro $t > a$. Pro $t < 0$ dodefinujeme funkci $i(t)$ nulou.

$$\begin{aligned} \text{pro } t \in \langle 0, a \rangle \quad i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{I(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{L} \left(\frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \right) \right\} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \\ \text{pro } t > a \quad i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{I(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{L} \left(\frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \right) \right\} = \\ &= \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t} - (1 - e^{-\frac{R}{L}(t-a)})) = \frac{E}{R} (e^{-\frac{R}{L}(t-a)} - e^{-\frac{R}{L}t}) \end{aligned}$$

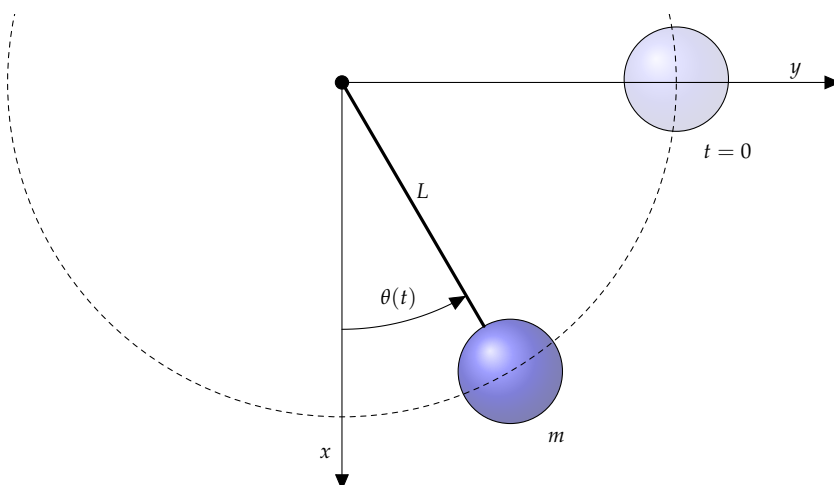
Potom dostaneme řešení obvodu:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) & \text{pro } t \in \langle 0, a \rangle \\ \frac{E}{R} (e^{-\frac{R}{L}(t-a)} - e^{-\frac{R}{L}t}) & \text{pro } t > a \end{cases}$$

3.2 Tlumené kyvadlo

Řešený příklad 2

Mějme kyvadlo tvořené koulí hmotosti $m = 0.3 \text{ kg}$ zavěšenou na nehmotné tyči, která má délku $L = 1.3 \text{ m}$. Koeficient tlumení nechť má hodnotu $c = 0.27 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$. Označme jako $\theta(t)$ úhel kyvadla v čase t (tj. úhel sevřený tyčí kyvadla s vertikální osou). V čase $t = 0 \text{ s}$ je kyvadlo vypuštěno z polohy $\theta(0) = 90^\circ$ s nulovou počáteční rychlostí, tj. $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete úhel kyvadla $\theta(t)$ po prvních 15 sekundách po vypuštění. Popis situace naleznete na Obrázku 1.



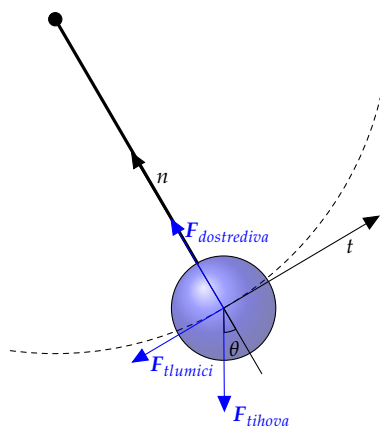
Obrázek 1: Popis kyvadla

Podle Newtonova druhého pohybového zákona platí, že součet sil působících na těleso v určitém směru je roven součinu hmotnosti tělesa a jemu v tomto směru udělenému zrychlení. Připomeňme vztah, podle něhož je rychlost při pohybu po kružnici rovna součinu úhlové rychlosti a délky, tj. $v = \frac{d\theta}{dt} \cdot L$. Na zavěšenou kouli působí několik sil:

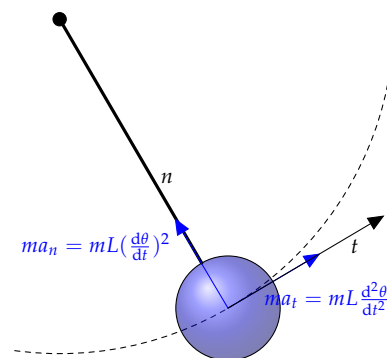
1. Dostředivá síla: Směřuje k bodu závěsu a její velikost je dána $F_{dostrediva} = mL \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$.
2. Tíhová síla: Směřuje dolů rovnoběžně s osou x a její velikost je $F_{tihova} = mg$.
3. Tlumící síla: Působí proti směru pohybu a její velikost je $F_{tlumici} = cL \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$. Velikost tlumící síly je totiž přímo úměrná rychlosti tělesa, tj. $L \frac{d\theta}{dt}$, a koeficientu tlumení c .

Síly působící na kouli kyvadla jsou znázorněny na Obrázku 3.2 a udělená zrychlení na Obrázku 3.2. Zakreslena je situace, kdy se koule kyvadla pohybuje prvním kvadrantem zleva doprava, tj. $\theta(t)$ je kladné a roste s časem. V jiných situacích by byl silový diagram obdobný.

