

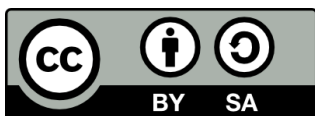


EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Tenzorová mechanika

Milan Jirásek, 2022



Toto dílo je vydáno pod licencí Creative Commons BY-SA 4.0.
Licenční podmínky jsou k dispozici na adrese <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

Přednáška 1

Přehled látky

Vektorový prostor, jeho prvky (vektory), základní operace a jejich vlastnosti, nulový vektor. Lineární kombinace vektorů, lineární nezávislost, báze, dimenze. Složky vektoru vzhledem k bázi, reprezentace vektoru pomocí báze, souvislost mezi vektorem a sloupcovou maticí jeho složek (vzhledem ke zvolené bázi).

Definice lineární formy jako zvláštního případu lineárního zobrazení, operace s lineárními formami (sčítání lineárních forem a násobení lineární formy skalárem), prostor všech lineárních forem (duální prostor). Složky lineární formy vzhledem k bázi, výpočet hodnoty lineární formy pro daný vektor s využitím složek vzhledem ke zvolené bázi (tj. hodnot, kterých nabývá pro báze vektory), reprezentace této operace pomocí maticového násobení. Zjednodušení zápisu pomocí sčítací (Einsteinovy) konvence. *Názorná představa o lineární formě, např. síla jako lineární forma, která každému vektoru představujícímu posun přiřazuje skalár představující práci vykonanou touto silou na daném posunu.*

Definice bilineární formy. Složky bilineární formy vzhledem k dané bázi, tj. hodnoty, kterých nabývá pro dvojici báze vektorů. Označení složek indexy, souvislost mezi bilineární formou a maticí jejích složek. Výpočet hodnoty bilineární formy pro dané vektory s využitím složek vzhledem ke zvolené bázi, reprezentace této operace pomocí maticového násobení. Symetrické bilineární formy a pozitivně definitní bilineární formy—obecné definice těchto vlastností nezávislé na složkách, souvislost s vlastnostmi matice složek.

Skalární součin jako symetrická pozitivně definitní bilineární forma, norma vektoru, úhel mezi dvěma vektory, ortogonalita vektorů. Ortonormální báze, Kroneckerovo delta. Výpočet složek vektoru vzhledem k dané ortonormální bázi pomocí průmětu (skalárního součinu s báze vektory).

Lineární forma odpovídající danému vektoru (v prostoru vybaveném skalárním součinem). Tvzení, že každou lineární formu lze zapsat jako skalární součin s jistým vektorem. Ztotožnění lineárních forem s vektory, a tedy ztotožnění duálního prostoru (prostoru všech lineárních forem) s výchozím vektorovým prostorem. Souvislost mezi vektory, lineárními formami a sloupcovými maticemi jejich složek.

Trilineární a kvadrilineární formy, obecný pojem multilineární formy. Tenzor jako multilineární forma, řád tenzoru. *Složky tenzoru (multilineární formy) vzhledem k dané bázi, označení složek indexy, počet složek tenzoru m -tého řádu, výpočet hodnoty multilineární formy pro dané vektory s využitím složkového zápisu.*

Poznámka: *Kurzívou* jsou uvedeny partie, které se na přednášce neprobraly, případně probraly jen neúplně.

Doplňující poznámky

Ortonormální báze (již probráno)

Na přednášce byla definována báze vektorového prostoru V jako skupina lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_d$, pomocí kterých lze vyjádřit libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ jako jejich lineární kombinaci

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{b}_i \quad (1)$$

Připomeňte si, že v tomto vztahu je použita sčítací konvence a výraz na pravé straně představuje součet $u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2 + \dots + u_d \mathbf{b}_d$. Čísla u_1, u_2, \dots, u_d jsou složky vektoru \mathbf{u} vzhledem k dané bázi.

Otázka je, jak složky vektoru určit, jestliže nejsou zadány a k dispozici máme pouze vektor \mathbf{u} a báze vektory. Při řešení této úlohy lze využít skalární součin a přenásobit obě strany vztahu (1) postupně jednotlivými báze vektory. Po skalárním vynásobení vektorem \mathbf{b}_j dostaneme¹

$$\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}_i u_i \quad (2)$$

V tomto vztahu je i sčítací index, zatímco j může postupně nabývat hodnot $1, 2, \dots, d$, přičemž každé j těchto hodnot odpovídá jedna rovnice. Po přehození pravé a levé strany a rozepsání jednotlivých rovnic

¹Na přednášce jsme rovnici (1) přenásobili báze vektory zprava a v tomto textu zleva, ale vzhledem ke komutativitě skalárního součinu jsou oba postupy zcela ekvivalentní. Všimněte si, že matice koeficientů v rovnicích (3)–(5) je symetrická. Navíc jsme na přednášce rovnou použili ortonormální bázi. Zde se snažíme ukázat, jak by se postup zkomplikoval, kdyby báze nebyla ortonormální.

bychom dostali

$$(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1)u_1 + (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)u_2 + \dots + (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_d)u_d = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

$$(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1)u_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2)u_2 + \dots + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_d)u_d = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

$$\dots$$

$$(\mathbf{b}_d \cdot \mathbf{b}_1)u_1 + (\mathbf{b}_d \cdot \mathbf{b}_2)u_2 + \dots + (\mathbf{b}_d \cdot \mathbf{b}_d)u_d = \mathbf{b}_d \cdot \mathbf{u} \quad (5)$$

Jedná se o soustavu d lineárních rovnic pro d neznámých složek u_1, u_2, \dots, u_d , kterou lze řešit např. Gaussovou eliminační metodou.

Situace se výrazně zjednoduší, pokud zvolíme bázevé vektory tak, aby byly navzájem kolmé (neboli ortogonální). Protože skalární součin dvou ortogonálních vektorů je nulový, rozpadne se soustava (3)–(5) na d nezávislých rovnic a její řešení bude snadné. Navíc můžeme bázevé vektory volit jako jednotkové (tj. jako vektory s jednotkovou normou). Pak budou jednotkové i koeficienty $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2$, atd., a neznámé budou přímo rovny pravé straně. Báze tohoto speciálního typu se nazývá *ortonormální* a její bázevé vektory budeme značit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d$.

Již zmíněné požadavky na ortonormální bázi můžeme přepsat ve tvaru

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (6)$$

kde δ_{ij} je tzv. *Kroneckerovo delta*, definované vztahy

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases} \quad (7)$$

Pokud pracujeme s ortonormální bází, můžeme místo (2) napsat

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i u_i = \delta_{ji} u_i = u_j \quad (8)$$

Tím získáme pohodlnou metodu pro určení složek vektoru vůči ortonormální bázi. Složka u_j se spočítá jako skalární součin vektoru \mathbf{u} s j -tým bázevým vektorem \mathbf{e}_j . Není třeba řešit žádnou soustavu rovnic a v tom spočívá velká výhoda ortonormální báze.

Dobře si rozmyslete poslední rovnost v rovnici (8). Index i je zde sčítací, zatímco index j je pro jednu rovnici tohoto typu pevně zvolený (i když může nabývat různých hodnot, ale každé z nich odpovídá samostatná rovnice). Pro určitost položme např. $j = 2$. Výraz $\delta_{2i} u_i$ představuje podle sčítací konvence součet $\delta_{21} u_1 + \delta_{22} u_2 + \dots + \delta_{2d} u_d$. Koeficienty δ_{2i} jsou ale nulové pro všechna $i \neq 2$, takže nenulový je pouze koeficient δ_{22} , který je roven jedné a násobí neznámou u_2 . Obecně jsou v j -té rovnici nulové všechny koeficienty s výjimkou toho, který násobí neznámou u_j a má jednotkovou hodnotu. Proto můžeme místo $\delta_{ji} u_i$ napsat jednoduše u_j . Tato úvaha se bude v úpravách výrazů obsahujících Kroneckerovo delta často opakovat a můžeme z ní vyvodit nedbale formulované pravidlo, že Kroneckerovo δ_{ij} “udělá” z indexu i index j (nebo z indexu j index i) a tím “zanikne”. Například výraz $F_{kj} \delta_{ij}$ můžeme přepsat jako F_{ki} .

Přemýšlivého studenta může napadnout otázka, zda ortonormální báze vůbec existuje, a pokud ano, jak ji lze získat. Pokud by pro některý vektorový prostor žádná ortonormální báze neexistovala, byly by předchozí úvahy o elegantním výpočtu složek vektoru nepoužitelné. Naštěstí je k dispozici konstruktivní postup, který umožňuje z jakékoliv báze sérií jasně popsanych kroků vytvořit bázi ortonormální, čímž je zároveň dokázána její existence. Jde o tzv. Gramovu-Schmidtovu ortogonalizační metodu, jejíž popis lze najít pod příslušným heslem na internetu. Pro naše účely postačí informace o tom, že taková metoda existuje a můžeme tedy vždy předpokládat, že ortonormální báze je k dispozici.

