EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

HORNICKO-GEOLOGICKÁ FAKULTA

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | HORNICKO GEOLOGICKÁ FAKULTA

TEORIE CHYB A PRAVDĚPODOBNOST

Ing. Miroslav Novosad, Ph.D.

Ostrava 2021

Obsah

1 Pravděpodobnost

Základní pojmy:

Klasifikace přírodních jevů:

- **Jistý** jev – takový jev, který při realizaci určitého souboru podmínek nutně musí nastat (Příklad: při hodu krychlovou kostkou s postupným očíslováním 1 až 6 musí padnout jedna z uvedených číselných hodnot.)
- **Nemožný** jev – takový jev, který při realizaci určitého souboru podmínek nemůže nastat (Příklad: při hodu touž krychlovou kostkou nemůže padnout číslo 7.)
- **Náhodný** jev – takový jev, který při realizaci určitého souboru podmínek může, ale nemusí nastat (Příklad: při jednom hodu krychlovou kostkou očíslovanou opět 1 až 6 může padnout číslice 6, ale také nemusí.)

Klasifikace pokusů:

- Pokusy **deterministické** – jsou to pokusy, které při dodržení předepsaných podmínek vedou vždy ke stejnému výsledku z množiny možných výsledků.
- Pokusy **náhodné** – jsou to pokusy, které při dodržení předepsaných podmínek mohou dát jakýkoliv výsledek z množiny možných výsledků; ty náhodné pokusy, jejichž výsledkům můžeme přiřadit určitou pravděpodobnost, říkáme pokusy **pravděpodobnostní.**

O deterministickém nebo náhodném jevu mluvíme vždy vzhledem k určitému komplexu podmínek. Změnou těchto podmínek, nebo přidáním dalších se z deterministického jevu může stát jev náhodný a naopak.

Definice pravděpodobnosti

Mějme konečnou množinu pravděpodobnostních pokusů obsahujících *n* možných výsledků, které označme čísly 1, 2, 3, … , *n*. Potom pravděpodobnosti $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ výsledků 1, 2, 3, … , *n* jsou nezáporná čísla splňující vztah $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$ (součet všech výsledků = 1).

Pravděpodobnost jevu *A* definujeme jako součet $\sum$ pravděpodobnosti těch výsledků, které jsou jevu *A* příznivé

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i$$

i přes skupinu/množinu A

Je-li příslušná množina možných výsledků vhodně definována, můžeme předpokládat, že pravděpodobnosti všech výsledků jsou si rovny

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_n = p$$

tedy

$$n.p = 1$$

$$p = \frac{1}{n}$$

Je-li jevu (*A*) příznivých *m* výsledků, pak

$$\sum p_i = m\,.p = m\,.\frac{1}{n}$$

Pak je pravděpodobnost jevu *A*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m … počet příznivých výsledků
n … počet možných (rovnocenných!) výsledků

Pro takovou pravděpodobnost platí věty:

Věta 1: Pravděpodobnost jevu *A* (*P*(*A*)) leží v uzavřeném intervalu ($\in \langle 0\,;1\rangle$)

$P(A) = 0$ …. jev nemožný
$P(A) \in (0\,;1)$ …. jev náhodný
$P(A) = 1$ …. jev jistý
(Při podrobnější klasifikaci můžeme ještě rozlišovat jev téměř nemožný $P(A) \in (0\,;0{,}05)$ a jev téměř jistý $P(A) \in (0{,}95\,;1)$)

Věta 2: Jsou-li všechny výsledky stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost každého výsledku rovna $\frac{1}{n}$, kde
n je počet všech možných výsledků a pravděpodobnost jevu *A* (*P*(*A*)) je $P(A) = \frac{m}{n}$, kde *m* je počet výsledků příznivých jevu *A*

Věta 3: Pravděpodobnost opačného jevu je doplňkem pravděpodobnosti výchozího jevu do jedné.
Opačný jev $\bar{A}$, $non\ A$

$$P(\bar{A}) + P(A) = q + p = 1$$

Věta 4: Je-li výskyt jevu *A* určen výsledkem prvého pokusu, a výskyt jevu *B* určen výsledkem druhého pokusu, pak pravděpodobnost, že nastanou oba jevy *A* i *B* … $P(A \cap B)$ … pravděpodobnost složená
Jsou-li oba pokusy nezávislé, pak složená pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

je rovna součinu pravděpodobností *P*(*A*) a *P*(*B*).

Ověření zákona velkých čísel

Příklad: Určete počet výskytu čísel při pokusném vrhání kostky v 25 sériích po 100 vrzích.

číslo série	1	2	3	4	5	6	7	…	25	dohromady
a (počet výskytů 1)	17	.								416
a (počet výskytů 2)	17	.								417
a (počet výskytů 3)	16	.								417
a (počet výskytů 4)	15	.								416
a (počet výskytů 5)	18	.								417
a (počet výskytů 6)	17	.								417
s (počet vrhů)	100	100								2500

$$f = \frac{a}{s}\,.\,100\%$$

Díky tomuto pokusu můžeme definovat:
-statistickou zákonitost
-statistickou pravděpodobnost

Statistická zákonitost
Při dostatečně velkém počtu pokusů souhlasí výsledek pokusů (relativní četnost) s apriorní *(tj. stanovenou předem)* pravděpodobností. Tato statistická zákonitost má název zákon velkých čísel a charakterizuje náhodné jevy.

Statistická pravděpodobnost
Jestliže s rostoucím počtem pokusů konverguje relativní četnost k určité (střední) hodnotě, usoudíme napřed, že jde o jev s konstantní pravděpodobností. Hodnota pravděpodobnosti takového jevu se pak stanoví pozorováním (empiricky) jako relativní četnost určená z dostatečně velkého počtu *m* pokusů.
Tedy $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ *(anketa na prezidenta n=1500 …)*
Statistická pravděpodobnost není tedy pravděpodobnost stanovená předem (apriori), ale empirická, získaná zkušeností až po provedení pokusů.

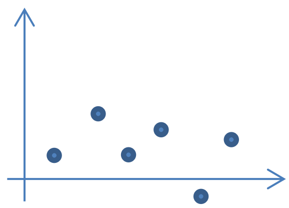
2 Náhodná veličina

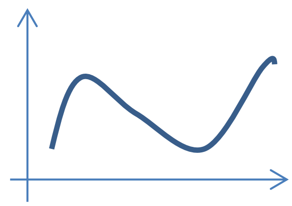
Náhodnou veličinu definujeme jako veličinu, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu.

Charakteristickým rysem náhodných veličin je proměnlivost jejich hodnot při opakování pokusu vlivem náhodných činitelů → nemožnost jednoznačného vymezení hodnoty náhodné veličiny před provedením pokusu.

$$x\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n)$$

Podle toho jakých hodnot může náhodná veličina nabývat, rozlišujeme 2 základní druhy náhodných veličin a to: **diskrétní** vs. **spojitou**





Diskrétní náhodná veličina

může nabývat spočetně mnoho hodnot, a to konečně nebo nekonečně

spočetně znamená očíslovat

Spojitá náhodná veličina

Veličina, pro kterou jsou možnými hodnotami všechna čísla z konečného nebo nekonečného intervalu

Pravidlo, podle kterého se jisté hodnotě nebo množině hodnot z jistého intervalu přiřazuje pravděpodobnost *P*, nazýváme **zákonem rozdělení náhodné veličiny**.

Jedním z hlavních prostředků popisů zákona rozdělení náhodné veličiny je tzv. **distribuční funkce**

$$F(x_i)$$

x reálné číslo

Distribuční funkce každému reálnému číslu x_i přiřazuje pravděpodobnost, pro kterou platí, že náhodná veličina *x* nabude hodnoty menší než je reálné číslo x_i

$$F(x_i) = P(x < x_i)$$

Hodnoty distribuční funkce leží v intervalu <0;1> $F(x_i) \in <0\,,1>$

$$0 \le F(x_i) \le 1$$

Pomocí distribuční funkce může být vypočten zákon rozdělení jak **diskrétní** tak **spojité** náhodné veličiny.

Zákon rozdělení **spojité náhodné veličiny**

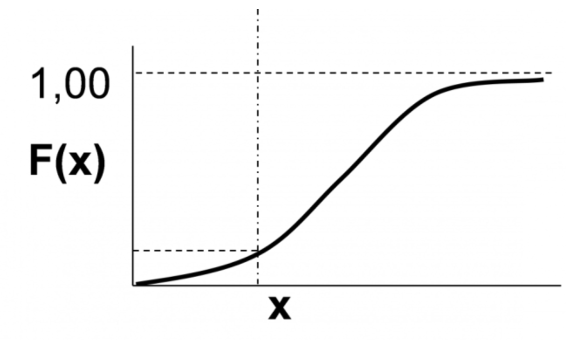
$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

$F(x_i)$ distribuční funkce
$\varphi(x)$ hustota pravděpodobnosti (též frekvenční funkce, křivka)

Pro hustotu pravděpodobnosti platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

distribuční funkce



Distribuční funkce je spojitá zleva.
Distribuční funkce je neklesající $x_i < x_k: \quad F(x_i) < F(x_k)$

Dalšími prostředky popisu zákona rozdělení náhodné veličiny pro **diskrétní náhodné veličiny** jsou tabulka a graf.
Tabulka

x_i				
$P(x_i)$				

K možným hodnotám náhodné veličiny x_i uvádíme pravděpodobnosti $P(x_i)$.
Graf
Na osu x naneseme hodnoty náhodné veličiny x_i a na osu y příslušné pravděpodobnosti $P(x_i)$

$\Downarrow$

Sloupcový graf neboli histogram

3 Charakteristiky náhodné veličiny (CHNV)

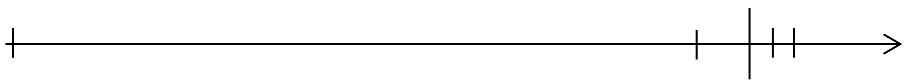
Charakteristika polohy reprezentuje střed celého souboru náhodné veličiny, kolem tohoto středu náhodné veličiny kolísají

Charakteristika proměnlivosti (rozptylu) určuje míru rozptýlení neboli koncentraci hodnot kolem charakteristiky polohy

Charakteristika šikmosti vyjadřuje symetrii nebo asymetrii rozdělení kolem středu

Charakteristika špičatosti (excess) vyjadřuje okolnost, zda je rozdělení špičatější nebo plošší

např. výsledky opakovaného měření délky



15,35
15,34 CHARAKTERISTIKA POLOHY (aritmetický průměr)
15,29
15,38
CHARAKTERISTIKA PROMĚNLIVOSTI – rozptýlené výsledky
CHARAKTERISTIKA ŠIKMOSTI – na jedné straně více -> asymetrie
CHARAKTERISTIKA EXCESSU

<u>Střední hodnota náhodné veličiny E(x)</u>
V souboru s *n* počtem pokusů může diskrétní náhodná veličina nabývat různých hodnot
${}^{n}X\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n)$ výsledky pokusů
Každá hodnota náhodné veličiny se v souboru pokusů může vyskytnout nestejněkrát (různě)

$$m_1.x_1$$
$$m_2.x_2$$
$$m_3.x_3$$
$$m_n.x_n$$

Průměrná hodnota nebo-li střední hodnota náhodné veličiny tohoto souboru pokusů bude

$$E(x) = \frac{1}{n}.(m_1.x_1 + m_2.x_2 + m_3.x_3 + \cdots + m_n.x_n)$$
$$E(x) = \frac{m_1}{n}.x_1 + \frac{m_2}{n}.x_2 + \frac{m_3}{n}.x_3 + \cdots + \frac{m_1}{n}.x_n$$

Podíly $\frac{m_i}{n}$ obecně jsou poměry počtu příznivých případů a počtu možných případů tedy **pravděpodobností** P_i (p_i).

Pak pro střední hodnotu náhodné veličiny dostaneme vztah

$$E(x) = p_1.x_1 + p_2.x_2 + p_3.x_3 + \cdots + p_n.x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i.x_i$$

přičemž platí

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu *x* s hodnotami $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n)$ a jejich pravděpodobnostmi $p(x_i): p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots, p(x_n)$ je střední hodnota *E(x)* definována vztahem

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p(x_i)$$

Sčítám jednotlivé výsledky.