Funkce úhlu $\theta(t)$, případně úhlové rychlosti, může nabývat také záporných hodnot. Záporné znaménko znamená, že je vektor v opačném směru.



Silový diagram



Tečná a normálová složka zrychlení

Z druhého pohybového zákona (sledujeme pouze tečné složky tíhové a tlumící síly a také zrychlení uvažujeme pouze ve směru tečny ke kružnici, po níž se koule kyvadla pohybuje) plyne, že

$$ma_t = F_{tihova}^t + F_{tlumici}, \quad \text{neboli}$$

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -cL \frac{d\theta}{dt} - mg \sin \theta.$$

Všimněte si záporných znamének před formullemi $cL \frac{d\theta}{dt}$ a $mg \sin \theta$. Ta nejsnáze vysvětlíme v situaci, kdy se koule kyvadla pohybuje zleva doprava, a $\theta(t)$ tedy roste a nachází se napravo od osy x , tedy $\theta(t) > 0$. Pak je $\frac{d\theta}{dt} > 0$

Po úpravě ekvivalentně

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{c}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{L} \sin \theta.$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kterou převedeme na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu a vyřešíme. Zavedeme-li novou závisle proměnnou $v = \frac{d\theta}{dt}$ (rychlost zavěšené koule), platí pak $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Diferenciální rovnici popisující pohyb kyvadla lze proto ekvivalentně zapsat jako soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{d\theta}{dt} = v, \quad \text{s počáteční podmínkou } \theta(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{L} \sin \theta, \quad \text{s počáteční podmínkou } v(0) = 0.$$

Pro nalezení řešení použijeme Eulerovu metodu modifikovanou pro soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu. Její myšlenka je obdobná jako u obyčejné Eulerovy metody. Necht' je dána soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z), \end{aligned} \tag{13}$$

na intervalu $\langle a, b \rangle$ s počátečními podmínkami $y(a) = y_0$ a $z(a) = z_0$. Pak je Eulerova metoda s krokem h dána rekurentními vztahy

$$\begin{aligned}x_0 &= a, \\x_{i+1} &= x_i + h, \\y_{i+1} &= y_i + f_1(x_i, y_i, z_i)h, \\z_{i+1} &= z_i + f_2(x_i, y_i, z_i)h.\end{aligned}$$

Výpočet provedeme s krokem $h = 0.1$ na intervalu $\langle 0, 15 \rangle$. V MATLABu nejprve definujeme základní konstanty a hodnoty ze zadání. Funkci θ přitom označíme jako `th` a funkci v jako `v`.

```
>> m = 0.3; c = 0.27; L = 1.3; g = 9.81;
>> h = 0.1; t(1) = 0; th(1) = pi/2; v(1) = 0;
>> n = (15-0)/h;
```

Dále je třeba definovat funkce pravých stran obou diferenciálních rovnic (13). Pojmenujeme je po řadě jako `dthdt` a `dvdt`.

```
>> dthdt = @(t,th,v) v; dvdt = @(t,th,v) - c/m*v - g/L*sin(th);
```

Nyní využijeme cyklu `for` pro aplikaci algoritmu Eulerovy metody.

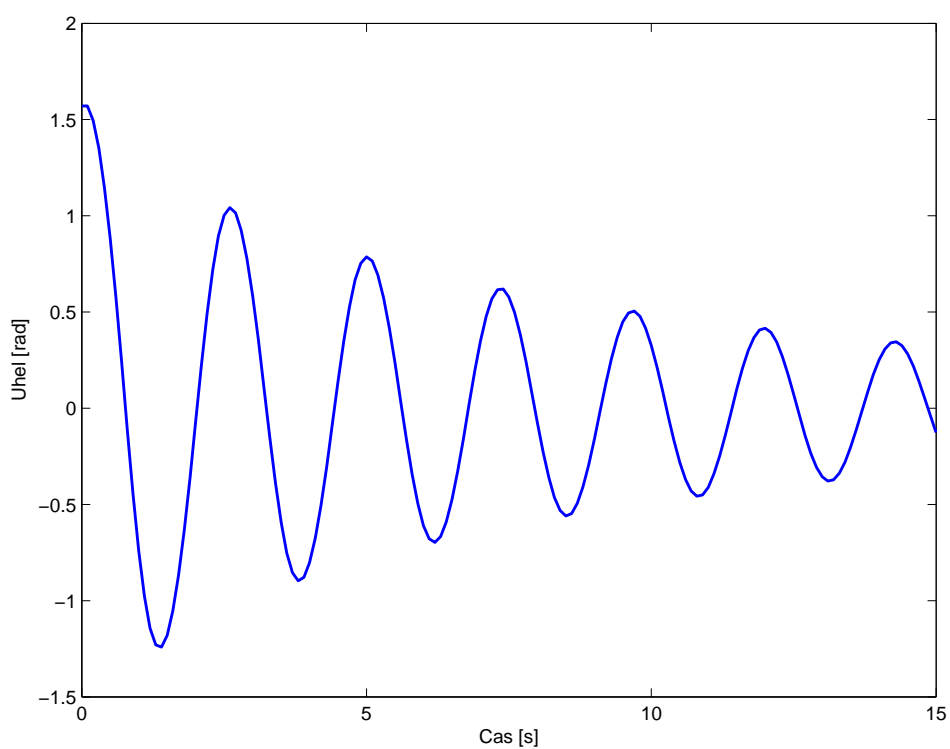
```
>> for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    th(i+1) = th(i) + dthdt(t(i),th(i),v(i))*h;
    v(i+1) = v(i) + dvdt(t(i),th(i),v(i))*h;
end
```