Korespondence mezi vektory a lineárními formami (již probráno)

Na přednášce jsme se zabývali souvislostí mezi vektory a lineárními formami. Pro pevně zvolenou bázi lze každý vektor charakterizovat jeho složkami vzhledem k této bázi, uspořádanými do sloupcové matice. Počet složek d odpovídá dimenzi vektorového prostoru. Podobně i lineární formu lze charakterizovat pomocí d složek a uspořádat je do sloupcové matice.

Pro daný vektor \mathbf{f} můžeme definovat lineární formu f předpisem

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (9)$$

Jinými slovy, forma f přiřazuje každému vektoru \mathbf{u} jeho skalární součin s pevně zvoleným vektorem \mathbf{f} . Volbou vektoru \mathbf{f} je odpovídající lineární forma jednoznačně určena. Úvahu lze ale i obrátit. Pokud je dána

lineární forma f , můžeme nalézt vektor \mathbf{f} tak, aby platilo (9). K tomu využijeme složek dané lineární formy vzhledem k libovolně (ale pevně) zvolené ortonormální bázi. Složky f_i formy f jsou definovány předpisem

$$f_i = f(\mathbf{e}_i) \quad (10)$$

Jestliže sestrojíme vektor

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i \quad (11)$$

pak pro libovolný vektor \mathbf{u} bude platit (promyslete si podrobně jednotlivé úpravy)

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = f_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} = f_i u_i = f(\mathbf{e}_i) u_i = f(u_i \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{u}) \quad (12)$$

Je tedy vidět, že vektory a lineární formy si vzájemně jednoznačně odpovídají. **Každý vektor můžeme zároveň chápat jako lineární formu a každou lineární formu jako vektor.**

Definice tenzoru (již probráno)

Obecně jsou jako tenzory chápány určité typy lineárních zobrazení. Pro naše účely postačí, když za tenzory 1. řádu označíme lineární formy a za tenzory 2. řádu označíme bilineární formy. Protože už víme, že lineární formy lze ztotožnit s vektory, jsou tenzory 1. řádu vlastně zároveň i vektory. Uvedenou definici tenzorů 1. a 2. řádu lze snadno zobecnit na vyšší řády. Například tenzory 3. řádu jsou trilineární formy, tedy funkce, které každé uspořádané trojici vektorů přiřazují reálné číslo a zároveň se chovají jako lineární formy vůči každému z těchto vektorů zvlášť, pokud zbývající dva zafixujeme. Podrobně je tento požadavek popsán podmínkami

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + F(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (13)$$

$$F(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (14)$$

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + F(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \quad (15)$$

$$F(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (16)$$

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_2) \quad (17)$$

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \alpha \mathbf{w}) = \alpha F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (18)$$

Pokud pracuje forma se čtveřicí vektorů, mluvíme o kvadrilineární formě, která představuje tenzor 4. řádu, atd. Lineární, bilineární, trilineární, kvadrilineární a další podobné formy se obecně nazývají multilineární formy.

Můžeme tedy jednoduše říci, že tenzory chápeme jako multilineární formy. Pro úplnost mezi ně zahrnujeme i samotné skaláry, které lze považovat za tenzory nultého řádu.

Složky tenzoru (zmíněno v přehledu látky, ale zatím neprobráno)

Na přednášce byl zaveden pojem “složky” pro vektory, lineární formy a bilineární formy. Například pro bilineární formu F (tedy tenzor 2. řádu) jsme její složky vzhledem k dané bázi definovali jako čísla

$$F_{ij} = F(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (19)$$

Je vidět, že těchto složek je celkem d^2 . Známe-li složky bilineární formy, můžeme pro libovolné vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} její hodnotu snadno vypočítat jako

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(u_i \mathbf{b}_i, v_j \mathbf{b}_j) = F_{ij} u_i v_j \quad (20)$$

Přitom u_i a v_j jsou složky vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} vůči zvolené bázi.

Vše lze snadno zobecnit pro tenzory vyšších řádů. Například tenzor 3. řádu je chápán jako trilineární forma, označená například G , a jeho složkami jsou čísla

$$G_{ijk} = G(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, d \quad (21)$$

Počet složek je tedy d^3 . Obecně bychom pro tenzor m -tého řádu dostali d^m složek a každá z nich by byla opatřena m indexy.

Transformace složek vektoru při změně báze

Pomocí tenzorového zápisu lze snadno odvodit elegantní vzorce pro transformaci složek tenzoru při změně báze (tedy například pro výpočet složek napětí vůči pootočené soustavě souřadnic, jestliže jsou známy složky napětí vůči původní soustavě souřadnic).

Začneme vektorem, tedy tenzorem 1. řádu, který vyjádříme vzhledem ke dvěma různým **ortonormálním** bázím (ortonormalita teď bude hrát klíčovou roli):

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i = f'_i \mathbf{e}'_i \quad (22)$$

Přitom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d$ a $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_d$ jsou dvě ortonormální báze stejného vektorového prostoru (např. báze odpovídající dvěma kartézským soustavám souřadnic v trojrozměrném prostoru, pokud $d = 3$). Jestliže známe složky f_i a chceme z nich vypočítat složky f'_i , stačí rovnici (22) skalárně přenásobit jedním z vektorů “čárkované” báze:

$$f_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k = f'_i \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k \quad (23)$$

Jelikož je čárkovaná báze ortonormální, platí $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$ a výraz na pravé straně je roven $f'_i \delta_{ik} = f'_k$. Dostáváme tedy

$$f'_k = t_{ki} f_i \quad (24)$$

kde

$$t_{ki} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i \quad (25)$$

jsou transformační koeficienty, které představují kosiny úhlů mezi vektory původní a pootočené báze.² V maticovém zápisu bychom rovnici (24) mohli přepsat jako součin transformační matice 3×3 obsahující směrové kosiny a sloupcové matice obsahující složky vektoru vzhledem k původní bázi.

Uvědomte si, že koeficienty t_{ki} definované vztahem (25) lze interpretovat nejen jako kosiny úhlů, ale také jako složky vektorů jedné báze vzhledem k druhé. Konkrétně je koeficient t_{ki} i -tou složkou vektoru \mathbf{e}'_k vzhledem k “nečárkované” bázi a zároveň také k -tou složkou vektoru \mathbf{e}_i vzhledem k “čárkované” bázi. Zobecnění na tenzory vyššího řádu je předmětem domácího úkolu.

Transformační vzorec odvozený pomocí multilineárních forem

Pomocí interpretace vektoru jako lineární formy lze provést o něco jednodušší, ale abstraktnější odvození transformačních vzorců.

Víme, že složky lineární formy se získají jejím vyhodnocením pro jednotlivé bázevé vektory. Pokud je f lineární forma odpovídající jistému vektoru a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je ortonormální báze, můžeme hodnotu formy f pro libovolný vektor \mathbf{u} o složkách u_1, u_2, u_3 vypočítat jako

$$f(\mathbf{u}) = f(u_i \mathbf{e}_i) = u_i f(\mathbf{e}_i) = u_i f_i \quad (26)$$

kde

$$f_i = f(\mathbf{e}_i) \quad (27)$$

jsou právě složky formy f a zároveň i vektoru \mathbf{f} . Pracujeme-li s jinou bází $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, určí se složky formy f vzhledem k této bázi jako

$$f'_k = f(\mathbf{e}'_k) \quad (28)$$

Abychom našli vyjádření složek f'_k pomocí složek f_i , stačí vyjádřit bázevé vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ pomocí bázevých vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, dosadit do (28) a využít vlastností lineární formy. Jestliže tedy

$$\mathbf{e}'_k = t_{ki} \mathbf{e}_i \quad (29)$$

pak

$$f'_k = f(\mathbf{e}'_k) = f(t_{ki} \mathbf{e}_i) = t_{ki} f(\mathbf{e}_i) = t_{ki} f_i \quad (30)$$

To přesně odpovídá vzorci (24). Výhodou je snadné zobecnění tohoto alternativního postupu na tenzory vyšších řádů.

²Uvědomte si, že všechny bázevé vektory jsou normované, takže pro úhel ϕ_{ki} mezi k -tým vektorem pootočené báze a i -tým vektorem původní báze platí $\cos \phi_{ki} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i$.