Pro spojitou náhodnou veličinu *x* a hustotu pravděpodobnosti *φ*(*x*) je střední hodnota *E(x)* definována vztahem

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Počítám plochu.

Věty o středních hodnotách

Věta 1: Střední hodnota součinu konstanty a náhodné veličiny je rovna součinu konstanty a střední hodnoty náhodné veličiny

$$E(k.x) = k.E(x)$$

Konstanta nemá rozptyl

Věta 2: Střední hodnota součtu několika vzájemně nezávislých náhodných veličin se rovná součtu jejich středních hodnot

$$E(x + y + \cdots) = E(x) + E(y) + E(\ldots$$

Věta 3: Střední hodnota součinu několika vzájemně nezávislých náhodných veličin se rovná součinu jejich středních hodnot

$$E(x.y.\ldots) = E(x)\,.E(y)\,.E(\ldots$$

<u>Momenty ve statistice</u>

Obecný moment – počáteční moment

$$v_k = E\left(x^k\right)$$

počáteční moment k-tého řádu z náhodné veličiny x

1. řádu $v_1 = E(x\ )$

2. řádu $v_2 = E(x^2)$

Centrální moment (rozptyl kolem střední hodnoty)

$$V_k = E\{x - E(x)\}^k$$

kde označujeme

$$\Delta = x - E(x)$$

pak

$$V_k = E\{\Delta\}^k$$

Rozdíl mezi nimi

Náhodná veličina – neustále měřená stejná délka

OBR

Počáteční moment - počítám vůči počátku – o systematickou chybu se pohybuje (c_i) – mohu popsat *nekomparované pásmo*

Centrální moment – pohybuje se kolem střední hodnoty (kolem odchylek) Δ_1, Δ_2 – nemůže popsat

Normovaný moment – moment normované veličiny $t = \frac{x-E(x)}{\sigma}$, která má rozdělení N(0,1) *střední hodnota = 0, rozptyl = 1* – vyjádříme moment k-tého řádu ve tvaru

$$v_k(t) = V_k(t) = \frac{V_k(x)}{\sigma^k}$$

<u>Charakteristiky polohy</u>

=nejpoužívanější

pro velké soubory

a) střední hodnota náhodné veličiny *E(x)* … v_1

b) medián = prostřední velikost, je to hodnota, která dělí obor náhodné veličiny na dvě stejně pravděpodobné poloviny

$$P(x \geq x_{med}) = P(x \leq x_{med}) = \frac{1}{2}$$

např.

x_1=30,24

x_2=30,25

x_3=30,22

x_4=30,27 OBR

x_5=30,20

x_6=30,21

dle počtu výsledků na stranách, NE aritmetický průměr

c) modus – u diskrétní náhodné veličiny je to hodnota s největší pravděpodobností (četností)

pro malé soubory měření

d) harmonický průměr *nebudeme používat*

$$\frac{1}{x_{H.P.}} = \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

e) geometrický průměr *nebudeme používat*

$$x_{G.P.} = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3.\dots.x_n}$$

f) aritmetický průměr

$$x_{A.P.} = \frac{1}{n}.(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

Charakteristika proměnlivosti (variace, rozptylu)

Základní soubor všech možných hodnot náhodné veličiny je charakterizován nejen svou střední hodnotou $E(x)$, ale i **stupněm variace** jednotlivých možných hodnot x_i kolem střední hodnoty.

Projevem variace jsou odchylky jednotlivých možných hodnot x_i náhodné veličiny od její střední hodnoty

$$\Delta = x - E(x)$$
$$\Delta_1 = x_1 - E(x)$$
$$\Delta_2 = x_2 - E(x)$$
$$\Delta_3 = x_3 - E(x)$$
....
$$\Delta_n = x_n - E(x)$$

Stupeň variace – si postupně popíšeme pomocí:

- středních hodnot odchylek $E(\Delta)$
- středních hodnot absolutních odchylek $E(|\Delta|)$
- středních hodnot kvadratických odchylek $E(\Delta^2)$

a) $E(\Delta) = E\{x - E(x)\} \rightarrow V_1$
(věta 2)
$E(x) - E(x) = 0$
Střední hodnota odchylek náhodné veličiny od jejich střední hodnoty v základním souboru je prvním centrálním momentem a vždy se rovná nule. Nelze ji proto použít jako míru koncentrace výsledků kolem charakteristiky polohy.
Je to centrální moment I. řádu.

b) $E(|\Delta|) = E\{|x - E(x)|\}$ konkrétní hodnota + ... $V_{|1|}$
Centrální moment 1. řádu (absolutní)
-střední hodnotu absolutních odchylek můžeme použít jako míru koncentrace z výsledků. Střední hodnotu absolutních odchylek nazýváme **střední lineární odchylkou** nebo také **průměrnou odchylkou**

c) $E(\Delta^2) = E\{x - E(x)\}^2 \rightarrow V_2$ centrální moment 2. řádu
Nejpoužívanější míra koncentrace výsledků, prakticky používáme $\sqrt{E(\Delta^2)}$ →nazýváme ji standart, značíme ρ.

Příklad na charakteristiku proměnlivosti

V souboru odchylek (nyní pouze základní soubor – jinak **nepočítat takto**)

$\Delta = x - E(x)$: -4, 0, +1, +3

$E(|\Delta|) = 2 \quad \dfrac{(4+4)}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)} = \sqrt{\frac{26}{4}} \cong 2{,}55$ … je vždy citlivější než ad b)

Střední kvadratická odchylka (standard) má obecně větší hodnotu než průměrná odchylka, v praktických aplikacích se dává přednost standartu, protože je citlivější na větší odchylky a pro lépe charakterizuje koncentraci výsledků.

Charakteristika šikmosti A

-nejpoužívanější charakteristikou šikmosti je 3. normovaný moment

$A = V_3(t) = \frac{V_3(x)}{\sigma^3}$ *ve jmenovateli standart*

A=0 … jedná se o symetrické rozdělení

Charakteristika špičatosti E

-4. normovaný moment, prakticky používáme koeficient špičatosti (neboli excesu)

$E = V_4(t) - 3 = \dfrac{V_4(x)}{\sigma^4} - 3$

Koeficient špičatosti je pro normální rozdělení E=0

Při kladné hodnotě je rozdělení ve srovnání s normálním rozdělením špičatější E>0.

A při záporné hodnotě je při srovnání s normálním rozdělením plošší E<0.

Variance a věty o varianci

Náhodná variance *V*(*x*)

- popis rozptylu základního souboru chyb
- vždy 2. centrální moment

$$V(x) = V_2(x) = E\{x - E(x)\}^2 = \sigma^2$$

Věty:

Věta 1: variance konstanty $V(k) = 0$ nemá rozptyl

Věta 2: variance součinu konstanty a náhodné veličiny $V(k.x) = k^2.V(x)$

Věta 3: variance součtu nezávislých náhodných veličin $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$

Věta 4: variance náhodné veličiny je rovna střední hodnotě čtverce náhodné veličiny zmenšené o čtverec její střední hodnoty $V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$

4 Rozdělení náhodné veličiny

Představíme si několik vybraných rozdělení. Nejedná se o všechny.

Alternativní rozdělení

- rozlišujeme pouze, zda se náhodný pokus zdařil nebo ne
- výsledek náhodného pokusu tedy nabývá hodnot:
  x_1=0 -> nenastal jev *A* => opačný $1 - A = \bar{A}$.
  X_2=1 -> nastal jev *A*

Pravděpodobnost

$$P(x_1) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = q$$
$$P(x_2) = P(A) = p$$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny, která má alternativní rozdělení:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i) = x_1 . P(x_1) + x_2 . P(x_2) = 0 . q + 1 . p = p$$

tj. střední hodnota náhodné veličiny, která má alternativní rozdělení, je rovna pravděpodobnosti výsledku, že se jev zdařil (nastal)

Variance náhodné veličiny, která má alternativní rozdělení

$$V(x) = E\{x - E(x)\}^2$$

protože $x - E(x) = \Delta$ a $\Delta_i = \{x_i - E(x)\}^2 . P(x_i)$ pak

$$V(x) = E\{x - E(x)\}^2 = \{x_1 - E(x)\}^2 . P(x_1) + \{x_2 - E(x)\}^2 . P(x_2) =$$
$$= (0 - p)^2 . q + (1 - p)^2 . p = p^2 . q + q^2 . p = p . q . (p + q) = p . q$$

Binomické rozdělení

- náhodná veličina má binomické rozdělení, jestliže n-krát opakujeme náhodný pokus a při každém pokusu rozlišujeme, zda jev *A* nastal nebo nenastal

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$$

X má binomické rozdělení, jednotlivé náhodné pokusy x_i mají alternativní rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny, která má binomické rozdělení, je součtem středních hodnot náhodných veličin s alternativním rozdělením

$$E(x) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + \cdots + E(x_n) = p + p + p + \cdots + p = n . p$$

tj. střední hodnota náhodné veličiny, která má binomické rozdělení, je rovna součinu *n.p*

Variance náhodné veličiny, která má binomické rozdělení, je součtem variancí náhodných veličin s alternativním rozdělením

$$V(x) = V(x_1) + V(x_2) + V(x_3) + \cdots + V(x_n) = p . q + p . q + p . q + \cdots + p . q = n . p . q$$

Normální rozdělení neboli Laplace-Gaussovo rozdělení

Distribuční funkce spojité náhodné veličiny

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{i} \varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

Hustotu pravděpodobnosti normálního rozdělení definoval Gauss pomocí funkce

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ .\ e^{-\left(\frac{x-E(x)}{2\sigma}\right)^2}$$

a je dána dvěma parametry:

1. střední hodnota náhodné veličiny – která může být libovoná
2. variance náhodné veličiny

zapisujeme $N\big(E(x); V(x)\big)$ např. N(0;4), $V(x) = \sigma^2$

V praktických aplikacích se používá pojem normované veličiny *t,* která je definována jako

$$t = \frac{x - E(x)}{\sigma}$$

<u>Normální rozdělení náhodné veličiny</u> N(0;1)
Budeme prakticky používat tabelované hodnoty *φ*(*t*); *F*(*t*)
Bude platit pro hustotu pravděpodobnosti

$$\varphi(-t) = \varphi(t)$$

Pro distribuční funkci

$$F(-t) = 1 - F(t)$$

Tabelovaná funkce Laplaceova:

$$G(0) = 0\ ;\ G(\infty) = 0{,}5\ \ ;\ G(-t) = -G(t)$$

a z toho $G(-\infty) = -0{,}5$

Distribuční funkce pak je

$$F(t) = 0{,}5 + G(t)$$

Postup při stanovení pravděpodobnosti náhodné veličiny s normálním rozdělením

$$N(E(x); \sigma^2)$$

Počítáme pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu (x_1, x_2), x_1 je dolní mez, x_2 je horní mez.

1) Stanovíme dolní mez normované veličiny

$$t_1 = \frac{x_1 - E(x)}{\sigma}$$

2) Stanovíme horní mez normované veličiny

$$t_2 = \frac{x_2 - E(x)}{\sigma}$$

3) Hledaná pravděpodobnost

$$P(x_1 < x < x_2) = P(t_1 < t < t_2) = F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1)$$

Zkouška normality pomocí třídních četností

Příklad:

Máme skutečné náhodné chyby ε, je stanovená střední chyba σ, bylo provedeno n měření a chyby byly roztříděny podle velkosti do intervalů $\Delta\varepsilon$. Předpokládáme, že skutečné chyby mají normální rozdělení $N(E(x); \sigma^2)$.