Závěrem si necháme zobrazit hodnoty řešení v tabulce i graficky. Graf si můžete prohlédnout na Obrázku 2.

```
>> [t' th' v']
ans =
     0     1.5708     0
    0.1000     1.5708   -0.7546
    0.2000     1.4953   -1.4413
    0.3000     1.3512   -2.0641
    0.4000     1.1448   -2.6148
    0.5000     0.8833   -3.0666
    0.6000     0.5767   -3.3738
    0.7000     0.2393   -3.4816
    0.8000    -0.1089   -3.3471
    0.9000    -0.4436   -2.9639
    1.0000    -0.7400   -2.3732
    .....
   14.0000     0.2520     0.5551
   14.1000     0.3075     0.3170
   14.2000     0.3392     0.0601
   14.3000     0.3452    -0.1964
```

14.4000	0.3255	-0.4341
14.5000	0.2821	-0.6364
14.6000	0.2185	-0.7892
14.7000	0.1396	-0.8817
14.8000	0.0514	-0.9074
14.9000	-0.0393	-0.8645
15.0000	-0.1258	-0.7570

```
>> plot(t,th)
>> xlabel('Cas [s]')
>> ylabel('Uhel [rad]')
```



Obrázek 2: Graf numerické aproximace funkce $\theta(t)$

3.3 Parašutista

Řešený příklad 3

Parašutista hmotnosti $m = 75$ kg vyskočí z letadla a padá volným pádem. Působí na něj aerodynamická odporová síla velikosti $F_{odpor} = c_o \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, kde y označuje vzdálenost, kterou padající parašutista urazil v čase t . Určete, jakou vzdálenost urazí za 9 s. Při výpočtu uvažujte koeficient $c_o = 0.2028$ kg · m a gravitační zrychlení $g = 8.1$ m · s².

Na parašutistu působí (proti směru pádu) odporová síla

$$F_{odpor} = c_o \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

a dále tíhová síla

$$F_{tihova} = mg.$$

Podle Newtonova druhého pohybového zákona platí, že součet sil je roven součinu hmotnosti a zrychlení. Protože zrychlení je rovno druhé derivaci funkce polohy, tj. $a = \frac{d^2y}{dt^2}$, platí v našem případě

$$mg - c_o \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = F_{tihova} - F_{odpor} = ma = m \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Po vydělení hmotností obdržíme rovnici

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = g - \frac{c_o}{m} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.

V rovnici se vyskytuje druhá derivace, jde tedy o diferenciální rovnici druhého řádu. Zavedeme-li však substituci $z = \frac{dy}{dt}$ (nová funkce hraje roli zrychlení parašutisty), dostaneme počáteční úlohu

$$\frac{dz}{dt} = g - \frac{c_o}{m} z^2, \quad z(0) = 0.$$

Tu nejprve vyřešíme a následně integrací získaného řešení z obdržíme y .

K vyřešení diferenciální rovnice použijeme MATLAB a Rungeovu-Kuttovu metodu čtvrtého řádu s krokem $h = 0.1$.

Nejprve definujeme konstanty a počáteční podmínky.

```
>> m = 75; c = 0.2028; g = 8.81; h = 0.1; % Konstanty
>> n = (9-0)/h;
>> f = @(t,z) g-c/m*z^2; % Funkce prave strany
>> t(1) = 0; z(1) = 0; % Pocatecni podminky
```

Následně využijeme Rungeovu-Kuttovu metodu implementovanou v interním příkazu MATLABu ode45. Vypíšeme pouze některé ze spočtených hodnot.

```
>> [t z] = ode45(f, 0:h:9, 0);  
>> [t z]  
ans =  
      0      0  
0.1000    0.8809  
0.2000    1.7614  
0.3000    2.6411  
0.4000    3.5195  
0.5000    4.3963  
0.6000    5.2709  
0.7000    6.1431  
0.8000    7.0124  
0.9000    7.8784  
1.0000    8.7407  
.....  
8.0000   48.1729  
8.1000   48.4232  
8.2000   48.6669  
8.3000   48.9043  
8.4000   49.1356  
8.5000   49.3607  
8.6000   49.5800  
8.7000   49.7934  
8.8000   50.0011  
8.9000   50.2034  
9.0000   50.4002
```

Řešení si můžeme nechat zobrazit také graficky, viz Obrázek 3.

```
>> plot(t, z)  
>> xlabel('Cas [s]')  
>> ylabel('Zrychleni [m.s^2]')
```