Vlastnosti transformačních koeficientů

Názorný význam transformačních koeficientů už byl vysvětlen. Podle (29) koeficient t_{ki} představuje i -tou souřadnici (vůči “nečárkované” bázi) k -tého bázevého vektoru “čárkované” báze. Explicitní výraz pro transformační koeficienty se získá přenásobením vztahu (29) bázevým vektorem \mathbf{e}_j :

$$\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_j = t_{ki} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = t_{ki} \delta_{ij} = t_{kj} \quad (31)$$

Výsledek podle očekávání souhlasí se vztahem (25) (až na formální rozdíl, spočívající v tom, že index i je nyní nazván j). Je tedy $t_{kj} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_j$ = skalární součin k -tého bázevého vektoru čárkované báze a j -tého bázevého vektoru nečárkované báze = kosinus úhlu mezi k -tou čárkovanou a j -tou nečárkovanou souřadnicovou osou. Pokud provádíme transformaci “opačným směrem”, tedy z čárkované báze do nečárkované, použijí se transformační koeficienty, které pracovně označíme $\bar{t}_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k = t_{ki}$. Po transformaci “tam a zase zpátky” musíme vždy dospět k původním složkám, jinými slovy, tyto transformace jsou navzájem inverzní. Přitom složená transformace vede k bázevým vektorům

$$\mathbf{e}''_i = \bar{t}_{ik} \mathbf{e}'_k = t_{ki} \mathbf{e}'_k = t_{ki} t_{kj} \mathbf{e}_j \quad (32)$$

kteří odpovídají původním bázevým vektorům \mathbf{e}_i pouze, pokud je $t_{ki} t_{kj} = \delta_{ij}$ pro každé i a j . Tato podmínka znamená, že pokud uspořádáme transformační koeficienty do čtvercové matice \mathbf{T} , která má v k -tém řádku a j -tém sloupci koeficient t_{kj} , pak platí $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$ = jednotková matice, neboli $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$. Matice splňující tento vztah se nazývají ortogonální, což úzce souvisí se skutečností, že báze, mezi nimiž jsme transformovali, jsou obě ortonormální. Všimněte si, že pro ortogonální matice také platí $\mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ a $(\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^T = \mathbf{T}$.

Cvičení 1

1.1 Transformace složek tenzoru

V poznámkách k přednášce si přečtete pasáže týkající se transformace složek vektoru při změně báze. Poté odvoďte pravidlo pro transformaci složek tenzoru 2. řádu a zobecněte je pro tenzory libovolného řádu.

Tenzor napětí jsme dosud pořádně nezavedli, ale prozatím se spokojíme s informací, že se jedná o tenzor 2. řádu. Složky tenzoru napětí σ vůči dané ortonormální bázi odpovídají klasickým složkám napětí: σ_{11} je σ_x , σ_{12} je τ_{xy} , atd. Najděte si nebo odvoďte tradiční vzorce pro transformaci složek napětí při rovinné napjatosti, dojde-li k pootočení soustavy souřadnic. Ukažte, jak tyto vzorce souvisejí s transformačními vzorci pro tenzor 2. řádu. Jelikož zkoumáme rovinnou napjatost, můžeme výchozí vektorový prostor V uvažovat jako dvourozměrný (tj. $d = 2$).

1.2 Přímý součin lineárních forem nebo vektorů

Pro lineární formy můžeme zavést operaci \otimes , která ze dvou daných lineárních forem f a g vytvoří bilineární formu $F = f \otimes g$, definovanou následujícím předpisem:

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \quad (33)$$

Rozmyslete si nejprve, co to přesně znamená: Když chci spočítat hodnotu, kterou bilineární forma F přiřazuje dvojici vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} , spočítám hodnotu lineární formy f pro vektor \mathbf{u} a hodnotu lineární formy g pro vektor \mathbf{v} a tyto dvě hodnoty (reálná čísla) pak mezi sebou vynásobím.

Takto definované operaci se říká přímý (vnější, tenzorový) součin. Zavedli jsme ji jako operaci mezi dvěma lineárními formami, ale z předchozích úvah už víme, že ve vektorovém prostoru vybaveném skalárním součinem každé lineární formě odpovídá jistý vektor a naopak. Proto můžeme mluvit také o přímém součinu vektorů \mathbf{f} a \mathbf{g} , které odpovídají formám f a g , a značit tento součin $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$. Podobně jako lineární formy chápeme podle potřeby jako vektory, o bilineárních formách budeme často mluvit jako o tensech 2. řádu a budeme je pak značit tučnými velkými písmeny. Například \mathbf{F} může označovat tenzor 2. řádu odpovídající bilineární formě F . Píšeme pak $\mathbf{F} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$. Složkami tenzoru \mathbf{F} vůči dané ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d$ rozumíme složky odpovídající bilineární formy F vůči téže bázi, tedy čísla $F_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

A nyní konkrétní úkoly (první tři jsme už probrali v závěru přednášky, proto se jen ujistěte, že znáte odpověď):

- Dokažte, že funkce F definovaná předpisem (33) má skutečně vlastnosti bilineární formy.
- Odvoďte pravidlo pro výpočet složek tenzoru 2. řádu, který vznikne jako přímý součin vektorů \mathbf{f} a \mathbf{g} se známými složkami f_i a g_j (vůči dané ortonormální bázi).
- Interpretujte odvozené pravidlo jako maticovou operaci. Jinými slovy, ukažte, jak z matic, do kterých uspořádáme složky vektorů \mathbf{f} a \mathbf{g} , spočítáme matici složek tenzoru $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$.
- Zjistěte, zda je přímý součin \otimes komutativní a zda je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů.
- Zjistěte, za jakých okolností pro dva vektory \mathbf{f} a \mathbf{g} platí $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{f}$.
- Přímým součinem dvou vektorů vznikne tenzor 2. řádu. Zamyslete se nad tím, zda je možné jakýkoli tenzor 2. řádu vyjádřit jako přímý součin dvou vektorů.

Zamyslete se také nad tím, zda by bylo možné přirozeným způsobem definovat operaci \otimes (přímý součin) pro jiné dvojice operandů než vektory. Jak by se například mohly definovat operace $\mathbf{g} \otimes \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \otimes \mathbf{g}$ a $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$, kde \mathbf{g} je vektor a \mathbf{F} a \mathbf{G} jsou tenzory 2. řádu? Co by asi bylo jejich výsledkem a jak by se tyto operace přepsaly ve složkovém zápisu, tj. pomocí složek g_i , F_{ij} a G_{ij} ? Bylo by možné je snadno přepsat i do maticového zápisu?

Na základě provedených úvah byste měli chápat, jak interpretovat zápis $(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) \otimes \mathbf{h}$, případně $\mathbf{f} \otimes (\mathbf{g} \otimes \mathbf{h})$, kde \mathbf{f} , \mathbf{g} a \mathbf{h} jsou tři vektory. Můžete tedy posoudit, zda je přímý součin vektorů asociativní. Platí stejná odpověď i pro přímý součin jakýchkoli tenzorů?

1.3 Prostor tenzorů 2. řádu

Jak už víte, lineární formy lze sčítat a lineární formu lze vynásobit skalárem tak, aby tyto operace vedly ke stejnému výsledku jako obdobné operace s odpovídajícími vektory. Například součtem dvou lineárních forem f a g je lineární forma $h = f + g$ definovaná předpisem

$$h(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \quad (34)$$

a α -násobkem formy f je forma $h = \alpha f$ definovaná předpisem

$$h(\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) \quad (35)$$

Všechny lineární formy na daném vektorovém prostoru V vytvářejí duální prostor V^* , jehož dimenze je stejná jako dimenze původního prostoru V .

Operace sčítání a násobení skalárem lze obdobně zavést i pro tenzory 2. řádu, tedy bilineární formy. Množina všech bilineárních forem s takto definovanými operacemi má charakter vektorového prostoru. Určete dimenzi tohoto prostoru.

Z přednášky je známo, že v trojrozměrném vektorovém prostoru můžeme libovolný vektor \mathbf{u} vyjádřit jako lineární kombinaci zvolených bázevých vektorů \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = u_i \mathbf{e}_i \quad (36)$$

Koeficienty v této lineární kombinaci, u_i , jsou složky vektoru \mathbf{u} vzhledem k dané bázi. Pokud je báze ortonormální, získáme je snadno jako průměty:

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \quad (37)$$

Zamyslete se nad tím, zda lze podobným způsobem reprezentovat i tenzory 2. řádu. Jak lze pohodlně vytvořit jeho bázi s využitím daných bázevých vektorů \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 (z nichž ale musíme vhodným způsobem vytvořit tenzory 2. řádu)? Jak lze snadno vypočítat koeficienty lineární kombinace tak, aby vznikl daný tenzor? Jak tyto koeficienty souvisejí se složkami tohoto tenzoru ve smyslu již známé definice složek bilineární formy?

Přednáška 2

Přehled látky

V rámci řešení minulého domácího úkolu probráno: Transformace složek tenzoru 2. řádu při změně báze, maticová reprezentace této transformace, využití při transformaci složek napětí. Zobecnění transformačního vzorce pro tenzory libovolného řádu.