1) Stanovíme optimální počet tříd $2.\sqrt[3]{n}$
2) Určíme teoreticky očekávané četnosti v intervalech a porovnáme rozdíly očekávání a skutečné četnosti s 2-3 násobkem střední odchylky

   2.1) Přepočítáme hranice intervalů ε_i na hodnoty normované veličiny $t_i = \frac{\varepsilon_i}{\sigma}$

   2.2) Pro tyto hodnoty najdeme z tabulek normálního rozdělení hodnoty distribuční funkce $F(t_i)$

   $$N(0;1) \ \dots \ F(t_i)$$

   2.3) Odečteme sousední hodnoty a dostaneme pravděpodobnosti, že se chyba objeví v daném intervalu j

   $$P_j = F(t_{i+1}) - F(t_i)$$

   2.4) Očekávaná četnost v j-tém intervalu se vypočítá jako

   $$R_j = n\,.\,P_j$$

   podle $E(x) = n\,.\,p$

   2.5) Rozdíl $\Delta R_j = |R_j - r_j|$ porovnáme s 2-3 násobkem střední odchylky σ_{R_j}

   $$\sigma_{R_j} = \sqrt{E(\Delta r_j^2)} = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{n.P_j.(1 - P_j)}$$

   tj. variace náhodné veličiny, která má binomické rozdělení

Početní příklad:

Skuteční náhodné chyby ε při měření úhlů jsou charakterizovány střední chybou σ=0,8 , bylo provedeno n=200 mření za předpokladu, že tyto chyby mají normální rozdělení $N(0; 0{,}64)$. Proveďte zkoušku normality pomocí třídních četností.

Nejprve stanovíme empirické hodnoty

$$2.\sqrt[3]{n} \ \rightarrow \ 2.\sqrt[3]{200} = 11{,}7$$

My pokračujeme s 5 třídami.

a) hranice náhodné chyby	-3,0		-1,8		-0,6		+0,6		+1,8		+3,0
Interval náhodné chyby		<-3,0;-1,8)		<-1,8;-0,6)		<-0,6;0,6>		(0,6;1,8>		(1,8;3,0>	
b) skutečné četnosti r_j		**5**		**52**		**100**		**38**		**5**	
c) normované veličiny t_i	-3,75		-2,25		-0,75		+0,75		+2,25		+3,75
d) distribuční funkce $F(t_i)$	0,0001		0,0123		0,2270		0,7731		0,9877		0,9999
e) pravděpodobnost P_j		0,0122		0,2147		0,5461		0,2146		0,0122	
f) očekávaná četnost R_j		2,44		42,94		109,22		42,92		2,44	
g) rozdíl | R_j - r_j |		2,56		9,06		9,22		4,92		2,56	

h) střední odchylka σ_{Rj}		1,5525	5,8070	7,0409	5,8060	1,5525	
i) 2-násobek h) $2\sigma_{Rj}$		3,1050	11,6140	14,0818	11,6120	3,1050	
Vyhoví | R_j - r_j |<$2\sigma_R$?		**ano**	**ano**	**ano**	**ano**	**ano**	

a) Hranice náhodné chyby ε_i - jsou od ε_i=-3 do +3 a pět tříd, takže $\Delta\varepsilon$=1,2 na třídu
b) Skutečné četnosti r_j
c) Normované veličiny $t_i = \frac{\varepsilon_i}{\sigma}$
d) Hodnoty distribuční funkce $F(t_i)$
e) pravděpodobnosti, že se chyba objeví v daném intervalu j $P_j = F(t_{i+1}) - F(t_i)$
f) očekávaná četnost $R_j = n\,.\,P_j$
g) rozdíl $\Delta R_j = \left|R_j - r_j\right|$
h) střední odchylka $\sigma_{R_j} = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{n.P_j.\left(1 - P_j\right)}$

3) Vypočteme pořadnice stejnoploché Gaussovy křivky, *tj. pro argument bude jedna hodnota*

c) normované veličiny t_i	-3,75	-2,25	-0,75	+0,75	+2,25	+3,75	0	1
j) hustoty pravděp. $\varphi(t_i)$	0,0004	0,0317	0,3011	0,3011	0,0317	0,0004	0,3989	0,2420
k) pořadnice y_i	0,12	9,51	90,33	90,33	9,51	0,12	119,67	72,6

j) hustoty pravděpodobnosti $\varphi(t_i)$ pro normované veličiny t_i na hranicích intervalů
i pro
k) přepočet pořadnic do měřítka (n=200, $\Delta\varepsilon$=1,2, σ=0,8)

$$y_i = \frac{n.\Delta\varepsilon}{\sigma}.\varphi(t_i)$$

4) Histogram četností chyb, do kterého zakreslíme pořadnice stejnoploché Gaussovy křivky

OBR

Obsahuje:

- skutečné četnosti v intervalech
- očekávané četnosti v intervalech
- pořadnice a průběh stejnoploché Gaussovy křivky

Pro vykreslení je nutné, aby intervaly byly symetrické kolem nuly!

5 Měřické chyby

Klasifikace – zaměřením určité veličiny (délky, úhlu) nezískáme přesnou (skutečnou) hodnotu měřené veličiny, ale hodnotu, která se bude od skutečné více nebo méně lišit.
Tento rozdíl obou hodnot může mít různé příčiny. Dle druhu těchto příčin klasifikujeme měřické chyby na:

- Omyly
- Hrubé chyby
- Systematické chyby
- Náhodné chyby

přičemž poslední dvě (systematické a náhodné chyby) jsou chyby nevyhnutelné.

Omyly – vznikají nepozorností měřiče např. zacílení na nesprávný cíl, záměna číslic při odečítání, zapomeneme nějakou veličinu změřit

- Abychom zjistili, zda jsme se při měření nedopustili omylu: měření opakujeme, nebo zaměříme nadbytečné veličiny (uzávěr – doměření na 1. bod – apod.)

Hrubé chyby
Výsledek měření může být zatížen chybou, která je větší než mez přesnosti použité metody a přitom se nemusí jednat o omyl.

- Můžou vzniknout:
  - při měření za nepříznivých podmínek
  - vliv malé zkušenosti měřiče

Výsledky měření, které jsou zatíženy hrubými chybami, musíme s použitím dalších měření vyloučit. Za tímto účelem provádíme – opakovací měření, měříme nadbytečné veličiny.

Výsledky měření nelze vylučovat z řady měření podle subjektivního hodnocení ale dle objektivních kriterií.

Pro každý přístroj a metodu je určena přesnost měřického úkonu (mezní chyba). V mezích této přesnosti považujeme měřické chyby za nevyhnutelné, mimo tyto meze za omyl nebo hrubou chybu.

Systematické chyby
Některé příčiny při měření ovlivňují výsledek měření ve stejném smyslu (systematicky).
Chyby ve výsledcích měření pak obsahují stejnou systematickou složku. Systematické chyby klasifikujeme podle způsobu působení na výsledky měření:

a) Konstantní
b) Proměnlivá
c) Jednostranná
d) Postupná
e) Periodická

a) **Konstantní**
Uplatňuje se při každém měření, stejným znaménkem a stejnou velikostí (chyba z komparace u pásma, kolimační chyba pro úhel - mezi I. a II. polohou, kolmost osy záměrné a točné, chyba indexová u výškových úhlů)

b) **Proměnlivá**
Souvisí s proměnlivou délkou měření, může nabývat různých hodnot, které však v určité skupině měření oscilují kolem obecně nenulové střední hodnoty (konstantní složka) (např. chyba z refrakce, konfigurace terénu)

c) **Jednostranná**
Tato chyba nabývá v jednotlivých měřeních různých hodnot, ale stále stejného znaménka (náklon latě při nivelaci, nejmenší hodnota, pokud je lať svislá, chyba z vybočení)

d) **Postupná**
Plynule mění svou hodnotu během měření (např. chyba v délce pásma se stoupající teplotou)

e) **Periodická**
Průběh jejích možných hodnot dává sinusoidu (např. excentrická alhidáda – není ve středu limbu)

Systematické chyby můžeme z výsledku odstranit postupem měření např. měření úhlu v obou polohách dalekohledu a nebo početní korekcí (systematické opravy při přesném měření délek pásmem)

V případě početních korekcí je nutné stanovit závislost dle které určitá systematická příčina působí a tento vliv s potřebnou přesností odstranit početní opravou. I po zavedení početní opravy zůstává nadále v měření zbytková systematická chyba, kterou dále budeme nazývat **systematickou složkou**.

Náhodná chyba
I když výsledek měření zbavíme všech (předchozích) měřických chyb, budou se získané výsledky vzájemně lišit, protože v nich zůstanou chyby jejichž velikost a znaménko závisí na náhodě (=náhodné chyby).

Každá náhodná chyba vznikne náhodnou kombinací většího počtu elementárních chyb, které mohou být buď kladné nebo záporné.

<u>Vznik</u>
Velké kladné náhodné chyby vysvětlujeme jako náhodné střetnutí většiny kladných elementárních chyb.
Velké záporné náhodné chyby vysvětlujeme jako náhodné střetnutí většiny záporných elementárních chyb.
Malé náhodné chyby vysvětlujeme jako náhodné střetnutí elementárních chyb různého znaménka.

<u>Příčina náhodných chyb</u>
Nedokonalost lidských smyslů, změny vnějších podmínek při měření, ne zcela odstraněné přístrojové chyby, které mohou měnit znaménko.

Ze zkušenosti dokázáno – že při větším počtu měření stejného druhu nebo téže veličiny můžeme pozorovat u náhodných chyb stejné zákonitosti jako u hromadných náhodných jevů; náhodné chyby stejného druhu mají charakter náhodné veličiny s příslušným rozdělením

Vlastnosti náhodných chyb popsal Gauss svými „Zákony náhodných chyb" (1809)
OBR

1) Pravděpodobnost vzniku kladné nebo záporné chyby určité velikosti je stejná.
2) Malé chyby jsou pravděpodobnější než velké. Největší pravděpodobnost má chyba nulová.
3) Náhodné chyby za určitou mezí se nevyskytují, při překročení těchto mezí jsou považovány za chyby hrubé, a tedy nenáleží do základního souboru chyb příslušného měření

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} = \frac{5}{6} = 0{,}833 \\ \frac{1}{6} = 0{,}1667 \end{pmatrix}$$

6 Skutečné a nejpravděpodobnější chyby

Skutečná chyba je definována jako rozdíl skutečné hodnoty měřené veličiny a měřené veličiny

$$\varepsilon_i = X - l_i$$

kde *X* je pravá – skutečná hodnota měřené veličiny a l_i je měřená veličina

Pokud skutečná chyba ε_i obsahuje pouze náhodné chyby Δ_i – jedná se o <u>skutečnou chybu náhodnou</u>. Pokud skutečná chyba ε_i obsahuje náhodné chyby a zbytkové systematické chyby $\Delta_i + c_i$ – jedná se o <u>skutečnou chybu úplnou</u>.

Oblasti, kde můžeme znát skutečné chyby:

1) uzávěry v trojúhelnících: rozdíl teoretického předpokladu a výsledků měření

OBR $\rightarrow$ $\varepsilon_i = X - l_i$

$\rightarrow$ $\varepsilon_i = 180° - (\alpha + \beta + \gamma)$

2) skutečná chyba ze zaokrouhlení – víme, o co jsme zaokrouhlili výsledek

$$\varepsilon_z = 1{,}234 - 1{,}23$$

3) porovnání přesné a technické nivelace: rozdíl dvou měřických metod, z nichž jedna je významně přesnější

$$\varepsilon_i = X_{přesná} - l_{technická}$$

Nejpravděpodobnější chyba

Měříme <u>opakovaně</u> veličinu, ze získaného souboru mření vypočítáme <u>charakteristiku polohy</u> (nejpravděpodobnější veličinu) a pak rozdílem mezi nejpravděpodobnější veličinou x a měřenou veličinou l_i nazýváme <u>nejpravděpodobnější chyba</u> v_i (*někdy se jí říká také „oprava“*)

$$v_i = x - l_i$$

7 Charakteristiky přesnosti měření

Charakteristiky přesnosti pro základní soubor

Přesnost měření charakterizujeme mírou koncentrace výsledků kolem skutečné hodnoty měřené veličiny. Při srovnání dvou metod měření označíme jako přesnější tu metodu, u které mají možné výsledky větší koncentraci.

Větší koncentrace=menší rozptyl

Základní střední chyba

Definice: Nejvhodnější mírou koncentrace náhodné veličiny je střední kvadratická odchylka.