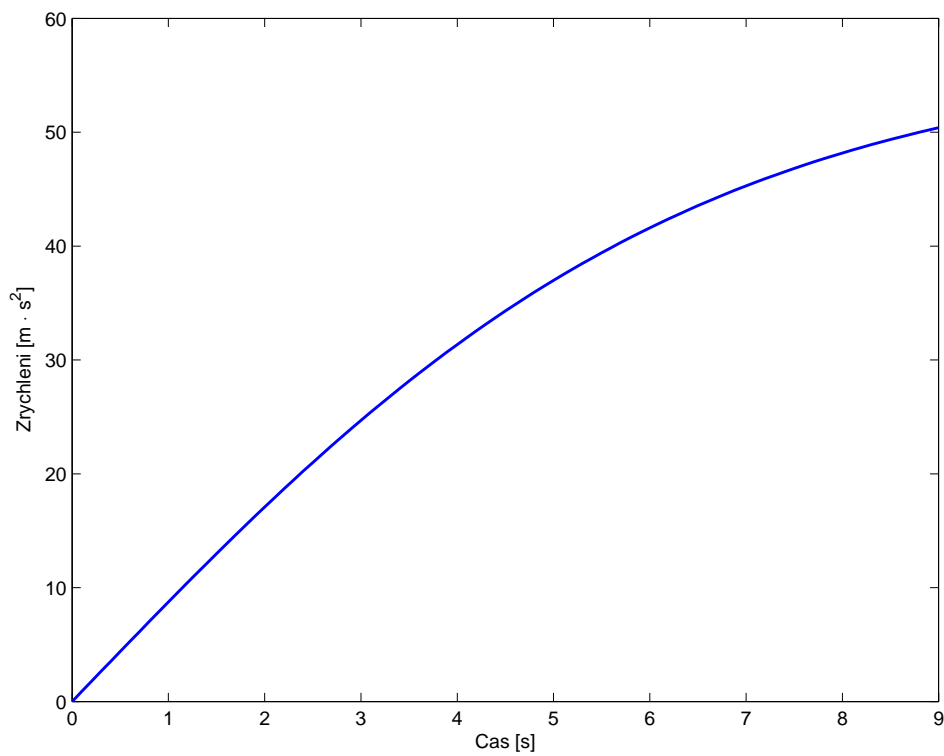
V druhé části úlohy přejdeme k řešení původního problému, totiž jakou vzdálenost urazí parašutista během 9 s. K tomu využijeme Newtonovy-Leibnizovy formule

$$\int_0^t z(t) dt = \int_0^t \frac{dy}{dt}(t) dt = y(t) - y(0) = y(t).$$

Naším úkolem je určit hodnotu $y(9) = \int_0^9 z(t) dt$. Protože neznáme předpis funkce z , nemůžeme použít interní funkce MATLABU `quad`. Známe však hodnoty funkce z v uzlových bodech intervalu $\langle 0, 9 \rangle$ s krokem $h = 0.1$, tj. v bodech $t_i = 0 + ih$, kde $i = 0, \dots, n$. To pro numerický výpočet integrálu stačí. Použijeme složené Simpsonovo pravidlo, které má v našem případě tvar

$$\int_0^9 z(t) dt \approx \frac{h}{3} \left[z(t_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} z(t_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} z(t_{2i}) + z(t_n) \right].$$

Poté vzorec přepíšeme v MATLABu.



Obrázek 3: Graf numerické aproximace funkce $z(t) = \dot{y}(t)$

```
>> I = h/3*(z(1)+4*sum(z(2:2:n))+ 2*sum(z(3:2:n))+z(n+1)) %  
    Připomenme, ze v MATLABu jsou uzly indexovany od jednicky  
I =  
    279.6779
```

Parašutista tedy během volného pádu, bereme-li v úvahu aerodynamickou odporovou sílu, urazí během 9 s asi 270.66 m.

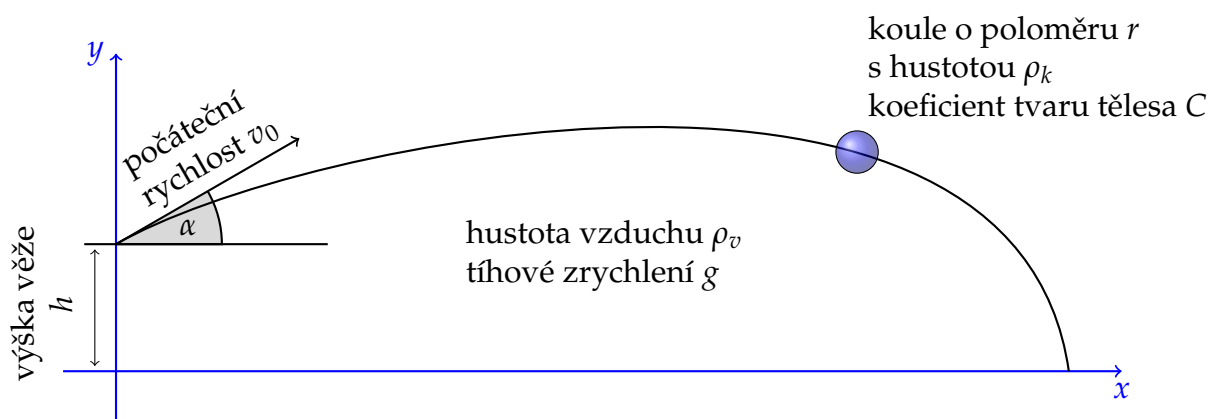
3.4 Šikmý vrh v odporovém prostředí

Řešený příklad 4

Dělová koule je vystřelena z věže výšky h pod úhlem α s počáteční rychlostí v_0 . Dělová koule má poloměr r a hustotu ρ_k . Prostředí, které ovlivňuje dráhu letu střely je charakterizováno hustotou vzduchu ρ_v . Jaká bude vzdálenost a čas dopadu? Celou situaci ilustruje obr. 4.