Přímý (tenzorový) součin dvou vektorů definovaný pomocí jim příslušných lineárních forem, označení operátorem “ \otimes ”, vlastnosti přímého součinu a jeho reprezentace pomocí maticových operací. Definice přímého součinu tenzorů libovolného řádu pomocí multilineárních forem, vyjádření přímého součinu ve složkovém zápisu, pravidlo pro řád tenzoru vzniklého přímým součinem tenzorů. Reprezentace obecného tenzoru pomocí jeho složek a tenzorů vytvořených přímým součinem bázevých vektorů.

Dále probráno: Transpozice tenzoru 2. řádu, symetrický tenzor, symetrická a antisymetrická část tenzoru. Transpozice tenzoru 4. řádu, velká a malá symetrie (*major and minor symmetry*).

Definice kontrakce (zúžení) mezi tenzorem 2. řádu a tenzorem 1. řádu ($\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ nebo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$), kontrakce mezi tenzorem vyššího řádu a tenzorem 1. řádu, vyjádření kontrakce ve složkovém zápisu, zobecnění pro dva tenzory libovolného řádu, pravidlo pro řád tenzoru vzniklého kontrakcí tenzorů. Konkrétní případy, např. kontrakce mezi dvěma tenzory 2. řádu ($\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$), souvislost s maticovými operacemi. Souvislost kontrakce se skalárním součinem vektorů. Dvojitá kontrakce ($\mathbf{F} : \mathbf{G}$), složkový zápis.

Doplňující poznámky

Přehled dosud zavedených operací s tenzory v tzv. kompaktním zápisu (tenzory značeny tučnými písmeny) a složkovém zápisu (vztahy zapsány pro složky tenzorů vzhledem k pevně zvolené ortonormální bázi) je uveden v následující tabulce. Abychom nemuseli složitě vyznačovat obecný počet indexů pro tenzory libovolného řádu, je složkový zápis uveden konkrétně pro tenzory \mathbf{F} a \mathbf{H} třetího řádu a tenzor \mathbf{G} čtvrtého řádu. Řád výsledného tenzoru \mathbf{R} závisí na tom, jaká operace se provedla.

operace	kompaktní zápis	složkový zápis
sčítání tenzorů	$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{H}$	$R_{ijk} = F_{ijk} + H_{ijk}$
násobení tenzoru skalárem	$\mathbf{R} = \alpha \mathbf{F}$	$R_{ijk} = \alpha F_{ijk}$
přímý součin	$\mathbf{R} = \mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$	$R_{ijklpqr} = F_{ijk} G_{lpqr}$
kontrakce	$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$	$R_{ijlpq} = F_{ijk} G_{klpq}$
dvojitá kontrakce	$\mathbf{R} = \mathbf{F} : \mathbf{G}$	$R_{ilp} = F_{ijk} G_{jklp}$

Jednotkový tenzor 2. řádu a stopa tenzoru

Připomeňte si definici Kroneckerova symbolu: δ_{ij} je rovno 1 pro $i = j$ a 0 pro $i \neq j$. Platí tedy např. $\delta_{11} = 1$ nebo $\delta_{23} = 0$.

Kroneckerovo delta se často vyskytuje ve složkovém zápisu různých tenzorových operací, a proto je užitečné si uvědomit, jak s ním pracovat a jak zjednodušit výrazy, které jej obsahují. Setkáme-li se například s výrazem $\delta_{ij} u_j$, můžeme jej přepsat jako u_i . První uvedený výraz představuje součet přes všechna j , který bychom mohli rozepsat jako $\delta_{i1} u_1 + \delta_{i2} u_2 + \delta_{i3} u_3$. Pro pevně zvolené i je δ_{ij} nenulové pouze pro $j = i$, takže ve výše uvedeném součtu budou dva ze tří členů nulové a zbyde pouze ten, ve kterém je index u roven i , tedy u_i (vynásobený jedničkou). Ukázali jsme tak, že platí $\delta_{ij} u_j = u_i$. Jak je vidět, z indexu j se “pod působením” Kroneckerova δ_{ij} stal index i . Podobné úpravy budeme nadále provádět rutinně, bez podrobného zdůvodňování. Například výraz $\delta_{ik} F_{lk} g_l$ zjednodušíme na $F_{ii} g_i$.

Kroneckerovo delta představuje složky (vůči libovolné ortonormální bázi) tenzoru $\mathbf{1}$, což je jednotkový tenzor 2. řádu. Tento tenzor odpovídá bilineární formě I definované předpisem

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (38)$$

a vzhledem k libovolné ortonormální bázi je reprezentován jednotkovou maticí. Pro libovolný tenzor \mathbf{F} (aspoň 1. řádu) platí

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{1} \quad (39)$$

To je důvod, proč o tenzoru $\mathbf{1}$ mluvíme jako o jednotkovém. Matice složek tohoto tenzoru je jednotková.

Je také užitečné zavést pojem *stopa tenzoru*. Pro libovolný tenzor 2. řádu \mathbf{F} nazýváme jeho stopou (anglicky trace) číslo

$$\text{tr } \mathbf{F} = \mathbf{1} : \mathbf{F} = \delta_{ij} F_{ij} = F_{ii} \quad (40)$$

I v posledním výrazu na pravé straně se používá sčítací konvence pro opakovaný index i , takže pro trojrozměrný prostor jde o součet $F_{11} + F_{22} + F_{33}$.

Transpozice tenzorů 2. a 4. řádu (probráno na přednášce)

Transpozicí bilinéární formy F rozumíme bilineární formu F^T definovanou předpisem

$$F^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (41)$$

Složky transponované bilinéární formy se vyjádří jako

$$(F^T)_{ij} = F^T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = F(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = F_{ji} \quad (42)$$

takže matice těchto složek je transponovaná k matici složek původní bilineární formy F . Pro symetrickou bilineární formu F (ve smyslu již dříve podané definice) platí $F^T = F$ a je reprezentována symetrickou maticí.

Podobně můžeme definovat i transpozici kvadrilineární formy, která představuje tenzor 4. řádu. Transpozicí kvadrilineární formy F rozumíme kvadrilineární formu F^T definovanou předpisem

$$F^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (43)$$

jejíž složky se vyjádří jako

$$(F^T)_{ijkl} = F^T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = F(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = F_{klij} \quad (44)$$

I zde můžeme mluvit o symetrickém tenzoru, pokud platí $F^T = F$. Kromě této tzv. *velké symetrie* (anglicky “major symmetry”), která ve složkovém zápisu odpovídá identitě $F_{ijkl} = F_{klij}$, je užitečná i *malá symetrie* (minor symmetry), která je pro kvadrilineární formu vyjádřena podmínkou

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \quad (45)$$

a ve složkovém zápisu podmínkou $F_{ijkl} = F_{jikl} = F_{ijlk}$.

Jednotkové tenzory 4. řádu (probráno na přednášce)

Připomeňte si definici Kroneckerova symbolu: δ_{ij} je rovno 1 pro $i = j$ a 0 pro $i \neq j$. Platí tedy např. $\delta_{11} = 1$ nebo $\delta_{23} = 0$. Kroneckerovo delta představuje složky (vůči libovolné ortonormální bázi) tenzoru $\mathbf{1}$, což je jednotkový tenzor 2. řádu. Pro libovolný tenzor \mathbf{F} (aspoň 1. řádu) platí

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{1} \quad (46)$$

Je také užitečné zavést jednotkový tenzor 4. řádu \mathbf{I} tak, aby pro libovolný tenzor \mathbf{F} (aspoň 2. řádu) platilo

$$\mathbf{I} : \mathbf{F} = \mathbf{F} = \mathbf{F} : \mathbf{I} \quad (47)$$

Tuto vlastnost má tenzor se složkami $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ vůči libovolné ortonormální bázi. Lze jej také definovat jako tenzor odpovídající kvadrilineární formě

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \quad (48)$$

Tenzor \mathbf{I} vykazuje velkou symetrii, tj. platí $I_{ijkl} = I_{klij}$. Snadno lze ověřit, že například pro libovolný tenzor \mathbf{F} 3. řádu platí

$$(\mathbf{I} : \mathbf{F})_{ijm} = I_{ijkl} F_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} F_{klm} = F_{ijm} \quad (49)$$

a proto $\mathbf{I} : \mathbf{F} = \mathbf{F}$. Podobný výsledek dostaneme i pro $\mathbf{F} : \mathbf{I}$.