Standart.

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)}$$

Centrální moment $\Delta = x - E(x)$

V případě, že uvažujeme skutečné chyby ($\varepsilon_i = X - l_i$), bude mírou koncentrace odmocnina ze střední hodnoty čtverce chyb, nebo-li základní střední chyba $\overline{m}$.

$$\overline{m}^2 = E(\varepsilon^2) = E\{(X - l)^2\} = v_2 \text{ počáteční moment}$$

Základní střední chyba úplná $\overline{m}$ vyjadřuje všechny vlivy (složky) znehodnocující výsledek měření, tedy i zbytkové systematické chyby.

$$\overline{m}^2 = \sigma^2 + c_i^2$$

kde

$\overline{m}^2$ … je úplná variance a z ní

$\sqrt{\overline{m}^2} = \overline{m}$ … úplná (základní) střední chyba $\overline{m}$, která vyjadřuje reálnou přesnost měření

σ^2 … je náhodná variance a z ní

$\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ … střední kvadratická odchylka standart, která vyjadřuje vnitřní přesnost měření

c_i^2 … je systematická složka (tj. zbytková systematická chyba), určuje polohu centra základního souboru úplných chyb

V obecném případě platí $\overline{m}^2 \neq \sigma^2$

(pro čistě náhodný jev platí $\overline{m}^2 = \sigma^2$)

Hodnota $\overline{m}$ charakterizuje jedním číslem celý základní soubor všech možných chyb.

Pro určitou metodu, veličinu a normální podmínky je hodnota $\overline{m}$ předem dána, je konstantní během celého měření a nezávislá na provádění nebo teprve plánovaném měření.

(bývá uváděna v technických parametrech přístroje – v manuálu)

(v inženýrské geodézii směrodatné odchylky $\sigma = \overline{m}$)

Mezní parametry základního souboru

Při určité metodě měření jsou parametry $\bar{c}_i$ a σ základního souboru všech možných výsledků produktem podmínek měření.

Některé podmínky se postupně mění a řadě opakovaných měření $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ teoreticky přísluší různé základní soubory s okamžitými parametry $\sigma_i, \bar{c}_i$

$$\sigma_1, \bar{c}_1$$
$$\sigma_2, \bar{c}_2$$
$$\sigma_3, \bar{c}_3$$
$$\sigma_n, \bar{c}_n$$

Pro oba parametry je možno uvažovat variační interval

$$0 \leq |\bar{c}_i| \leq |\bar{c}_{max}| \qquad \sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}$$

Obecně:

- dolní mez platí pro nejlepší podmínky
- horní mez platí pro nejméně příznivé, ale ještě pro metodu přípustné podmínky

Překročení horní meze znamená, že měření již nepřísluší definované metodě měření.

Z toho plyne **mezní chyba** $|\varepsilon_\alpha| = 2.\overline{m}$ až $3.\overline{m}$

Která se v praxi stanoví jako dvoj- až trojnásobek základní střední chyby podle významnosti měření.

Z toho pak plyne **mezní střední chyba** $m_\alpha = \overline{m}.\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n'}}\right)$, kde *n´* je počet stupňů volnosti, kde

- u skutečných chyb $\varepsilon_i \dots n' = n$ tj. počet chyb v souboru
- u oprav $v_i \dots n' = n - 1$ tj. počet nadbytečných měření, kde „1“ je počet měření nutných

Charakteristiky přesnosti výběrového souboru

V běžné praxi se vyskytují malé soubory *n*-opakovaných měření, ve kterých se vyskytne *n* počet chyb.

Dle statistických pojmů je počet *n*-vyskytnutých chyb náhodným výběrem ze základního souboru všech možných chyb.

Charakteristikou přesnosti výběrového souboru je empirická střední chyba.

(-> empirická = výběrová – vypočítaná)

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \text{ -průměrná hodnota}$$

($[\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$)

Empirická střední chyba (*m*) reprezentuje jedním číslem daný soubor *n* chyb. Její hodnota závisí na střetnutí *n* náhodných hodnot jednotlivých chyb.

Méně používané charakteristiky přesnosti

Průměrná chyba – je v základním souboru definována jako střední hodnota absolutních hodnot skutečných chyb

$$\bar{v}_{|1|} = E(|\varepsilon|)$$

Průměrná chyba – je ve výběrovém souboru definována jako průměrná absolutní hodnota skutečných chyb

$$v_{|1|} = \frac{[|\varepsilon|]}{n}$$

Pravděpodobná chyba – má tu číselnou hodnotu, že pro polovinu možných chyb jsou absolutní hodnoty vyšší a pro polovinu nižší

$$P(|\varepsilon| > \bar{r}) = P(|\varepsilon| < \bar{r}) = \frac{1}{2}$$

Ve výběrovém souboru je to tedy empirická pravděpodobná chyba, najdeme ji tedy, když chyby seřadíme podle absolutních velikostí, pak bude empirická pravděpodobná chyba ležet uprostřed řady; při sudém počtu chyb interpolujeme obě pro střední hodnoty.

Mezi těmito chybami platí poměr 1:0,80:0,67

$$\sigma: \bar{v}_{|1|}: \bar{r} = 1: 0{,}80: 0{,}67$$

Příklad 1:

V trigonometrické síti bylo vypočteno 400 uzávěrů trojúhelníků. Předpokládáme, že mají normální rozdělení N(0;36).

Určete:

a) pravděpodobnost, že uzávěry budou v intervalu -9;+12
b) kolik uzávěrů očekáváme v mezích +3;+15

a) základní střední chyba $\sigma = \sqrt{36} = 6$

normované veličiny pro okraje intervalu -9 a +12

dolní mez

$$t_1 = \frac{x_1 - E(x)}{\sigma} = \frac{-9 - 0}{6} = \frac{-9}{6} = -1{,}5$$

horní mez

$$t_2 = \frac{x_2 - E(x)}{\sigma} = \frac{+12 - 0}{6} = \frac{12}{6} = +2$$

pravděpodobnost, že veličina je v intervalu

$$P(x_1 < x < x_2) = P(t_1 < x < t_2) = \text{z tabulek } 0{,}9772 - 0{,}0668 = 0{,}9104$$

$$0{,}9104 \,.\, 100 = 91\%$$

b) normované veličiny pro meze

$$t_1 = \frac{x_1 - E(x)}{\sigma} = \frac{3}{6} = +0{,}5$$

$$t_2 = \frac{x_2 - E(x)}{\sigma} = \frac{15}{6} = +2{,}5$$

$$P(t_1 < x < t_2) = \text{z tabulek } 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023 \ \rightarrow 30{,}23\%$$

30,23% z celkového počtu 400 uzávěrů očekáváme v intervalu <+3;+15> tj.

$$0{,}3023 \,.\, 400 = 120{,}92 \text{ tj. } 120 \text{ uzávěrů}$$

Příklad 2:

Máme 20 chyb a z nich budeme počítat:

a) výběrovou střední chybu
b) průměrnou chybu
c) pravděpodobnou chybu

1. -1,39
2. -1,12
3. -0,86
4. -0,66
5. -0,62
6. -0,54
7. -0,50
8. -0,40
9. -0,19
10. -0,15
11. -0,01
12. +0,13
13. +0,16
14. +0,17
15. +0,27
16. +0,56
17. +0,83
18. +0,91
19. +1,00
20. +1,64

Ad a) výběrová střední chyba

$$[\varepsilon\varepsilon] = 11{,}1709$$

$$m = \sqrt{\frac{11{,}1709}{20}} = 0{,}747 \cong 0{,}75$$

Ad b) průměrná chyba

$$v_{|1|} = \frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{12{,}11}{20} = 0{,}6055 \cong 0{,}61$$

Ad c) pravděpodobná chyba

nejprve seřaďme chyby podle jejich velikosti v absolutní hodnotě:

1. 1,64
2. 1,39
3. 1,12
4. 1,00
5. 0,91
6. 0,86
7. 0,83
8. 0,66
9. 0,62
10. 0,56
11. 0,54
12. 0,50
13. 0,40
14. 0,27
15. 0,19
16. 0,17
17. 0,16
18. 0,15
19. 0,13
20. 0,01

pozice 10. a 11. jsou kolem středu

$$r = \frac{1}{2} \,.\, (0{,}54 + 0{,}56) = 0{,}55$$

Porovnáme vzájemné poměry

má být: $\sigma : \bar{v}_{|1|} : \bar{r} = 1 : 0{,}80 : 0{,}67$

je: $m : v_{|1|} : r = 0{,}75 : 0{,}61 : 0{,}55$

normalizujme násobením $\frac{1}{0{,}75}$:

$$1 : 0{,}81 : \mathbf{0{,}733}$$

→ nemůžeme potvrdit, že daný soubor má normální rozdělení.

8 Bodové a intervalové odhady

Intervaly spolehlivosti

V praxi často neznáme charakteristiky základního souboru, musíme je odhadnout z náhodného výběru o rozsahu *n*.

Bodový odhad

Spočívá v nahrazení neznámé hodnoty parametru rozdělení nebo jeho funkce hodnotou výběrové charakteristiky nebo výběrové funkce. Hlavní úlohou je určení vhodné charakteristiky pro tento účel.

Pod hodnotou parametru si lze představit např. základní střední chybu $\bar{m} = \sqrt{E(\varepsilon^2)}$ vypočtenou ze skutečných chyb v základním souboru (obsahuje náhodnou chybu $\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)}$ a systematickou složku $\bar{c}$). Bodovým odhadem parametru pak je výběrová střední chyba $s = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ vypočtená z výběrového souboru.
Přesnost bodového odhadu roste se zvyšujícím se rozsahem náhodného výběru.

Výběrová chyba kolísá, proto přesnost odhadu vyjádříme pomocí určené střední velikosti. Jedná se o střední chybu odhadu, kterou je vhodné uvést u výsledku bodového odhadu.

Intervalový odhad

Intervalový odhad je založen na vytvoření intervalu (r_1, r_2), ve kterém s jistou zvolenou pravděpodobností můžeme očekávat hodnotu neznámého parametru θ. Vychází se z bodového odhadu neznámého parametru θ. Interval od r_1 do r_2 nazveme $100.(1-\alpha)$-procentním intervalem spolehlivosti parametru θ, pokud platí:

$$P(r_1 > \theta > r_2) = 1 - \alpha$$

Číslo $(1-\alpha)$ pro $0 < \alpha < 1$ se nazývá koeficient spolehlivosti a α se nazývá hladina významnosti nebo riziko. Volíme-li koeficient spolehlivosti blízký jedné (většinou 0,95 nebo 0,99), lze s touto velkou pravděpodobností očekávat, že náhodný interval (r_1, r_2) obsahuje bod θ.
Obvyklé hodnoty hladin významnosti jsou
$\alpha = 0{,}1 \ldots 90\%$
$\alpha = 0{,}05 \ldots 95\%$
$\alpha = 0{,}01 \ldots 99\%$

Jsou-li udány obě hranice intervalu, mluvíme o oboustranném intervalu.
Je-li udána pouze horní nebo dolní hranice, mluvíme o jednostranném intervalu spolehlivosti.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

Jak jsme již uvedli, interval spolehlivosti může být:
oboustranný – hladinu významnosti α rozdělíme na dvě části $\alpha = p_1 + p_2$ a určíme dolní mez intervalu r_1 pro pravděpodobnost p_1 a horní mez intervalu r_2 pro pravděpodobnost p_2.

OBR

Interval obsahuje neznámou hodnotu parametru θ s pravděpodobností $P = 1 - (p_1 + p_2)$, a při symetrickém intervalu $p_1 = p_2 = p$ s pravděpodobností $P = 1 - 2.p$
jednostranný – hodnota α je přímo p, určíme dolní mez r_1 nebo r_2, druhou mez předpokládáme v nekonečnu. Interval obsahuje neznámou hodnotu parametru základního souboru θ s pravděpodobností $P = 1 - p$. Obě situace jsou odlišeny na obrázku.