Zadané hodnoty fyzikálních veličin.

elevační úhel	$\alpha = \pi/4$ rad
počáteční rychlost	$v_0 = 500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
výška věže	$h = 10 \text{ m}$
poloměr koule	$r = 0.05 \text{ m}$
hustota koule	$\rho_k = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
hustota vzduchu	$\rho_v = 1.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
koeficient tvaru	$C = 0.26$
tíhové zrychlení	$g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$



Obrázek 4: Popis úlohy

Fyzikální formulace

Při fyzikální interpretaci problému budeme vycházet ze skládání sil

$$F_{\text{výsledná}} = -F_{\text{odpor}} - F_{\text{tíhová}}. \quad (14)$$

Odpor vzduchu působí silou F_{odpor} . Dále musíme vzít v úvahu také sílu tíhovou $F_{\text{tíhová}}$. Jednotlivé složky rovnice spočítáme podle následujících vztahů

$$F_{\text{výsledná}} = ma \quad F_{\text{odpor}} = \frac{1}{2} C \rho_v S v v \quad F_{\text{tíhová}} = m g,$$

kde \mathbf{a} je zrychlení, \mathbf{v} je vektor okamžité rychlosti a v je jeho velikost. Po jejich dosazení do rovnice (14) popisující rovnováhu sil obdržíme rovnost

$$m \mathbf{a} = -\frac{1}{2} C \rho_v S \mathbf{v} v - m \mathbf{g}.$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$\mathbf{a} = -k \mathbf{v} v - \mathbf{g},$$

kde

$$k = \frac{C \rho_v S}{2m} = \frac{C \rho_v \pi r^2}{2 \rho_k \frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{2 C \rho_v}{8 \rho_k r},$$

neboť v případě koule $S = \pi r^2$ a $m = \rho_k \frac{4}{3} \pi r^3$.

Zrychlení je derivací rychlost v čase, tedy $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k \mathbf{v} v - \mathbf{g}.$$

Potřebujeme znát nejen okamžitou rychlost v , ale i polohu koule s . Rychlost je derivací polohy v čase

$$\frac{ds}{dt} = \mathbf{v}.$$

Tento vztah je další diferenciální rovnicí, kterou budeme řešit.

Počáteční podmínky jsou dány počáteční polohou, tj. $s(0) = (0, h)$ a počáteční rychlostí $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$.

Fyzikální formulace šikmého vrhu v odporovém prostředí tedy představuje soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hledáme polohu koule } s \text{ a její rychlost } v : \\ \frac{ds}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k \mathbf{v} v - \mathbf{g}, \\ s(0) = (0, h), \quad \mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha) \end{array} \right\} \quad (15)$$

Matematická formulace

Poloha a rychlost střely závisí na dvou složkách a soustavu diferenciálních rovnic (15) můžeme převést na soustavu čtyř diferenciálních rovnic 1. řádu.

Přičemž označíme $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ a platí $\mathbf{g} = (0, g)$ a $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

$$\left. \begin{array}{l} s'_x = v_x \\ v'_x = -k v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ s'_y = v_y \\ v'_y = -k v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g \\ s_x(0) = 0, \quad v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \quad s_y(0) = h, \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha \end{array} \right\} \quad (16)$$

Řešení této soustavy je poloha koule $[s_x(t), s_y(t)]$ a její rychlost $(v_x(t), v_y(t))$ v čase t .

Numerické řešení

K řešení problému použijeme systém MATLAB. Sestavíme program pro řešení soustavy diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami. Použijeme vestavěnou funkci Matlabu `ode45` (Runge-Kutta 4.řádu). Připomeňme syntaxi tohoto příkazu: řešíme-li diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(a) = c$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je syntaxe následující `[x, y]=ode45(f, [a, b], c)`.