Při práci se symetrickými tenzory (jako jsou tenzory napětí a deformace) však bývá výhodnější pracovat s jiným jednotkovým tenzorem \mathbf{I}_S , který při dvojité kontrakci zachová tenzor 2. řádu \mathbf{F} pouze, pokud je

\mathbf{F} symetrický (jinak z tenzoru \mathbf{F} “vypreparuje” jeho symetrickou část). Mluvíme proto o symetrickém jednotkovém tenzoru \mathbf{I}_S , který je definován svými složkami³ $I_{ijkl}^s = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ nebo kvadrilineární formou

$$I_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad (50)$$

Tento tenzor kromě velké vykazuje i malou symetrii, tj. platí $I_{ijkl}^s = I_{jikl}^s = I_{ijlk}^s = I_{jilk}^s$, což je vlastnost, kterou budeme obecně požadovat od tenzorů materiálové tuhosti a poddajnosti.

Cvičení 2

2.1 Operace s tenzory

Procvičte si základní operace s tenzory na následujících příkladech. Symboly \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{f} a \mathbf{g} označují obecné tenzory 1. řádu, $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor 2. řádu, \mathbf{F} a \mathbf{G} značí obecné tenzory 2. řádu, horní index T značí transpozici a $\text{tr}(\dots)$ je stopa tenzoru.

Rozeepsáním do složkového zápisu dokažte následující identity:

$$\mathbf{F} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (51)$$

$$(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \quad (52)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^T \quad (53)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{v} \quad (54)$$

$$\text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (55)$$

$$\text{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} : \mathbf{G}^T = \mathbf{F}^T : \mathbf{G} \quad (56)$$

$$\mathbf{1} : (\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}) = \text{tr}(\mathbf{F}) \mathbf{G} \quad (57)$$

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{F} = \text{tr}(\mathbf{F}) \mathbf{1} \quad (58)$$

Dále zjistěte, čemu se rovná $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}$ a $\mathbf{1} : \mathbf{1}$.

Ukažte, že dvojitá kontrakce hraje roli skalárního součinu v prostoru všech tenzorů 2. řádu (tj. ověřte, že má všechny vlastnosti požadované od skalárního součinu).

2.2 Tenzorový popis deformace

Prozatím budeme uvažovat pouze rovnoměrně deformované těleso, pro které se polohový vektor \mathbf{x} při deformaci zobrazí na polohový vektor $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$, kde \mathbf{F} je daný tenzor 2. řádu, v této souvislosti označovaný jako deformační gradient (přesný význam tohoto termínu bude vysvětlen později, až se budeme věnovat obecné, tedy nerovnoměrné deformaci). Názorně si můžeme představit, že bod umístěný do počátku souřadnic se nikam neposouvá (protože pro $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dostaneme $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$) a úsečka charakterizovaná obecným vektorem \mathbf{x} se zobrazí na úsečku charakterizovanou vektorem $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$. Při takové lineární (afinní) transformaci prostoru zůstávají přímky i po deformaci přímkami, ale obecně se protahují nebo zkracují a úhly mezi dvěma přímkami se mění.

Představte si přímé vlákno procházející počátkem, jehož původní směr je popsán jednotkovým vektorem \mathbf{n} . Vyjádřete poměrné protažení ε tohoto vlákna při dané deformaci.

Návod: Na vláknu si před deformací vyznačíme úsečku o délce L , které odpovídá vektor $\mathbf{x} = L\mathbf{n}$. Pak zjistíme, jakým vektorem bude popsána tato úsečka po deformaci, spočítáme její novou délku $L + \Delta L$ a vyjádříme poměrné protažení $\varepsilon = \Delta L/L$. Výsledkem by měl být poměrně složitý výraz, který závisí na \mathbf{F} a \mathbf{n} .

Dále si představte dvě přímá a navzájem kolmá vlákna procházející počátkem, jejichž původní směry jsou popsány jednotkovými vektory \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 . Vyjádřete smykové zkosení γ , tedy úhel, o který se změní původně pravý úhel mezi danými vlákny.

Návod: Vzpomeňte si na vzorec pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory, zmíněný na 1. přednášce. Bude se také hodit vztah $\sin \gamma = \cos(\pi/2 - \gamma)$. Výsledkem by měl být opět výraz, který závisí na \mathbf{F} a \mathbf{n} .

³Všimněte si, že v kompaktním zápisu \mathbf{I}_S píšeme “s” označující “symetrický” tenzor dole, ale pokud přejdeme ke složkovému zápisu, přestěhujeme “s” nahoru a dole uvádíme pouze indexy označující příslušnou složku, tedy I_{ijkl}^s . To je však pouze “Jiráskova konvence”, jinde se můžete setkat třeba se zápisy typu $I_{s,ijkl}$ nebo I_{sijkl} .

Odvozené výrazy pro poměrné protažení ε a smykové zkosení γ budou poněkud komplikované, ale zato zcela přesné a použitelné pro libovolně velké deformace. Následně je zjednodušíme za předpokladu, že deformace (přesněji řečeno deformace a rotace) jsou malé. Uvědomte si, že pokud by k žádné deformaci nedošlo, tenzor \mathbf{F} by byl roven jednotkovému tenzoru 2. řádu. Budeme proto předpokládat, že tenzor \mathbf{F} se od jednotkového liší jen “málo”. Můžeme tedy psát $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{G}$, kde tenzor \mathbf{G} je “malý” ve srovnání s jednotkovým. Pokuste se odvozené výrazy pro ε a γ přepsat pomocí tenzoru \mathbf{G} a ve výsledných výrazech zanedbat všechny “členy vyššího řádu”. Popište souvislost mezi složkami tenzoru \mathbf{G} a obvyklými inženýrskými složkami deformace, např. ε_x a γ_{xy} .

Návod: Zjednodušené výrazy by měly mít tvar $\varepsilon = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ a $\gamma = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2$, kde \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou jisté tenzory závislé na \mathbf{G} .

2.3 Projekční tenzory

Při rozkladu symetrických tenzorů 2. řádu (např. tenzoru napětí nebo tenzoru deformace) na kulovou a deviatorickou část se bude hodit kulový (sférický) projekční tenzor

$$\mathbf{I}_K = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (59)$$

a deviatorický projekční tenzor

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I}_S - \mathbf{I}_K = \mathbf{I}_S - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (60)$$

Jedná se zde o tenzory 4. řádu. Ukažte (rozepsáním do složkového zápisu a úpravou), že tyto tenzory mají následující zajímavé vlastnosti:

$$\mathbf{I}_K : \mathbf{I}_K = \mathbf{I}_K \quad (61)$$

$$\mathbf{I}_D : \mathbf{I}_D = \mathbf{I}_D \quad (62)$$

$$\mathbf{I}_K : \mathbf{I}_D = \mathbf{0} \quad (63)$$

$$\mathbf{I}_D : \mathbf{I}_K = \mathbf{0} \quad (64)$$

$$\mathbf{I}_K : \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (65)$$

$$\mathbf{I}_D : \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (66)$$

Přednáška 3

Doplňující poznámky

Tenzor deformace

Na přednášce jsme zkoumali případ **rovnoměrně deformovaného tělesa**, pro které se obecný bod charakterizovaný polohovým vektorem \mathbf{x} přemístí do bodu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \quad (67)$$

kde \mathbf{F} je daný tenzor, nezávislý na \mathbf{x} . Ukázali jsme, že přetvoření tělesa lze popsat pomocí pravého Cauchyho-Greenova deformačního tenzoru

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (68)$$

Při řešení domácího úkolu 2.2 jsme ukázali, že tento tenzor umožňuje pohodlně vypočítat poměrné protažení myšleného vlákna rovnoběžného s jednotkovým vektorem \mathbf{n} , dané vztahem

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}} - 1 \quad (69)$$

a změnu původně pravého úhlu mezi vlákny rovnoběžnými s jednotkovými vektory \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 , danou vztahem

$$\gamma = \arcsin \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2}{\sqrt{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1} \sqrt{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2}} \quad (70)$$

Tenzor \mathbf{C} je ovšem pro nedeformované těleso jednotkový, nikoli nulový, takže nejde o tenzor deformace v pravém slova smyslu. Anglicky se mu proto říká “deformation tensor” a nikoli “strain tensor”, česky je to “deformační tenzor” a nikoli “tenzor deformace”. Od skutečného tenzoru deformace očekáváme, že bude v původním nedeformovaném stavu nulový. V teorii velkých deformací je celá řada možností, jak takový tenzor definovat, ale snad nejpoužívanější je Greenův-Lagrangeův tenzor deformace