OBR

Interval spolehlivosti pro střední hodnotu základního souboru

$E(x) = X$ *to znamená střední hodnota všech x (měřených věcí) = střední hodnotě (aritm. průměru)* … je to náš hledaný parametr θ tj. „průměr základního souboru“

Jsou dva případy:
-známe varianci σ^2
-neznáme varianci σ^2

A) známe σ^2, použijeme normální rozdělení (tabulku ε/σ^2)
Vzorec

$$\bar{X} - t_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < X < \bar{X} + t_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

tedy

$$r_1 = \bar{X} - t_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad r_2 = \bar{X} + t_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

B) neznáme σ^2, tak si určíme střední chybu výběrovou *m* s *n*’ stupni volnosti a použijeme Studentovo rozdělení (*t* podle *n*’)

$$\bar{X} - t_{p_2}\frac{m}{\sqrt{n'}} < X < \bar{X} + t_{p_1}\frac{m}{\sqrt{n'}}$$

tedy

$$r_1 = \bar{X} - t_{p_2}\frac{m}{\sqrt{n'}} \qquad r_2 = \bar{X} + t_{p_1}\frac{m}{\sqrt{n'}}$$

Interval spolehlivosti pro odhad rozptylu základního souboru

Mějme náhodný výběr $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\,)^T$ z rozdělení $N(X, \sigma^2)$.
Hledaným parametrem θ je střední chyba σ, která má rozdělení χ^2

OBR rozdělení χ^2

Odlišíme případ, kdy známe a kdy neznáme střední hodnotu $E(x) = X$.

A) Uvažujme případ, kdy známe X a hledáme interval spolehlivosti pro parametr σ^2. Nejlepším nestranným odhadem je charakteristika

$$\frac{n.s^2}{\chi^2_{p_2}(n)} < \sigma^2 < \frac{n.s^2}{\chi^2_{1-p_1}(n)}$$

nebo

$$s.\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{p_2}(n)}} < \sigma < s.\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{1-p_1}(n)}}$$

B) V případě, že neznáme X a hledáme interval spolehlivosti pro parametr σ^2, je nejlepším nestranným odhadem charakteristika

$$m^2 = \frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2.$$

Protože veličina

$$\chi^2 = \frac{n'.m^2}{\sigma^2}$$

má χ^2 rozdělení $\chi^2(n')$, kde n' je počet stupňů volnosti m^2, dostaneme obdobnou úvahou jako u známého X $100(1-\alpha)$-procentní interval spolehlivosti pro parametr σ^2

$$\frac{n'.m^2}{\chi^2_{p_2}(n')} < \sigma^2 < \frac{n'.m^2}{\chi^2_{1-p_1}(n')}$$

nebo

$$m.\sqrt{\frac{n'}{\chi^2_{p_2}(n')}} < \sigma < m.\sqrt{\frac{n'}{\chi^2_{1-p_1}(n')}}$$

9 Zákon hromadění chyb

Výsledek měření *x* se sovu střední chybou m_x tvoří pár sdružených čísel. Při každém dalším počítání musí jít neodlučně spolu.

Pravidlo, podle kterého lze určit vliv chyb měřených veličin na jejich funkce, nazýváme **zákonem hromadění chyb.**

Odvození definice skutečné chyby funkce měřených veličin

1) Nadefinování funkcí a veličin

X, Y, Z … skutečné hodnoty měřených veličin

x, y, z … měřené veličiny

skutečné chyby

$$\varepsilon_x = X - x \;\dots\; x = X - \varepsilon_x$$
$$\varepsilon_y = Y - y \;\dots\; y = Y - \varepsilon_y$$
$$\varepsilon_z = Z - z \;\dots\; z = Z - \varepsilon_x$$

funkce přesných veličin

$U = \mathrm{f}(X, Y, Z, \dots)$

funkce měřených veličin

$$u = f(x, y, z, \dots) \;\dots\; f\big(X - \varepsilon_x, Y - \varepsilon_y, Z - \varepsilon_z, \dots\big)$$

2) Skutečnou chybu funkce odvodíme následujícím postupem

a) Měřené veličiny $x, y, z, \dots$ opravíme o skutečné chyby $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots$ a přitom opravíme i funkci měřených veličin *u* o skutečnou chybu funkce měřených veličin ε_u

$$u + \varepsilon_u = f\big(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y, z + \varepsilon_z, \dots\big)$$

b) Pravou stranu rovnice rozvedeme v Taylorovu řadu

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}.h + \frac{f''(x)}{2!}.h^2 + \cdots$$

použijeme konstantní a lineární člen

$$u + \varepsilon_u = f(x, y, z, \dots) + \frac{\partial u}{\partial x}.\varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial y}.\varepsilon_y + \frac{\partial u}{\partial z}.\varepsilon_z + \cdots$$

c) Nahradíme tyto zápisy a zobecníme

$$u = f(x, y, z, \dots)$$
$$\varepsilon_u = \frac{\partial u}{\partial x}.\varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial y}.\varepsilon_y + \frac{\partial u}{\partial z}.\varepsilon_z + \cdots$$
$$\varepsilon_u = f_x.\varepsilon_x + f_y.\varepsilon_y + f_z.\varepsilon_z + \cdots = [f\varepsilon]$$

kde ε_u … skutečná chyba funkce měřených veličin

f … parciální derivace funkce podle měřených veličin

ε … skutečné chyby měřených veličin

Použití skutečné chyby funkce měřených veličin

Varianta 1:

Plocha $P = a.b$

Dáno $a + |\varepsilon_a| \quad b + |\varepsilon_b|$

Určit $\varepsilon_P = ?$

OBR

$$\varepsilon_P = [f\varepsilon] = \frac{\partial P}{\partial a}.\varepsilon_a + \frac{\partial P}{\partial b}.\varepsilon_b = b.\varepsilon_a + a.\varepsilon_b$$

Tedy

$$P = a.b$$
$$\varepsilon_P = b.\varepsilon_a + a.\varepsilon_b$$

Výsledek $P \pm \varepsilon_P$

Varianta 2:

Plocha $P = a.b$

Dáno P, ε_P, a, b

Určit $\varepsilon_a = ?$ a $\varepsilon_b = ?$

$$\varepsilon_P = [f\varepsilon] = \frac{\partial P}{\partial a}.\varepsilon_a + \frac{\partial P}{\partial b}.\varepsilon_b = b.\varepsilon_a + a.\varepsilon_b$$

Použijeme zásadu stejného vlivu, která říká, že hodnotu skutečné chyby funkce rovnoměrně rozdělím mezi jednotlivé členy $\frac{\varepsilon_u}{n} = f_x\varepsilon_x = f_y\varepsilon_y = f_n\varepsilon_n$

$$\frac{\varepsilon_P}{2} = b.\varepsilon_a \qquad \frac{\varepsilon_P}{2} = a.\varepsilon_b$$

Střední chyba funkce měřených veličin

Víme, že pro základní střední chybu platí $\bar{m}_u^2 = E(\varepsilon_u^2)$

1) Vyjdeme z definice pro skutečnou chybu měřených veličin
$$\varepsilon_u = [f\varepsilon] = f_x.\varepsilon_x + f_y.\varepsilon_y + f_z.\varepsilon_z$$
2) Umocníme
$$\varepsilon_u^2 = f_x^2\varepsilon_x^2 + f_y^2\varepsilon_y^2 + f_z^2\varepsilon_z^2 + 2f_xf_y\varepsilon_x\varepsilon_y + 2f_xf_z\varepsilon_x\varepsilon_z + 2f_yf_z\varepsilon_y\varepsilon_z$$
3) Střední hodnoty
$$E(\varepsilon_u^2) = E(f_x^2\varepsilon_x^2) + E\left(f_y^2\varepsilon_y^2\right) + E(f_z^2\varepsilon_z^2) + 2E\left(f_xf_y\varepsilon_x\varepsilon_y\right) + 2E(f_xf_z\varepsilon_x\varepsilon_z) + 2E\left(f_yf_z\varepsilon_y\varepsilon_z\right)$$
$$E(\varepsilon_u^2) = [E(f^2\varepsilon^2)] + 2\left[E\left(f_xf_y\varepsilon_x\varepsilon_y\right)\right]$$
Podrobněji $E\left(f_xf_y\varepsilon_x\varepsilon_y\right)$= $f_xf_yE\left(\varepsilon_x\varepsilon_y\right) = f_xf_yE(\varepsilon_x)E\left(\varepsilon_y\right)$
Víme, že platí $E(\Delta) = 0$, kde $\Delta = x - E(x)$. Pro skutečnou chybu platí $\varepsilon_i = X - l_i$ a pokud ε_i neobsahuje systematickou složku, pak $\varepsilon_i = \Delta$ a z toho $E(\varepsilon_i) = 0$. Pak člen $2\left[E\left(f_xf_y\varepsilon_x\varepsilon_y\right)\right]$ vymizí a máme
$$E(\varepsilon_u^2) = [E(f^2\varepsilon^2)] = [f^2E(\varepsilon^2)]$$
4) Střední chyby $\bar{m}^2 = E(\varepsilon^2)$
$$\bar{m}_n^2 = [f^2.\bar{m}^2]$$
$$\bar{m}_n^2 = [ff\bar{m}\bar{m}]$$

tj. čtverec základní střední chyby funkce měřených veličin je roven součtu součinů čtverců parciálních derivací funkce podle měřené veličiny se čtvercem základní střední chyby měřené veličiny.
Ve výběrovém souboru pak platí $m_n^2 = [ffmm]$
Získám empirickou střední hodnotu chyby.

Použití střední chyby funkce měřených veličin

Varianta 3:
Plocha $P = a.b$
Dáno $a \pm m_a \quad b \pm m_b$
Určit $m_P = ?$
Použijeme zákon hromadění chyb

$$m_P^2 = [ffmm] = \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)^2 . m_a^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial b}\right)^2 . m_b^2 = b^2 . m_a^2 + a^2 . m_b^2$$

Z toho pak vypočteme m_P.

Varianta 4:
Plocha $P = a.b$
Dáno m_P, a, b
Určit $m_a = ?\quad m_b = ?$

$$m_P^2 = [ffmm] = b^2 . m_a^2 + a^2 . m_b^2$$

Použijeme zásadu stejného vlivu, která říká, že hodnotu čtverce střední chyby funkce rovnoměrně rozdělím mezi jednotlivé členy $\frac{m_u^2}{n} = f_x^2 m_x^2 = f_y^2 m_y^2 = f_n^2 m_n^2$
tedy

$$\frac{m_P^2}{2} = b^2 . m_a^2 \qquad \frac{m_P^2}{2} = a^2 . m_b^2$$

Skutečná chyba funkce - příklady

Příklad 1 (pro variantu 1):
Vypočtěte plochu úzkého obdélníka, byly měřeny strany
a=320,1 m
b=21,2 m
Naměřené hodnoty byly při měření (úmyslně) zaokrouhleny na decimetry. Jakou maximální chybu ve výsledné ploše toto zaokrouhlení způsobilo?

$$\varepsilon_a = 320{,}05 - 320{,}1 = -0{,}05$$
$$= 320{,}14 - 320{,}1 = +0{,}04 \quad \rightarrow \quad |\varepsilon_a| = 0{,}05$$
$$\varepsilon_b = 21{,}15 - 21{,}2 = -0{,}05$$
$$= 21{,}24 - 21{,}2 = +0{,}04 \quad \rightarrow \quad |\varepsilon_b| = 0{,}05$$
$$\varepsilon_P = [f\varepsilon] = \frac{\partial P}{\partial a} . \varepsilon_a + \frac{\partial P}{\partial b} . \varepsilon_b = b . \varepsilon_a + a . \varepsilon_b = 21{,}2 \,.\, 0{,}05 + 320{,}1 \,.\, 0{,}05 = 17{,}065 \cong 17{,}1 \text{ m}^2$$
$$P = a.b = 320{,}1 \,.\, 21{,}2 = 6786{,}12$$

Výsledek $6768{,}1 \pm 17{,}1 \text{ m}^2$

Příklad 2 (pro variantu 2):

Máme určit plochu obdélníka změřením stran a=20 m, b=5 m. Stanovte přesnost měření, aby plocha neměla větší chybu než $1\ \mathrm{m}^2$.

$$\frac{\varepsilon_P}{2} = b.\varepsilon_a \qquad \frac{\varepsilon_P}{2} = a.\varepsilon_b$$
$$\frac{1}{2} = 5.\varepsilon_a \qquad \frac{1}{2} = 20.\varepsilon_b$$
$$\varepsilon_a = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1\ \mathrm{m} \qquad \varepsilon_b = \frac{0{,}5}{20} = 0{,}025\ \mathrm{m}$$

Příklad 3 (pro variantu 1):

Jak se změní u pozemku tvaru trojúhelníka výsledek vypočtené strany c, pokud bychom výchozí hodnoty zaokrouhlili, a to stranu a=175,25 m na metry, stranu b=193,70 m na metry a úhel *γ*=45°38’ bychom zaokrouhlili na celé stupně.