Pro řešení našeho problému si nejprve sestavíme funkci, popisující pravé strany soustavy. Funkci nazveme `strela` a je potřeba si položit tyto otázky:

1. Vstupem funkce je vektor neznámých x , který má složky odpovídající s_x, s_y, v_x, v_y a nezávislá proměnná čas t . Výstupem funkce budou pravé strany soustavy (16), které označíme dX .
2. Využijeme možnost nadefinovat některé proměnné jako globální, pak jejich hodnota bude známa i uvnitř jednotlivých funkcí. Postačí v hlavním okně a jednotlivých funkcích použít příkaz `global` a jména proměnných, které mají být globální. K výpočtu pravých stran budeme potřebovat konstanty g, k .

```
function [dX]=strela(t,X);  
%spocita prave strany soustavy  
global g k  
  
%prejmenujeme si promenne  
sx=X(1);  
vx=X(3);  
sy=X(3);  
vy=X(4);  
  
%prave strany soustavy  
dX(1,1)=vx;  
dX(2,1)=-k*sqrt(vx^2+vy^2)*vx;  
dX(3,1)=vy;  
dX(4,1)=-k*sqrt(vx^2+vy^2)*vy-g;
```

Nejprve nastavíme hodnoty parametrů úlohy.

```
>> global g k  
>> alfa=pi/4; v0=500; h=10; roK=7800;  
>> r=0.05; c=0.26; roV=1.2; g=9.81;  
>> k=(3*c*roV)/(8*roK*r);
```

Stěžejní otázkou je, na jakém intervalu hledáme řešení soustavy. Tedy jaký je čas dopadu. Zatím použijeme odhad z příkladu bez odporu vzduchu

$$t_{odhad} = \frac{1}{g}(v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh}).$$

```
>> todhad=1/g*(v0*sin(alfa)+ sqrt(v0^2*sin(alfa)^2-2*h*g));
```

Spočítáme počáteční podmínky (16).

```
>> pp=[0,v0*cos(alfa),h,v0*sin(alfa)]
pp =
      0   353.5534   10.0000   353.5534
```

Najdeme řešení soustavy diferenciálních rovnic (16). Výstupem příkazu `ode45` je vektor `cas` a matice `reseni`, jejíž první sloupec je hodnota s_x a třetím sloupcem je hodnota s_y .

```
>> [cas,reseni]=ode45(@strela,[0,todhad],pp)
cas =
```

```
      0
    0.0000
    0.0000
      ...
    35.2071
    37.0084
    38.8097
    40.6110
    42.4123
    44.2136
      ...
    71.6425
    71.8472
    72.0519
```

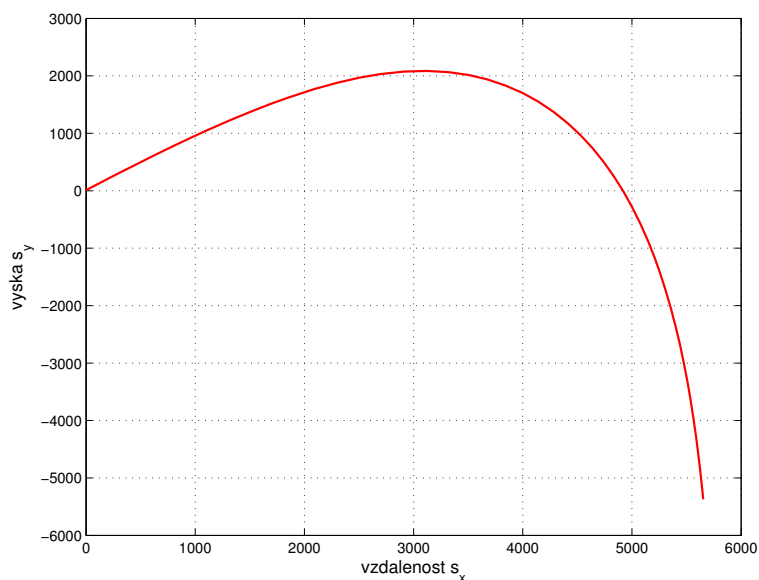
```
reseni =
1.0e+003 *
```

```
      0      0.3536      0.0100      0.3536
    0.0000      0.3536      0.0100      0.3536
    0.0000      0.3536      0.0100      0.3536
      .....
    4.6379      0.0590      0.7439     -0.1297
    4.7402      0.0546      0.5036     -0.1369
    4.8346      0.0503      0.2512     -0.1433
    4.9216      0.0463     -0.0120     -0.1488
    5.0015      0.0425     -0.2844     -0.1536
    5.0749      0.0390     -0.5648     -0.1577
      .....
    5.6493      0.0093     -5.2995     -0.1792
    5.6512      0.0092     -5.3362     -0.1793
    5.6531      0.0091     -5.3729     -0.1793
```

Dráhu střely zobrazíme do grafu (viz obr. 5). Vidíme, že skutečný čas dopadu je menší než je odhad, který jsme použili.

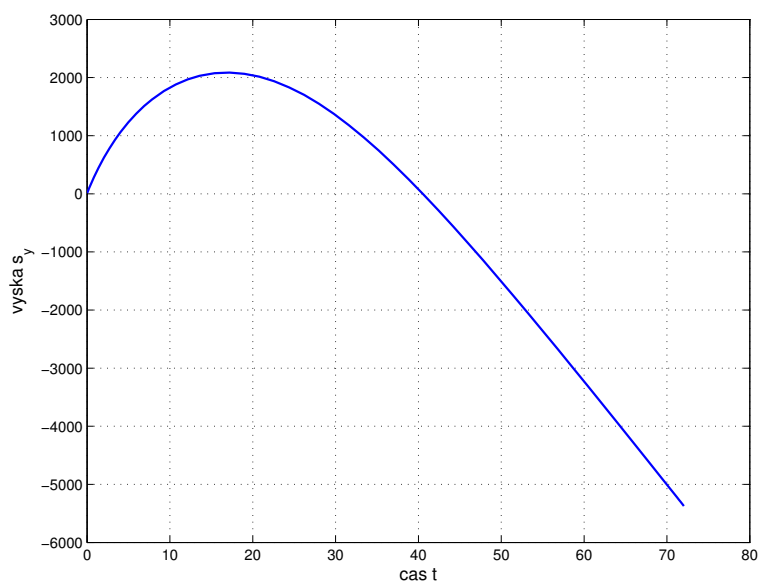
```
>> sx=reseni(:,1);
```

```
>> sy=reseni(:,3);
>> plot(sx,sy)
>> grid on
```



Obrázek 5: Dráha střely.