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (71)$$

Při řešení další části domácího úkolu 2.2 jsme došli k závěru, že v případě malých změn výchozího stavu trojrozměrného tělesa lze jeho přetvoření popsat symetrickým tenzorem 2. řádu, který můžeme s využitím označení zavedeného ve zmíněném úkolu zapsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \quad (72)$$

kde $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$. Všimněte si, že rozdíl mezi novou a původní polohou obecného bodu \mathbf{x} lze popsat funkcí $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} = (\mathbf{F} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$. Tenzor \mathbf{G} zde představuje gradient posunů, což bude podrobněji rozebráno později. Pokud je tento tenzor skutečně “malý” (např. v tom smyslu, že jeho složky jsou malé ve srovnání s číslem 1), pak lze přesné výrazy (69)–(70) nahradit přibližnými výrazy

$$\varepsilon = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \quad (73)$$

$$\gamma = 2\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_2 \quad (74)$$

V obecném případě **nerovnoměrně deformovaného tělesa** se výše zmíněné tenzory definují pro každý materiálový bod zvlášť a charakterizují přetvoření v těsném (nekonečně malém) okolí tohoto bodu. Tyto tenzory tedy závisejí na souřadnici \mathbf{x} a mají charakter tenzorových polí.⁴ Bod charakterizovaný polohovým vektorem \mathbf{x} se obecně přemístí do bodu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (75)$$

kde \mathbf{u} je vektor posunů, daný obecnou nelineární funkcí \mathbf{x} . V malém okolí zkoumaného bodu $\bar{\mathbf{x}}$ lze rozvinout $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do Taylorovy řady a zanedbat její nelineární členy, což vede k aproximaci

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} \quad (76)$$

⁴Obecně polem rozumíme jakoukoli fyzikální veličinu, která závisí na prostorových souřadnicích, tj. její hodnota se mění bod od bodu. Jestliže hodnoty této veličiny mají skalární charakter, mluvíme o skalárním poli (příkladem je teplotní pole). Posuny mají charakter vektoru, takže pole posunů je vektorové. Napětí a deformace mají charakter tenzoru 2. řádu, takže pole napětí je příkladem tenzorového pole.

Symbol $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ zde označuje tenzor 2. řádu, který vznikne diferenciací vektorového pole \mathbf{f} podle polohového vektoru \mathbf{x} . K přesné definici této operace se ještě v budoucnu vrátíme. Prozatím postačí informace, že $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ je tenzor 2. řádu, jehož složky vzhledem k dané ortonormální bázi se vypočtou jako

$$F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (77)$$

kde f_i jsou složky \mathbf{f} a x_j jsou složky \mathbf{x} vzhledem k uvažované bázi.

Porovnání vztahů (177) a (223) vede k závěru, že roli konstantního tenzoru \mathbf{F} charakterizujícího rovnoměrně deformované těleso v obecném případě přebírá tenzorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (78)$$

kterému se říká **deformační gradient**, zatímco tenzorové pole $\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ je tzv. **gradient posunů**, který přebírá roli tenzoru $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$. Na základě vztahů (68)–(71) se pak přejde k pravému Cauchyho-Greenovu deformačnímu tenzoru a Greenovu-Lagrangeovu tenzoru deformace, které mají opět charakter tenzorových polí. V případě malých deformací se v duchu vztahu (72) definuje tenzor malé deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (79)$$

jako symetrická část gradientu posunů.

Vztah mezi tenzorem deformace a veličinami známými z pružnosti

V základním kurzu pružnosti byly definovány názorné veličiny charakterizující deformaci:

- Poměrné protažení, které se značí ε a představuje relativní změnu délky myšleného vlákna v příslušném směru (např. ε_y je relativní protažení vlákna rovnoběžného s osou y).
- Smykové zkosení, které se značí γ a představuje změnu původně pravého úhlu mezi dvěma myšlenými vlákny (např. γ_{xy} je změna úhlu mezi vlákny původně rovnoběžnými s osami x a y).

Byly také odvozeny vztahy pro výpočet deformačních veličin z pole posunů. Poměrná protažení ve směrech os x , y a z se vypočtou podle vztahů

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (80)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (81)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (82)$$

kde u , v a w jsou posuny ve směrech x , y a z . Smyková zkosení se za předpokladu malých rotací vypočtou podle vztahů

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (83)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (84)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (85)$$

Připomeňte si také, že pokud jsou deformace malé, odpovídá součet poměrných protažení ve třech navzájem kolmých směrech relativní změně objemu

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (86)$$

V tenzorovém zápisu se kartézské souřadnice označují x_1 , x_2 a x_3 místo x , y a z . Posuny ve směrech jednotlivých souřadnicových os se označují u_1 , u_2 a u_3 místo u , v a w a představují složky vektoru posunů \mathbf{u} .

Posuny jednotlivých bodů zkoumaného tělesa jsou obecně různé a můžeme je chápat jako funkci polohového vektoru \mathbf{x} , jehož složkami jsou souřadnice x_i . Říkáme také, že posuny mají charakter vektorového pole.

Jednotlivé složky posunů můžeme derivovat podle jednotlivých prostorových souřadnic. Parciální derivace $\partial u_i / \partial x_j$ jsou složkami tenzoru, kterému se říká gradient pole posunů. Některé z těchto derivací přímo odpovídají poměrným protažením. Vztahy (80)–(82) můžeme přepsat jako

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (87)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (88)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (89)$$

Přitom označení ε_{11} atd. napovídá, že tyto veličiny budou složkami tenzoru deformace. Nelze ale jednoduše ztotožnit tenzor deformace s gradientem posunů, protože složky ε_{ij} s rozdílnými indexy i a j by pak neodpovídaly smykovým zkosením. Parciální derivace $\partial u_1 / \partial x_2$ a $\partial u_2 / \partial x_1$ mají obecně rozdílné hodnoty a smykové zkosení γ_{xy} je jejich součtem a je to stejná veličina jako γ_{yx} . Abychom zachovali co nejúplnější souvislost mezi složkami tenzoru deformace a “inženýrskými” veličinami ε a γ , položíme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (90)$$

Podle této definice jsou normálové složky ε_{11} , ε_{22} a ε_{33} přímo rovny poměrným protažením ε_x , ε_y a ε_z , ale smykové složky $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ a $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ jsou **polovinami** smykových zkosení γ_{xy} , γ_{xz} a γ_{yz} . Zahrnutí faktoru 1/2 je nutné k tomu, aby skutečně šlo o složky tenzoru. Vztah (90) znamená, že tenzor deformace je symetrickou částí gradientu posunů, což formálně můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\text{sym}} \quad (91)$$

Tím jsme dospěli trochu jinou cestou znovu ke vztahu (79).

Vztah (86) pro objemovou deformaci můžeme v tenzorovém označení přepsat jako

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = \mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (92)$$

Říkáme, že relativní změna objemu je dána stopou tenzoru deformace.

Tenzor napětí, vnější síly

Podobně jako při zavedení tenzoru deformace se nejprve zaměříme na případ, kdy je homogenní těleso rovnoměrně zdeformováno, a všechny body tělesa jsou tedy namáhány stejným způsobem. Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ lze zavést pomocí bilineární formy $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{u})$, která vektoru \mathbf{a} popisujícímu libovolnou plošku a vektoru \mathbf{u} popisujícímu posun přiřadí práci, kterou by síly působící na tuto plošku vykonaly na daném posunu. Přitom vektor \mathbf{a} popisující plošku je kolmý na danou plošku a jeho velikost odpovídá jejímu obsahu. Pokud vektor \mathbf{a} zafixujeme, získáme lineární formu, která každému posunu \mathbf{u} přiřazuje práci vykonanou jistou silou. Takové lineární formě odpovídá vektor síly působící na plošku \mathbf{a} , vyjádřený jako $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Pokud za \mathbf{a} dosadíme jednotkový vektor \mathbf{n} , bude $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ představovat tzv. vektor napětí, protože síla bude vztažena na jednotku obsahu.

V případě obecně deformovaného tělesa není síla působící na plošku myšleného řezu úměrná obsahu této plošky a napětí se definuje pro každý bod zvlášť s využitím limitního přechodu. Napětí pak má charakter tenzorového pole.

Na těleso vyplňující prostorovou oblast V mohou působit vnější síly dvojího druhu. Objemové síly jsou spojitě rozloženy po objemu tělesa a popsány vektorovým polem \mathbf{b} . Velikost vektoru \mathbf{b} odpovídá intenzitě objemových sil, chápáné jako síla na jednotku objemu. Objemové síly se často používají k popisu vlastní tíhy tělesa, ale podobný charakter mají i setrvačné síly uvažované v dynamice. Druhým typem vnějších sil jsou síly povrchové, \mathbf{t} , které jsou spojitě rozloženy po povrchu tělesa S (tedy po hranici oblasti V) a jejich intenzita odpovídá síle na jednotku obsahu. Tyto síly představují silové působení sousedních těles na zkoumané těleso, přenášené kontaktem na společné hranici. Na podepřené části hranice nejsou povrchové síly předem známe, protože mají charakter reakcí vznikajících ve vazbách. Na zbylé (volné) části hranice

jsou pak předepsané a mají charakter zatížení. Jestliže obecnou plošku \mathbf{a} uvažovanou v definici napětí umístíme na hranici a píšeme $\mathbf{a} = \mathbf{n} dS$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý na hranici a dS je obsah diferenciální plošky, odpovídá elementární povrchová síla $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \mathbf{t} dS$ vektoru napětí $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ vynásobenému obsahem plošky.