Vstup:

a=175 m

b=194 m

γ=46°

Strana c se vypočte podle vztahu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

výsledek c=145 m

skutečné chyby:

$$\varepsilon_a = 175{,}25 - 175 = +0{,}25\ \mathrm{m}$$
$$\varepsilon_a = 193{,}70 - 194 = -0{,}30\ \mathrm{m}$$
$$\varepsilon'_\gamma = 45°38' - 46° = -22'$$
$$\varepsilon_\gamma = \frac{\varepsilon'_\gamma}{\rho'} = -\frac{22'}{3438'} = -0{,}0064 \quad \text{kde} \quad \rho' = \frac{180.60}{\pi}$$

Na výpočetní vztah aplikujeme zákon hromadění chyb

$$\frac{\partial c}{\partial c}.\varepsilon_c = \frac{\partial c}{\partial a}.\varepsilon_a + \frac{\partial c}{\partial b}.\varepsilon_b + \frac{\partial c}{\partial \gamma}.\frac{\varepsilon'_\gamma}{\rho'}$$

$$2c.\varepsilon_c = (2a - 2b.\cos\gamma).\varepsilon_a + (2b - 2a.\cos\gamma).\varepsilon_b + (2ab.\sin\gamma).\frac{\varepsilon'_\gamma}{\rho'} \quad |:2c$$

$$\varepsilon_c = \frac{(2a - 2b.\cos\gamma)}{2c}.\varepsilon_a + \frac{(2b - 2a.\cos\gamma)}{2c}.\varepsilon_b + \frac{(2ab.\sin\gamma)}{2c}.\varepsilon_\gamma$$

$$\varepsilon_c = \frac{(a - b.\cos\gamma)}{c}.\varepsilon_a + \frac{(b - a.\cos\gamma)}{c}.\varepsilon_b + \frac{(ab.\sin\gamma)}{c}.\varepsilon_\gamma$$

$$\varepsilon_c = 0{,}2775.0{,}25 + 0{,}4996.(-0{,}30) + 168{,}42.(-0{,}0064) =$$
$$= 0{,}069 - 0{,}150 - 1{,}078 = -1{,}159$$
$$\varepsilon_c = -1{,}16\ \mathrm{m}$$

Můžete ověřit výpočtem z přesných hodnot (145,24 vs. 144,08)

Střední chyba funkce měření - příklady

Příklad 1 (pro variantu 1):

Pro určení plochy obdélníka byly měřeny strany

$$a = 203{,}21\ \mathrm{m} \qquad m_a = \pm 0{,}11\ \mathrm{m}$$
$$b = 315{,}42\ \mathrm{m} \qquad m_b = \pm 0{,}12\ \mathrm{m}$$

Určete střední chybu výsledné plochy m_p.

$$m_p^2 = b^2 . m_a^2 + a^2 . m_b^2 = 1798{,}46$$
$$m_p = 42{,}41\ \mathrm{m}^2$$

Příklad 2 (pro variantu 2):

Převýšení *h* budeme počítat ze vzorce $h = s . \tan \alpha$.

S jakou přesností musíme určit vodorovnou vzdálenost *s*=240 m a s jakou přesností musíme určovat výškový úhel *α*=7°, abychom převýšení získali se střední chybou $m_h = \pm 0{,}04\ \mathrm{m}$?

Zákon hromadění chyb

$$m_h^2 = [ffmm] = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2 . m_s^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2 . \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$
$$m_h^2 = (\tan \alpha)^2 . m_s^2 + \left(\frac{s}{\cos^2 \alpha}\right)^2 . \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

Použijeme zásadu stejného vlivu

$$\frac{m_h^2}{2} = (\tan \alpha)^2 . m_s^2 \qquad \frac{m_h^2}{2} = \left(\frac{s}{\cos^2 \alpha}\right)^2 . \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$
$$m_s^2 = \frac{m_h^2}{2 \tan^2 \alpha} \qquad m_\alpha^2 = \rho^2 \frac{m_h^2 . \cos^4 \alpha}{2 s^2}$$

ρ^2 vyjádříme v úhlových jednotkách, které požadujeme. Zde v šedesátinných vteřinách tj.

$$\rho = \frac{180 * 3600}{\pi} = 206265''$$

Vypočteme výsledek

$$m_s = 0{,}25\ \mathrm{m} \qquad m_\alpha = 24''$$

Tj. cca jedno promile (0,25 z 240 a 24”=0,0066° ze 7°)

Sinová věta

Máme trojúhelník, ve kterém je dáno:

$$b = 210{,}20\ \mathrm{m} \quad m_b = \pm 0{,}14\ \mathrm{m}$$
$$\alpha = 57°30' \quad m_\alpha = \pm 0{,}33'$$
$$\beta = 62°40' \quad m_\beta = \pm 0{,}33'$$

Určete střední chybu odvozené strany *a*.

Pro výpočet strany *a* použijeme sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$
$$a = b . \frac{1}{\sin \beta} . \sin \alpha = 199{,}56\ \mathrm{m}$$
$$m_a^2 = [ffmm] = \left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 . m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)^2 . \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial \beta}\right)^2 . \frac{m_\beta^2}{\rho^2} =$$

$$= \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 . m_b^2 + \left(\frac{b}{\sin\beta} . \cos\alpha\right)^2 . \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \left(b. \sin\alpha . \frac{-1}{\sin^2\beta} . \cos\beta\right)^2 . \frac{m_\beta^2}{\rho^2} =$$

$m_a^2 = (0{,}94939)^2 . 0{,}14^2 + (127{,}135)^2 . \frac{0{,}33\prime^2}{3438\prime^2} + (-103{,}149)^2 . \frac{0{,}33\prime^2}{3438\prime^2}$ =0,017913

$$m_a = 0{,}13 \text{ m}$$

10 Vyrovnání měření přímých

- Tento způsob použijeme, je-li jedna veličina měřena opakovaně – *n**opakovaně

  Stejný postup, stejná přesnost -> stejná váha
  NEBO
  Každé měření má obecně různou přesnost – nestejná přesnost -> různá váha

Nejprve se zabývejme variantou, kdy všechna měření <u>mají stejnou váhu.</u>

Z měření dostáváme soubor naměřených hodnot

$$l_1, l_2, l_3, l_4, \dots, l_n$$

Úkolem vyrovnání bude najít nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny *x* tak, aby pro <u>součet čtverců oprav</u> platila podmínka

$$[vv] = \min \text{ -> nejpravděpodobnější chyba}$$

oprava

$$v_i = x - l_i$$

dosaďme

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \cdots + v_n^2 = \min$$
$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + (x - l_3)^2 + (x - l_4)^2 + \cdots + (x - l_n)^2 = \min$$

parciální derivace

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (x - l_i)^2}{\partial x} = 0$$
$$2(x - l_1) + 2(x - l_2) + 2(x - l_3) + 2(x - l_4) + \cdots + 2(x - l_n) = 0$$
$$(x - l_1) + (x - l_2) + (x - l_3) + (x - l_4) + \cdots + (x - l_n) = 0$$

z toho dva závěry:

- jelikož $v_i = x - l_i$ pak $[v] = 0$
- z toho $n.x - [l] = 0$ a pak $x = \frac{[l]}{n}$

$[l]$ je soubor měření
Tedy

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \cdots + l_n}{n}$$

Podmínka vyrovnání $[vv] = \min$ vede k <u>aritmetickému průměru</u> <= <u>charakteristice polohy</u>
Kontrolou správnosti číselného výpočtu oprav je splnění $[v] = 0$

Odhad skutečné chyby aritmetického průměru

$$\varepsilon_x = X - x$$

skutečná chyba jednotlivého měření vs. nejpravděpodobnější chyba jednotlivého měření

$$\varepsilon_i = X - l_i \qquad\qquad v_i = x - l_i$$
$$X = \varepsilon_i + l_i \qquad\qquad x = v_i + l_i$$

dosaďme do $\varepsilon_x = X - x$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_i + l_i - v_i - l_i$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_i - v_i$$

sečteme přes všech *n* měření

$$n.\varepsilon_x = [\varepsilon] - [v]$$
$$n.\varepsilon_x = [\varepsilon]$$
$$\varepsilon_x = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

což je skutečná chyba aritmetického průměru.

Při odvození střední chyby aritmetického průměru

1) Vyjdeme ze vztahu pro skutečnou chybu aritmetického průměru
$$\varepsilon_x = \frac{[\varepsilon]}{n}$$
2) Vyjádříme čtverec skutečné chyby aritmetického průměru
$$\varepsilon_x^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n^2}$$
   což platí za předpokladu, že $[\varepsilon]^2 = [\varepsilon^2]$:
   protože
$$[\varepsilon]^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 + 2.(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon_n + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_2\varepsilon_n + \varepsilon_3\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_3\varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)$$
   a jelikož platí, že
$$\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon_n + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_2\varepsilon_n + \varepsilon_3\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_3\varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n) = 0$$
   tak platí i $[\varepsilon]^2 = [\varepsilon^2]$
3) Střední hodnota
$$E(\varepsilon_x^2) = \frac{[E(\varepsilon^2)]}{n^2}$$
   přičemž v čitateli
$$[\bar{m}^2] = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + \cdots + m_n^2$$
   a jelikož jsme na začátku deklarovali, že všechna měření mají stejnou přesnost, pak
$$[\bar{m}^2] = n.\bar{m}^2$$
4) Střední chyba
$$\bar{m}_x{}^2 = \frac{\cancel{n}.\bar{m}^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{\bar{m}^2}{n}$$
   základní střední chyba
$$\bar{m}_x = \pm\frac{\bar{m}}{\sqrt{n}}$$
   výběrová střední chyba
$$m_x = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}$$
   výběr -> počítám rozptyl

Obvykle ale neznáme skutečnou hodnotu *X* a skutečné chyby ε_i.