Pro výpočet vzdálenosti dopadu je potřeba znát čas dopadu. Na obrázku 6 je zobrazena výška střely $s_y(t)$ v závislosti na čase t .



Obrázek 6: Dráha střely a její výška v čase.

Vidíme, že čas dopadu bude řešením rovnice $s_y(t) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hledáme } t \in (0, t_{odhad}) : \\ s_y(t) = 0, \\ \text{kde } s_y(t) \text{ je řešením (16).} \end{array} \right\} \quad (17)$$

K nalezení řešení této nelineární rovnice použijeme buď vestavěnou funkci Matlabu `fzero` nebo vlastní implementaci numerické metody na řešení rovnice, např. metodu půlení intervalu.

Všimněme si, že funkce $s_y(t)$ nemá explicitní vyjádření. Umíme pouze spočítat její hodnotu v čase t , a to tak, že hodnotu t zvolíme jako horní mez intervalu, na kterém řešení soustavu diferenciálních rovnic.

Sestrojíme funkci, která spočítá výšku v čase t . Připomeňme, že výška střely s_y je třetí složka řešení soustavy diferenciálních rovnic.

Pro výpočet je potřeba mít i funkce `strela` z předchozího příkladu.

```
function [sy]=vyska(t)
%funkce pocita vysku strely v case t
global g h k v0 alfa

%pocatecni podminky
pp=[0,v0*cos(alfa),h,v0*sin(alfa)];

%resime soustavu diferencialnich r. (od 0 do t)
[cas,reseni]=ode45(@strela,[0,t],pp);

%reseni je ve tvaru sx,vx,sy,vy
%vyska sy je treti slozka reseni
sy=reseni(end,3);
```

Nejprve nastavíme hodnoty parametrů úlohy.

```
>> global g h k v0 alfa
>> alfa=pi/4; v0=500; h=10; roK=7800;
>> r=0.05; c=0.26; roV=1.2; g=9.81;
>> k=(3*c*roV)/(8*roK*r);
```

A najdeme kořen pomocí funkce `fzero`, jako počáteční aproximaci použijeme odhad t_{odhad} .

```
>> todhad=1/g*(v0*sin(alfa)+ sqrt(v0^2*sin(alfa)^2-2*h*g));
>> [t_dopad]=fzero(@vyska,todhad)
t_dopad =
    40.5276
```

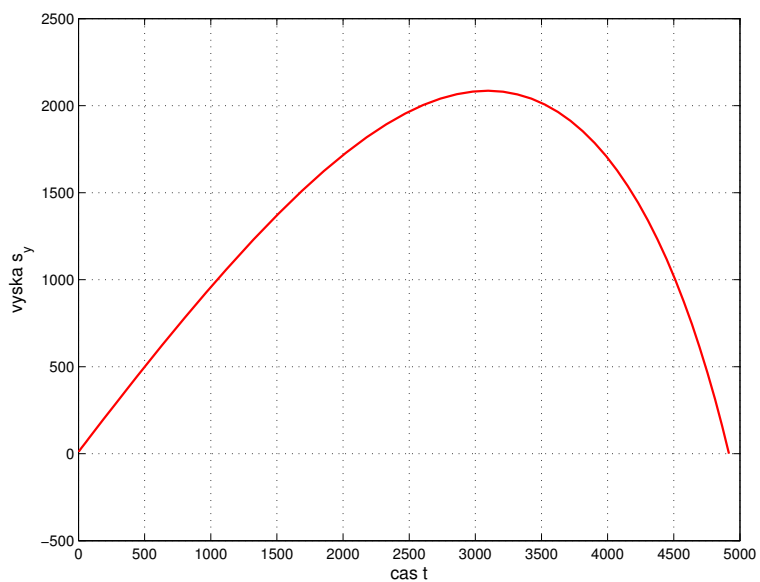
A najdeme řešení soustavy diferenciálních rovnic na intervalu $\langle 0, t_{dopad} \rangle$

```
>> pp=[0,v0*cos(alfa),h,v0*sin(alfa)];
>> [cas,reseni]=ode45(@strela,[0,t_dopad],pp);
>> sx_dopad=reseni(end,1)
sx_dopad =
```

```
4.9172e+003
>> sy_dopad=reseni(end,3)
sy_dopad =
-5.6843e-013
```

Střela dopadne na zem po 40.5 sekundách do vzdálenosti 4917 metrů.
Dráhu střely zobrazíme do grafu (viz obr. 7).

```
>> sx=reseni(:,1);
>> sy=reseni(:,3);
>> plot(sx,sy)
>> grid on
```