Rozklad tenzoru 2. řádu na kulovou a deviatorickou část

Poznámka: V tomto textu již předjímáme určité skutečnosti, které vyplynou z domácího úkolu, např. symetrii tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$.

Ze základního kurzu pružnosti asi víte, že deformaci lze rozdělit na část popisující změnu objemu a část popisující změnu tvaru. Podobně při popisu napětí pracujeme s jeho hydrostatickou a deviatorickou částí. Již jsme zavedli tenzory napětí a deformace a ukázali (pro napětí teprve ukážeme), že jde o symetrické tenzory 2. řádu. V domácím úkolu 3.1 také ukážeme, že složky tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ vůči dané ortonormální bázi odpovídají klasickým složkám napětí: σ_{11} je σ_x , σ_{12} je τ_{xy} , atd.

Obecně lze symetrický tenzor 2. řádu (např. tenzor deformace nebo napětí) rozložit na kulovou (sférickou) část a deviatorickou část. Kulová část je skalárním násobkem jednotkového tenzoru 2. řádu a má stejnou stopu jako původní tenzor. Například pro tenzor napětí definujeme střední napětí jako třetinu stopy tenzoru napětí, tedy

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = \frac{1}{3}\mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (93)$$

Index “m” souvisí se slovem “mean” (střední) a nejde o tenzorový index, proto je zapsán standardním fontem a nikoli kurzívou. Kulová část tenzoru napětí odpovídá hydrostatické napjatosti a získá se jako $\sigma_m \mathbf{1}$. Po odečtení kulové části zbyde deviatorická část tenzoru. V případě tenzoru napětí ji označíme s. Rozklad tenzoru napětí na hydrostatickou (kulovou) část a deviatorickou část se tedy zapíše jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{1} + \mathbf{s} \quad (94)$$

Je-li dán tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$, můžeme jeho deviatorickou část vypočítat jako⁵

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} \sigma_m = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (95)$$

Abychom mohli celý výraz na pravé straně vyjádřit jako tenzor napětí zleva “vynásobený” (dvojitě kontrahovaný) nějakým tenzorem 4. řádu, napíšeme $\boldsymbol{\sigma}$ jako $\mathbf{I}_S : \boldsymbol{\sigma}$, kde \mathbf{I}_S je symetrický jednotkový tenzor 4. řádu,⁶ jehož složky vůči libovolné ortonormální bázi jsou $I_{ijkl}^S = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$. Potom můžeme přepsat (239) jako

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}_S : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I}_S - \mathbf{I}_K) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I}_D : \boldsymbol{\sigma} \quad (96)$$

kde

$$\mathbf{I}_K = \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (97)$$

je kulový (sférický) projekční tenzor a

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I}_S - \mathbf{I}_K = \mathbf{I}_S - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (98)$$

je deviatorický projekční tenzor. Mluvíme o projekčních tenzorech, protože násobení tenzorem \mathbf{I}_K odpovídá promítnutí do podprostoru odpovídajícího čistě hydrostatickým stavům a násobení tenzorem \mathbf{I}_D odpovídá promítnutí do podprostoru odpovídajícího čistě deviatorickým stavům.

Obdobný zápis lze uplatnit i pro rozklad tenzoru deformace,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{1} + \mathbf{e} \quad (99)$$

kde kulová část, tedy $\varepsilon_m \mathbf{1}$, odpovídá změně objemu a deviatorická část, tedy \mathbf{e} , změně tvaru. Veličina ε_m je střední deformace, definovaná jako

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (100)$$

⁵Pokud vám není jasné, proč se v rovnici (239) objeví symbol \otimes pro přímý součin, přepište si tuto rovnici ve složkovém zápisu: $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\sigma_{kl}$. Při původním uzávorkování $\delta_{ij}(\delta_{kl}\sigma_{kl})$ jde o násobení tenzoru $\mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma}$, ale pořadí operací lze zaměnit a interpretovat tento člen jako $(\delta_{ij}\delta_{kl})\sigma_{kl}$, což odpovídá dvojitě kontrakci mezi tenzorem 4. řádu $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ a tenzorem 2. řádu $\boldsymbol{\sigma}$.

⁶V celém tomto odvození bychom místo \mathbf{I}_S mohli všude použít \mathbf{I} . Pak by ale projekční tenzory \mathbf{I}_K a \mathbf{I}_D nevykazovaly malou symetrii a při konstrukci tenzoru tuhosti a poddajnosti s jejich využitím bychom museli provádět dodatečnou symetrizaci.

Lepší názorný význam ale má její trojnásobek, neboli stopa tenzoru deformace,

$$\varepsilon_V = \mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (101)$$

která odpovídá relativní změně objemu (při malých deformacích). Deviatorickou část deformace, která popisuje změnu tvaru při zachování objemu, můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \mathbf{1} = \mathbf{I}_S : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I}_S - \mathbf{I}_K) : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_D : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (102)$$

Rozklad na kulovou a deviatorickou část má klíčový význam pro zjednodušení popisu izotropního lineárně pružného materiálu. Jestliže má materiál ve všech směrech stejné vlastnosti, způsobuje hydrostatická část napětí pouze změny objemu a deviatorická část napětí pouze změny tvaru.

Hydrostatická část napětí je charakterizovaná jedinou veličinou—středním napětím σ_m . Objemová změna je také charakterizována jedinou veličinou, přičemž jasný názorný význam má relativní změna objemu, ε_V . V případě lineární pružnosti jsou si tyto veličiny navzájem úměrné a vztah mezi nimi se popisuje rovnicí

$$\sigma_m = K \varepsilon_V \quad (103)$$

kde K je objemový modul pružnosti. Pokud se však místo ε_V použije střední deformace ε_m , objeví se v rovnici

$$\sigma_m = 3K \varepsilon_m \quad (104)$$

konstanta úměrnosti $3K$. Díky tomu si objemový modul K ponechává svůj názorný význam poměru mezi přírůstkem středního napětí a přírůstkem relativní změny objemu. Jeho převrácené hodnotě $1/K$ se někdy říká modul stlačitelnosti. Jde o veličinu charakterizující poddajnost materiálu při objemových změnách.

Pro deviatorické části napětí a deformace lze také napsat odpovídající lineární vztah. Přestože se jedná o tenzory, ukazuje se, že stačí napsat jednoduše

$$\mathbf{s} = c \mathbf{e} \quad (105)$$

kde c je vhodná skalární veličina charakterizující deviatorickou tuhost. Názorný význam této veličiny si najdete sami v rámci domácího úkolu.

Cvičení 3

3.1 Tenzor napětí

V poznámkách k přednášce byla zmíněna možná definice tenzoru napětí, chápaného jako jistá bilineární forma $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{u})$. Ukažte, že složky takto definované bilineární formy skutečně odpovídají známým složkám napětí σ_x, τ_{xy} , atd. V tenzorovém zápisu budou označovány jako σ_{11}, σ_{12} , atd. Připomeňte si také, proč je tenzor napětí symetrický.

Návod: Podle klasické definice je σ_x napětí působící kolmo na plošku s normálou x , zatímco τ_{xy} je napětí, které na plošku s normálou x působí rovnoběžně s osou y . Podle tenzorového přístupu se složka σ_{11} získá vyhodnocením bilineární formy $\sigma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)$ a složka σ_{12} vyhodnocením $\sigma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Připomeňte si, jaký je názorný význam této bilineární formy a jejích argumentů a nalezněte souvislost s klasickou definicí.

Poznámka: Na přednášce padla zmínka o tom, že důkaz linearitu formy $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ vzhledem k prvnímu argumentu bude předmětem domácího úkolu. Bylo by ale poněkud zdoluhavé popisovat zde výchozí předpoklady a dávat návod k postupu, a proto tento důkaz necháme až na 5. přednášku.