Empirická střední chyba vypočtená z oprav

1) Vyjdeme z definice skutečné chyby a nejpravděpodobnější chyby

$$\varepsilon_i = X - l_i = \Delta + \tau \qquad\qquad v_i = x - l_i = \Delta$$

Vyjádříme si skutečnou chybu aritmetického průměru

$$\varepsilon_x = X - x$$
$$\varepsilon_x = \varepsilon_i + l_i - v_i - l_i$$
$$\varepsilon_x = \varepsilon_i - v_i$$
$$\varepsilon_i = v_i + \varepsilon_x$$

2) Vytvoříme součtovou rovnici pro *n* měření

$$\begin{aligned} i = 1 \quad & \varepsilon_1^2 = v_1^2 + 2\, v_1\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 \\ i = 2 \quad & \varepsilon_2^2 = v_2^2 + 2\, v_2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 \\ i = 3 \quad & \varepsilon_3^2 = v_3^2 + 2\, v_3\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 \\ i = n \quad & \varepsilon_n^2 = v_n^2 + 2\, v_n\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 \end{aligned}$$

sečteme rovnice

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + 2[v]\varepsilon_x + n.\varepsilon_x^2$$

připomeňme, že $[v] = 0$
vyjádřeme $[vv]$

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - n.\varepsilon_x^2$$

3) V dalším kroku určíme střední hodnoty čtverců skutečných chyb a oprav

$$E([vv]) = E([\varepsilon\varepsilon]) - n.E(\varepsilon_x^2)$$

Dle vět o středních hodnotách a v případě, že uvažujeme náhodné chyby, bude platit pro střední hodnotu čtverce skutečné chyby:

$$E([\varepsilon\varepsilon]) = n.E(\varepsilon^2) = n.\overline{m}^2$$

a připomeňme

$$E(\varepsilon_x^2) = \overline{m}_x^2 = \frac{\overline{m}^2}{n}$$

pak

$$E([vv]) = n.\overline{m}^2 - \cancel{n}.\frac{\overline{m}^2}{\cancel{n}} = (n-1).\overline{m}^2$$

4) Střední hodnota sumy čtverce oprav

$$E([vv]) = n.E(v^2) = n.\overline{m}_v^2$$

Střední hodnota je průměrná hodnota čtverců oprav $E(v^2) = \frac{[vv]}{n}$ a tedy $\overline{m}_v^2 = \frac{[vv]}{n}$
Porovnejme $E([vv])$ z obou rovnic

$$n.\overline{m}_v^2 = (n-1).\overline{m}^2$$

dosaďme

$$\cancel{n}.\frac{[vv]}{\cancel{n}} = (n-1).\overline{m}^2$$

Protože počítáme $[vv]$ z výběrového (a ne základního) souboru, $\overline{m}^2 \rightarrow m^2$

$$[vv] = (n-1).m^2$$
$$m^2 = \frac{[vv]}{(n-1)}$$

m … je empirická střední chyba jednoho měření vypočtená z oprav
$[vv]$ … nejpravděpodobnější chyba

$$v_i = x - l_i = \Delta$$

n-1 … počet nadbytečných měření v souboru

n je počet měření v souboru

1 měření nutné

Tj. je to počet stupňů volnosti

Empirická střední hodnota *m* vypočtená z prav reprezentuje *n*-náhodných složek v souboru *n*-chyb. Je proto odhadem základní střední chyby náhodné a její čtverec m^2 je odhadem variance. Proto by se měla označovat m_Δ náhodná na rozdíl od empirické střední chyby náhodné, kde skutečné chyby ε mohou obsahovat i systematickou složku.

5) Výsledek vyrovnání přímých měření – charakteristika polohy a charakteristika rozptylu:

$$(x \pm m_x)$$

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

11 Použití přibližných hodnot při numerických výpočtech

<u>Delta metoda</u>

K usnadnění výpočtu nahrazujeme měřenou veličinu přibližnou (náhodnou x_0) a doplňkem δ_i – proto delta metoda.

Měřená veličina

$$l_1 = x_0 + \delta_1$$
$$l_2 = x_0 + \delta_2$$

…

$$l_n = x_0 + \delta_n$$

x_0 volíme tak, aby doplňky δ_i byly kladné

Pak

$$[l] = n.x_0 + [\delta]$$

dosadíme do aritmetického průměru

$$x = \frac{[l]}{n} = \frac{n.x_0}{n} + \frac{[\delta]}{n} = x_0 + \frac{[\delta]}{n}$$

…výpočet pro vyrovnané veličiny.

Vyjádříme si opravu v_i

$$v_i = x - l_i = x - x_0 - \delta_i$$
$$l_i = x_0 + \delta_i$$
$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 = v_1(x - x_0 - \delta_1) + v_2(x - x_0 - \delta_2) + v_3(x - x_0 - \delta_3) + \cdots$$
$$[vv] = v_1x - v_1x_0 - v_1\delta_1 + v_2x - v_2x_0 - v_2\delta_2 + v_3x - v_3x_0 - v_3\delta_3 + \cdots$$
$$[vv] = [v]x - [v]x_0 - [v\delta]$$

jelikož $[v] = 0$, pak

$$[vv] = -[v\delta]$$

(Díky zaokrouhlování nemusí být vždy rovnost splněna přesně.)

Příklad:

i	l_i (m)	δ_i (mm)	v_i (mm)	$v_i v_i$	$v_i\delta_i$
1	226,252	2			
2	226,255	5			
3	226,258	8			
4	226,257	7			
5	226,253	3			
Σ		25			

Délka byla měřena 5x stejnou přesností. Vypočtěte nejpravděpodobnější hodnotu měřené délky a charakteristiky přesnosti.

n=5

1) Stanovíme přibližnou hodnotu x_0 (nejmenší zaokrouhlená nebo nejmenší naměřená)
   x_0=226,250 m

$$l_i = x_0 + \delta_i$$
$$\delta_i = l_i - x_0$$

2) Výpočet aritmetického průměru

$x = x_0 + \frac{[\delta]}{n} = 226{,}250 + \frac{25}{5} = 226{,}255\ m$ výsledek

(může být hodnota zaokrouhlena $\varepsilon_2 = X - x$ → pak použít chybu ze zaokrouhlení – např. 226,2556 přidat max. jedno místo)

$$\varepsilon_2 = 0$$

3) Opravy

$$v_i = x - x_0 - \delta_i$$

kontrola $[v] = 0$ (pokud je zaokrouhleno, není nula $[v] = \pm n.\varepsilon_2$)

výpočet $[vv]$

kontrola $[vv] = -[v\delta]$ (nebude platit, pokud se zaokrouhlí $|[vv]| - |[v\delta]| = \pm\varepsilon_2.[\delta]$

4) střední chyba jednoho měření

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

$$m = \pm 2{,}549509757 \quad (\cong 2{,}55\ \mathrm{mm})$$

5) střední chyba výsledku (průměru)

$$m_x = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}$$

$$m_x = \pm 1{,}14\ \mathrm{mm}$$

6) zápis výsledku $x \pm m_x$ $(n' = ..)$ n' je počet stupňů volnosti

$$226{,}255\ \mathrm{m}\ \pm 1{,}1\ \mathrm{mm} \quad (n' = 4)$$

$$(226{,}255 \pm 0{,}011)\ \mathrm{m} \quad (n' = 4)$$

+střední chyba funkce

+skutečná chyba funkce

12 Vyrovnání přímých měření nestejné přesnosti

Opakovaně měříme tutéž veličinu, každý výsledek měření má jinou přesnost.

$$l_1 \dots \bar{m}_1 \dots p_1$$
$$l_2 \dots \bar{m}_2 \dots p_2$$
$$l_3 \dots \bar{m}_3 \dots p_3$$

$$l_n \dots \bar{m}_n \dots p_n$$

Váha $p_i = \frac{1}{m_i^2}$

Věta 1: Pravou stranu vynásobíme *k* – malé celé bezrozměrné číslo

$$p_i = \frac{k}{\bar{m}_i^2}$$

Věta 2: platí

$$p_1 . \bar{m}_1^2 = p_2 . \bar{m}_2^2 = p_3 . \bar{m}_3^2 = \cdots = p_n . \bar{m}_n^2 = k$$

Věta 3: součiny jsou konstantní a jsou rovny čtverci střední chyby jednotkové $(p_0 = 1)$

$$p_1 . \bar{m}_1^2 = p_2 . \bar{m}_2^2 = p_3 . \bar{m}_3^2 = \cdots = p_n . \bar{m}_n^2 = k = p_0 . \bar{m}_0^2 = \bar{m}_0^2$$

Podmínka vyrovnání metodou nejmenších čtverců

$$[pvv] = \min$$

rovnice oprav $v_i = x - l_i \dots p_i$

$$[pvv] = p_1 . v_1^2 + p_2 . v_2^2 + p_3 . v_3^2 + \cdots + p_n . v_n^2 = \min$$
$$p_1 . (x - l_1)^2 + p_2 . (x - l_2)^2 + p_3 . (x - l_3)^2 + \cdots + p_n . (x - l_n)^2 = \min$$
$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} p_i (x - l_i)^2}{\partial x} = 0$$
$$2p_1(x - l_1) + 2p_2(x - l_2) + 2p_3(x - l_3) + \cdots + 2p_n(x - l_n) = 0 \quad | : 2$$
$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \cdots + p_n v_n = 0$$
$$[pv] = 0$$
$$p_1 x - p_1 l_1 + p_2 x - p_2 l_2 + p_3 x - p_3 l_3 + \cdots + p_n x - p_n l_n = 0$$
$$[p] . x - [pl] = 0$$
$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

Výsledkem je vážený neboli obecný průměr.
Obecný: pokud za $p_i = 1$, pak $[pl] = [l]$ a $[p] = n$ tj. aritmetický průměr

Odhad střední chyby jednotkové

V řadě měřených hodnot s nestejnou přesností $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, kterým přísluší základní střední chyby $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n$, se uplatnily skutečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$.

$$l_1 \dots \bar{m}_1 \dots \varepsilon_1$$
$$l_2 \dots \bar{m}_2 \dots \varepsilon_2$$
$$l_3 \dots \bar{m}_3 \dots \varepsilon_3$$

$$l_n \dots \bar{m}_n \dots \varepsilon_n$$

Všechny možné hodnoty všech chyb tvoří směs různých základních souborů, tedy různorodý soubor se společnou střední hodnotou.

$$\varepsilon_i = X - l_i \dots \bar{m}_i$$

Jestliže hodnoty všech chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ zredukujeme na jednotku váhy, dostaneme soubor redukovaných skutečných chyb ε'_i $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \dots, \varepsilon'_n)$

Víme, že $p_i = \frac{1}{\bar{m}_i^2}$

Trojčlenka

$$\frac{\varepsilon'_i}{1} = \frac{\varepsilon_i}{\bar{m}_i} = \varepsilon_i . \frac{1}{\bar{m}_i} = \varepsilon_i . \sqrt{p_i}$$

Pak pro redukované chyby $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \dots, \varepsilon'_n$ vytvoří dohromady stejnorodý soubor charakteristik čtverce základní střední chyby jednotkové

$$\bar{m}_0^2 = E(\varepsilon'^2) = E(p\varepsilon\varepsilon)$$

protože $\bar{m}^2 = E(\varepsilon^2)$

$$m_0^2 = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n} \qquad m_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

Výběrová střední chyba jednotková – aposteriorní – vypočtená z oprav

$$x = \frac{[pl]}{[p]} \ ; \quad v_i = x - l_i \quad m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

Střední chyba i-tého měření

Věta 3: $p_1 . \bar{m}_1^2 = p_2 . \bar{m}_2^2 = p_3 . \bar{m}_3^2 = \dots = p_n . \bar{m}_n^2 = k = \bar{m}_0^2$

$$i = 1 \dots n$$
$$p_i . \bar{m}_i^2 = \bar{m}_0^2$$
$$p_i . m_i^2 = m_0^2$$
$$m_i^2 = \frac{m_0^2}{p_i}$$
$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$$

Střední chyba váženého průměru

$$p_x . \bar{m}_x^2 = \bar{m}_0^2$$
$$p_x . m_x^2 = m_0^2$$
$$m_x^2 = \frac{m_0^2}{p_x}$$

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{p_x}} = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}}$$

Příklad – aritmetický průměr

1. den: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ... $l_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3}$

2. den: λ_1, λ_2 ... $l_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$

$$x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2}{5} = \frac{3.l_1 + 2.l_2}{3+2}$$
$$p_1 = 3 \quad p_2 = 2 \quad p_1 + p_2 \dots [p]$$

Shrnutí:

vstupy: měření, jejich váhy, střední chyby (apriorní)

$$p_1 \dots l_1 \dots m_1$$
$$p_2 \dots l_2 \dots m_2$$
$$p_3 \dots l_3 \dots m_3$$
$$p_n \dots l_n \dots m_n$$

$$p_i = \frac{1}{m_i^2}$$

Vyrovnaná hodnota, střední chyba jednotková, střední chyba měření (aposteriorní), střední chyba vyrovnané hodnoty

$$x = \frac{[pl]}{[p]} \qquad m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \qquad m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} \qquad m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}}$$

Výsledek

$$x \pm m_x \; (n' = \dots)$$

Kontrolní rovnice

Předpokládejme

$$l_i = x_0 + \delta_i\,, \quad i = 1,2,3,\dots,n$$
$$[l] = n.x_0 + [\delta]$$

ale máme váhy p_i

$$[pl] = [p]x_0 + [p\delta]$$

pak

$$x = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]}$$

opravy

$$v_i = x - x_0 - \delta_i$$

pak

$$[pvv] = p_1.v_1.v_1 + p_2.v_2.v_2 + p_3.v_3.v_3 + \cdots + p_n.v_n.v_n =$$
$$= p_1.v_1.(x - x_0 - \delta_1) + p_2.v_2.(x - x_0 - \delta_2) + p_3.v_3.(x - x_0 - \delta_3) + \cdots + p_n.v_n.(x - x_0 - \delta_n) =$$

$$= p_1.v_1.x - p_1.v_1.x_0 - p_1.v_1.\delta_1 + p_2.v_2.x - p_2.v_2.x_0 - p_2.v_2.\delta_2 + p_3.v_3.x - p_3.v_3.x_0 - p_3.v_3.\delta_3 + \cdots + p_n.v_n.x - p_n.v_n.x_0 - p_n.v_n.\delta_n =$$
$$= [pv]x - [pv]x_0 - [pv\delta]$$

protože $[pv] = 0$, pak

$$[pvv] = -[pv\delta]$$

-> pro kontrolu výpočtu [*pvv*].