Obrázek 7: Dráha s časem dopadu

Reference

- [1] Čermák, L., Hlavička, R.: *Numerické metody I*. Vysoké učení technické, Brno, 2015.
- [2] Kubíček, M., Dubcová, M., Janovská, D.: *Numerické metody a algoritmy*. Vysoká škola chemicko-technologická, Praha, 2008.
- [3] Míka, S., Brandner, M.: *Numerické metody I*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2000.
- [4] Příkryl, P., Brandner, M.: *Numerické metody II*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2000.
- [5] Sülli, E., Mayers, D.: *An introduction to numerical analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. (anglicky)
- [6] Van Loan, Ch., F.: *Introduction to Scientific Computing*. Prentice-Hall, New Jersey, 2000. (anglicky)
- [7] Vitásek, E.: *Numerické metody*. SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.
- [8] Quateroni, A., Sacco, R., Saleri, F.: *Numerical Mathematics (Texts in Applied Mathematics)*. Springer, Berlin, 2007. (anglicky)
- [9] Melkes, F., Řezáč, M.: *Matematika 2 (BMA2 + KMA2)* FEKT VUT, Brno, 2002.
- [10] Tkadlec, J.: *Diferenciální rovnice: Laplaceova transformace*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005.
- [11] Pírko, Z.: *Laplaceova transformace*. SNTL, Praha, 1964.
- [12] Pírko, Z., Veit Z.: *Laplaceova transformace – Základy teorie a užití v elektrotechnice*. SNTL, Praha, 1970.

4 Přílohy

Rozklad na parciální zlomky

Každou racionální lomenou funkci tvaru $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy libovolných stupňů, lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + R_1(x) + \dots + R_s(x),$$

kde $S(x)$ je polynom a $R_1(x), \dots, R_s(x)$ jsou parciální zlomky.

Parciální zlomky jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme typy:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \quad k \in \mathbb{N}; \alpha, A \in \mathbb{R}$$

a

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} \quad k \in \mathbb{N}; B, C, p, q \in \mathbb{R}; p^2 - 4q < 0$$

Postup rozkladu ryze lomené funkce na parciální zlomky

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu: srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod

Řešený příklad 1

Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^2 - 45}{x^3 - 9x}$$

Nnapíšeme předpokládaný tvar:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 45}{x^3 - 9x} &= \frac{x^2 - 45}{x(x - 3)(x + 3)} \\ \frac{x^2 - 45}{x(x - 3)(x + 3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 3} \quad \text{vynásobím jmenovatelem} \\ x^2 - 45 &= A(x - 3)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 3) \end{aligned}$$

$$-36 = 0 + 18B + 0 \quad \text{po dosazení } x = 3$$

$$B = -2$$

$$-45 = -9A + 0 + 0 \quad \text{po dosazení } x = 0$$

$$A = 5$$

$$-36 = 0 + 0 + 18C \quad \text{po dosazení } x = -3$$

$$C = -2$$

výsledek je

$$\frac{x^2 - 45}{x(x-3)(x+3)} = \frac{5}{x} - \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3}$$

Řešený příklad 2

Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} \quad \text{napíšeme předpokládaný tvar}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{vynásobím jmenovatelem}$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$1 = 0 + 0 + C \quad \text{po dosazení } x = 1$$

$$C = 1$$

$$1 = A + 0 + 0 \quad \text{po dosazení } x = 0$$

$$A = 1$$

$$1 = 1 + 2B + 2 \quad \text{po dosazení } x = 2$$

$$B = 1$$

výsledek je

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Řešený příklad 3

Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{3x^2 + 5x + 5}{x^3 + 2x^2 + 5x}$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{3x^2 + 5x + 5}{x(x^2 + 2x + 5)}$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 5}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}$$

$$3x^2 + 5x + 5 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)x$$

$$5 = 5A + 0 + 0 \quad \text{po dosazení } x = 0$$

$$A = 1$$

$$3 = 4 + B - C \quad \text{po dosazení } x = -1$$

$$13 = 8 + B + C \quad \text{po dosazení } x = 1$$

$$B = 2, C = 3$$

výsledek je

$$\frac{3x^2 + 5x + 5}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 5}$$

Řešený příklad 4

Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x}{x^4 + 8x^3 + 25x^2 + 36x + 20}$$

$$\frac{x}{x^4 + 8x^3 + 25x^2 + 36x + 20} = \frac{x}{(x+2)^2(x^2 + 4x + 5)}$$

$$\frac{x}{(x+2)^2(x^2 + 4x + 5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5}$$

$$x = A(x+2)(x^2 + 4x + 5) + B(x^2 + 4x + 5) + (Cx + D)(x+2)^2$$

volbou $x = -2$ dostaneme $B = -2$

volbou $x = 0, x = 1, x = -1$ dostaneme soustavu rovnic

$$5A + 2D = 5$$

$$10A + 3C + 3D = 7$$

$$2A - C + D = 3$$

po jejím vyřešení máme $A = 1, C = -1, D = 0$ a výsledek je

$$\frac{x}{(x+2)^2(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{x}{x^2 + 4x + 5}$$