Příklad:

Při zkoušce nového teodolitu byl měřen úhel ve 4 dnech, vždy v jiném počtu skupin. Aritmetické průměry pro jednotlivé dny a jejich střední chyby jsou uvedeny v tabulce. Vypočtěte nejpravděpodobnější hodnotu a charakteristiku hodnoty.

i	l_i (g)	m_{li} (cc)	p_i	δ_i (cc)	$p_i\delta_i$ (cc)	v_i (cc)	p_iv_i (cc)	$p_iv_iv_i$	$p_iv_i\delta_i$
1	65,8232	1,14	0,77	2	1,54	+0,6	+0,46	0,28	+0,92
2	65,8236	1,46	0,47	6	2,82	-3,4	-1,60	5,43	-9,59
3	65,8233	0,60	2,78	3	8,34	-0,4	-1,11	0,44	-3,34
4	65,8231	0,81	1,52	1	1,52	+1,6	+2,43	3,89	+2,43
[]			5,54	12	14,22		+0,18	10,04	-9,58

1) Volba vah
$$p_i = \frac{1}{m_i^2}$$
2) Přibližná hodnota, nejblíže, zaokrouhlená, nejmenší (kvůli znaménkům)
$$x_0 = 65{,}8230^{\mathrm{g}}$$
3) Výpočet doplňků
$$l_i = x_0 + \delta_i \qquad \delta_i = l_i - x_0$$
4) Nejpravděpodobnější hodnota *x*
$$x = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 65{,}82326^{\mathrm{g}}$$
chyba ze zaokrouhlení $\varepsilon_z = 65{,}8232567^{\mathrm{g}} - 65{,}82326^{\mathrm{g}} = -0{,}0000033^{\mathrm{g}}$
5) Opravy
$$v_i = x - x_0 - \delta_i$$
Kontrola: $[pv] = 0$, pokud $[pv] \neq 0 \;\rightarrow\; [pv] = \pm\varepsilon_z.[p] = \pm 0{,}18$ vyhoví
6) Výpočet $[pvv]$ a $[pv\delta]$ s kontrolou
$$[pvv] = -[pv\delta]$$
$$[pvv] - |pv\delta| = \pm\varepsilon_z.[p\delta]$$
$$0{,}46 = \pm 0{,}033.14{,}22 = \pm 0{,}47 \quad \text{vyhoví}$$
7) Odhad střední chyby jednotkové
$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm 1{,}83^{\mathrm{cc}}$$
8) Střední chyba vyrovnané veličiny
$$m_x = \pm\frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \pm 0{,}78^{\mathrm{cc}}$$

9) Výsledek

$$x \pm m_x \ (n' = \dots)$$
$$65{,}82326^{\mathrm{g}} \pm 0{,}8^{\mathrm{cc}} \ (n' = 3)$$
$$(65{,}82326 \pm 0{,}00008)^{\mathrm{g}} \ (n' = 3)$$

13 Měřické dvojice stejné přesnosti

Měřické dvojice (=měření tam a zpět)

Soubor měřických dvojic měříme 2x (tam a zpět)

Pro tento příklad:

OBR → 4 měřické dvojice

Postup:

$$x_{A,B} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

aritmetický průměr

$$x_i = \frac{l_i' + l_i''}{2}$$

charakteristiky přesnosti

nepoužívá se

$$v_i = x - l_i$$

místo toho jsou založeny na diferenci

$d_i = l_i' - l_i''$

diference (v tomto příkladu jsou 4)

$$\varepsilon_i' = x - l_i' \quad \rightarrow \quad l_i' = -\varepsilon_i' + x$$
$$\varepsilon_i'' = x - l_i'' \quad \rightarrow \quad l_i'' = -\varepsilon_i'' + x$$

takže pro diferenci

$$d_i = l_i' - l_i'' = -\varepsilon_i' + x + \varepsilon_i'' - x = \varepsilon_i'' - \varepsilon_i'$$

Základní střední rozdíl

víme $\overline{m}^2 = E(\varepsilon^2)$

$$\overline{m}_d^2 = E(d^2) \rightarrow$$
$$d_i = \varepsilon_i'' - \varepsilon_i'$$
$$d_i^2 = (a-b)^2$$
$$d_i^2 = \varepsilon_i''^2 - 2\varepsilon_i''\varepsilon_i' + \varepsilon_i'^2$$
$$E(d_i^2) = E\left(\varepsilon_i''^2\right) - 2\,E(\varepsilon_i''\varepsilon_i') + E\left(\varepsilon_i'^2\right)$$

jelikož

$$E(\varepsilon_i''\varepsilon_i') = E(\varepsilon_i'').E(\varepsilon_i') = E(\Delta).E(\Delta) = 0$$

pak

$$\overline{m}_d^2 = E(d^2) = E\left(\varepsilon''^2\right) + E\left(\varepsilon'^2\right) = m''^2 + m'^2 = 2\overline{m}^2$$

tj. čtverec základní střední chyby

průměrná hodnota – výběrová

$$m_d^2 = \frac{[dd]}{n}$$

dosadíme

$$m_d^2 = 2\,m^2 = \frac{[dd]}{n} \;\; \rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$$

m je empirická střední chyba jednoho měření libovolné měřické dvojice (např. $l_1´$, $l_2´$, $l_1´´$, $l_2´´$, …)
střední chyba průměru v měřické dvojici

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

kde n=2 a tedy

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2.2.n}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}}$$

střední chyba vyrovnané hodnoty $x_{A,B}$

$$m_{x_{A,B}}^2 = [ffmm] = \left(\frac{\partial x_{A,B}}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial x_{A,B}}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial x_{A,B}}{\partial x_3}\right)^2 m_{x_3}^2 + \left(\frac{\partial x_{A,B}}{\partial x_4}\right)^2 m_{x_4}^2$$

$$m_{x_{A,B}}^2 = 1^2 m_{x_1}^2 + 1^2 m_{x_2}^2 + 1^2 m_{x_3}^2 + 1^2 m_{x_4}^2$$

jelikož m_{x_i} si jsou rovny

$$m_{x_{A,B}}^2 = n.\,m_{x_1}^2$$

$$m_{x_{A,B}} = m_{x_1}\sqrt{n}$$

což je charakteristika vyrovnané hodnoty celé tratě (součtu dvojic)

14 Měřické dvojice nestejné přesnosti

Formulace úlohy: nestejné úseky, A je známý bod, B je neznámý bod
OBR

$$x_{\Delta h_{A,B}} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$x_i = \frac{l_i' + l_i''}{2}$$

charakteristiky přesnosti

$$p_i: \dots\ d_i = l_i' - l_i''$$

$$d_{O1} = d_1 . \sqrt{p_1}$$

$$d_{O2} = d_2 . \sqrt{p_2}$$

$$d_{O3} = d_3 . \sqrt{p_3}$$

$$d_{O4} = d_4 . \sqrt{p_4}$$

pak

$$[d_O d_O] = [pdd]$$

střední chyba jednotková $\quad m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}$

$$m_{0_x} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pdd]}{n}}$$

pokud zavedeme váhy, jako se zavádí u nivelace

$$p_i = \frac{1}{s_i[\mathrm{km}]}$$

pak pro oddíl

$$[pdd] = \left[\frac{dd}{s}\right]$$

střední kilometrová chyba

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2n} . \left[\frac{dd}{s}\right]}$$

přesnost výšky (libovolného bodu)

$$m_{0_x} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n} . \left[\frac{dd}{s}\right]}$$

přesnost převýšení h_{AB}

$$m_{\Delta h_{AB}} = m_{0_x} . \sqrt{[s]}$$

kde $[s]$ je délka pořadu mezi body A a B v km

přesnost výšky bodu B

$$m_B^2 = m_A^2 + {m_{\Delta h_{AB}}}^2$$

přesnost výšky měřického bodu

$$m_B^2 = m_A^2 + {m_{0_x}}^2$$

Početní příklad:

Nivelační pořad skládající se z 6 oddílů byl zaměřen přesnou nivelací. Hodnoty tam a zpět a délky oddílů jsou uvedeny v tabulce.

Proveďte vyrovnání a rozbory přesnosti tohoto nivelačního pořadu.

i	l_i' (m)	l_i'' (m)	s_i (km)	x_i (m)	d_i (mm)	$d_i\, d_i$	$(d_i+1)^2$	p_i	$p_i\, d_i\, d_i$	$d_i\, d_i/s_i$
1	+2,5003	-2,5002	0,31	+2,5003	+0,1	0,01	1,21	3,23	0,03	0,03
2	-0,4358	+0,4354	0,58	-0,4356	-0,4	0,16	0,36	1,72	0,28	0,28
3	+2,4519	-2,4523	0,69	+2,4521	-0,4	0,16	0,36	1,45	0,23	0,23
4	-2,7926	+2,7925	0,39	-2,7926	-0,1	0,01	0,81	2,56	0,03	0,03
5	+2,0644	-2,0640	0,65	+2,0642	+0,4	0,16	1,96	1,54	0,25	0,25
6	+1,7356	-1,7354	0,62	+1,7355	+0,2	0,04	1,44	1,61	0,06	0,06
Σ	+5,5238	-5,5240	3,24	+5,5239	-0,2	0,54	6,14		0,88	0,88

měřické dvojice nestejné přesnosti:

1) Výpočet vyrovnaného převýšení v rámci měřických dvojic
   Vyrovnané převýšení mezi počátečním a koncovým bodem
   Provedeme kontrolu výpočtu vyrovnaného převýšení (A-B)
   a) $\frac{l_i' + l_i''}{2} = x_1,\ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \quad \rightarrow [x_i]$
   b) $\Delta h = \frac{[l_i'] + [l_i'']}{2} = 5{,}5239 \text{ m}$
2) Výpočet diferencí
   OBR
   kontrola $[d] = [l'] - [l''] = -0{,}2 \text{ mm}$
3) Výpočet [*dd*] a kontrola pomocí vztahu
$$[dd] = [(d+1)^2] - 2[d] - n = 6{,}14 - 2.(-0{,}2) - 6 = 0{,}54$$
$$[(d+1)^2] = [dd + 2d + 1] = [dd] + 2[d] + n$$
4) Výpočet vah
$$p_i = \frac{1}{s_i(\text{km})}$$
5) Výpočet [pdd] a kontrola, zda $[pdd] = \left[\frac{dd}{s}\right]$
6) Střední kilometrová chyba
$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2n}.\left[\frac{dd}{s}\right]} = \pm 0{,}27 \text{ mm}$$
7) Střední chyba bodu
$$m_{0_x} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}.\left[\frac{dd}{s}\right]} = \pm 0{,}19 \text{ mm}$$
8) Střední chyba převýšení
$$m_{\Delta h_{AB}} = m_{0_x}.\sqrt{[s]} = \pm 0{,}34 \text{ mm}$$
9) Výsledek
$$\Delta h \pm m_{\Delta h} = 5{,}5239 \text{ m} \pm 0{,}34 \text{ mm}$$