3.2 Projekční tenzory

V poznámkách k přednášce byly vztahy (97)–(98) definovány projekční tenzory \mathbf{I}_K a \mathbf{I}_D , pomocí nichž lze z daného tenzoru 2. řádu získat jeho kulovou část a deviator. Tyto tenzory byly zavedeny už v domácím úkolu 2.3, který se ale na přednášce zatím nekontroloval. Vraťte se k tomuto úkolu a dokažte vztahy v něm zmíněné. Pokuste se vysvětlit, co tyto vztahy názorně znamenají, a vysvětlete rozdíl mezi symboly \mathbf{O} a $\mathbf{0}$. Dále ukažte, že pro deviator napětí \mathbf{s} platí

$$\mathbf{I}_K : \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (106)$$

$$\mathbf{I}_D : \mathbf{s} = \mathbf{s} \quad (107)$$

a obdobné vztahy platí i pro deviátor deformace, \mathbf{e} . Dokažte také, že deviátor (napětí, deformace i jakéhokoli jiného tenzoru 2. řádu) má vždy nulovou stopu.

3.3 Tenzorový zápis zobecněného Hookeova zákona

S využitím vztahů (104)–(105) uvedených v poznámkách k přednášce odvoďte výrazy pro tenzor pružné poddajnosti \mathbf{C}_e a tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e , které zprostředkují vztah mezi tenzory napětí a deformace.

Nejprve zjistěte, jaký význam má konstanta c použitá ve vztahu (105). Můžete například využít složkový zápis tohoto vztahu a zamyslet se nad tím, co představuje složka deviátoru napětí s_{12} a složka deviátoru deformace e_{12} (v jakém vztahu jsou ke klasickým složkám napětí a deformace).

Poté zkombinujte (104)–(105) se vztahy popisujícími rozklad napětí a deformace na kulovou a deviatorkou část tak, abyste dostali zobecněný Hookeův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (108)$$

a jeho inverzní podobu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} \quad (109)$$

Výsledkem by měly být kompaktní výrazy pro tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e a tenzor pružné poddajnosti \mathbf{C}_e .

3.4 Tenzorový zápis zobecněného Hookeova zákona – pokračování

Předpokládejme, že v úkolu 3.3 jste si správně odvodili vyjádření tenzoru pružné tuhosti (pro izotropní materiál) ve tvaru

$$\mathbf{D}_e = 3K\mathbf{I}_K + 2G\mathbf{I}_D \quad (110)$$

kde

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (111)$$

je objemový modul pružnosti a

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (112)$$

je smykový modul pružnosti, přičemž E označuje Youngův modul pružnosti a ν Poissonův součinitel. Lineárně pružný izotropní materiál tedy lze charakterizovat pomocí dvojice konstant E a ν , nebo pomocí dvojice konstant K a G .

Existuje ještě další oblíbená volba dvojice konstant charakterizujících lineárně pružný izotropní materiál, a sice tzv. Laméovy součinitele λ a μ , pomocí nichž se tenzor pružné tuhosti zapisuje ve tvaru

$$\mathbf{D}_e = 3\lambda\mathbf{I}_K + 2\mu\mathbf{I}_S = \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I}_S \quad (113)$$

Najděte vztahy mezi Laméovými součiniteli a dalšími dvěma dvojicemi pružných konstant. Dále vyjádřete jednotlivé složky tenzoru pružné tuhosti, označené obecně jako D_{ijkl}^e , pomocí K a G a pomocí λ a μ . Těchto složek je celkem 81, ale samozřejmě nemusíte zapisovat vztah pro každou zvlášť, protože v důsledku různých symetrií nabývají jen několika málo hodnot.

Poté přepište rovnici (108) do inženýrského zápisu, ve kterém budou tenzorové složky σ_{ij} a ε_{ij} nahrazeny inženýrskými složkami $\sigma_x, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \gamma_{xy}$ atd. Stačí samozřejmě napsat jednu typickou rovnici pro normálové napětí a jednu pro smykové napětí. Sestavte klasickou matici pružné tuhosti o 6 řádcích a 6 sloupcích používanou při maticovém inženýrském zápisu zobecněného Hookeova zákona. Prvky této matice označte D_{11}^e, D_{12}^e atd. Uvědomte si, že pro izotropní materiál se v této matici kromě nul vyskytují jen tři různé koeficienty. Vyjádřete každý z nich pomocí zmíněných tří dvojic materiálových parametrů a výsledek porovnejte s výrazy odvozenými v základním kurzu teorie pružnosti.

Na závěr vše zopakujte pro tenzor poddajnosti \mathbf{C}_e , odpovídající inženýrskou matici pružné poddajnosti a inverzní tvar Hookeova zákona (109).

Přednáška 4

Pole, jeho gradient a divergence

Polem rozumíme jakoukoli fyzikální veličinu, která závisí na prostorových souřadnicích, tj. její hodnota se mění bod od bodu. Jestliže hodnoty této veličiny mají skalární charakter, mluvíme o skalárním poli (příkladem je teplotní pole). Posuny mají charakter vektoru, takže pole posunů je vektorové. Napětí má charakter tenzoru 2. řádu, takže pole napětí je příkladem tenzorového pole.

Z matematického hlediska lze pole chápat jako zobrazení, jehož definičním oborem je určitá oblast V v (obvykle trojrozměrném) euklidovském prostoru a oborem hodnot je nějaká podmnožina prostoru všech tenzorů r -tého řádu. Pro $r = 0$ je to běžná reálná funkce prostorových proměnných (resp. polohového vektoru $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$), pro $r = 1$ je to vektorová funkce, obecně pak tenzorová funkce. Přitom x_i , $i = 1, 2, 3$, jsou kartézské souřadnice (tradičně značené x , y a z), chápané jako složky polohového vektoru \mathbf{x} vzhledem ke zvolené ortonormální bázi dané vektory \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$.

Parciální derivace skalární funkce f podle jednotlivých kartézských souřadnic x_1 , x_2 a x_3 představují složky jistého vektorového pole, které se označuje jako **gradient** ∇f původního skalárního pole f . Symbol ∇ čteme “nabla” a ∇ je jeho tučná varianta. Alternativně můžeme gradient označit také jako $\partial f / \partial \mathbf{x}$. Platí tedy

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (114)$$

Někdy se pro parciální derivace podle prostorových proměnných používá i jiný zápis, např. $\nabla_i f$ nebo $f_{,i}$ místo $\partial f / \partial x_i$.

Analogicky lze definovat i gradient vektorového pole nebo tenzorového pole druhého a vyššího řádu. Gradientem vektorového pole \mathbf{f} je tenzorové pole 2. řádu

$$\nabla \mathbf{f} = \nabla(f_j \mathbf{e}_j) = (\nabla f_j) \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i (\nabla_i f_j) \otimes \mathbf{e}_j = (\nabla_i f_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (115)$$

Je tedy vidět, že složkami tohoto tenzorového pole jsou parciální derivace

$$\nabla_i f_j \equiv \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \equiv f_{j,i} \quad (116)$$

Značení v literatuře zde není jednotné. Někdy se derivace $\partial f_j / \partial x_i$ považuje za složku ji gradientu, ale my ji budeme považovat za složku ij . Je to jen formalita, ale je třeba zvolit určitý systém a pak se ho důsledně držet. Obecně můžeme říci, že gradientem tenzorového pole \mathbf{F} řádu r je tenzorové pole $\nabla \mathbf{F}$ řádu $r + 1$ se složkami

$$(\nabla \mathbf{F})_{ijk\dots} = \nabla_i F_{jk\dots} = \frac{\partial F_{jk\dots}}{\partial x_i} \quad (117)$$

Symbol ∇ má charakter vektorového diferenciálního operátoru se složkami ∇_i , což jsou skalární diferenciální operátory $\partial / \partial x_i$, $i = 1, 2, 3$. Pokud tento operátor aplikujeme podobně, jako když vytváříme přímý součin (viz úpravy v rovnici (115)), získáme gradient daného pole, zatímco pokud jej aplikujeme podobně jako při kontrakci, získáme takzvanou **divergenci** daného pole. Divergenci lze vytvořit pouze pro tenzorové pole aspoň 1. řádu, tedy nikoli pro skalární pole. Divergencí vektorového pole \mathbf{f} je skalární pole $\nabla \cdot \mathbf{f}$ dané vztahem⁷

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla_i f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (118)$$

Divergencí tenzorového pole 2. řádu \mathbf{F} je vektorové pole $\nabla \cdot \mathbf{F}$ se složkami

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_j = \nabla_i F_{ij} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} \quad (119)$$

Zobecnění pro tenzory vyššího řádu je zřejmé.

⁷Všimněte si, že sčítací konvence se uplatňuje i v případě, že opakováný index i je jednou v čitateli a jednou ve jmenovateli.

Geometrické rovnice v tenzorovém zápisu (doplňující text)

Geometrickými rovnicemi zde rozumíme jednu ze skupin základních rovnic teorie pružnosti, která popisuje vztahy mezi složkami deformace a posuny. Pokud jsou posuny velmi malé ve srovnání s rozměry tělesa (obvyklý případ ve stavební praxi), můžeme použít geometricky lineární teorii, která deformaci popisuje tenzorem ε , odpovídajícím symetrické části tenzoru $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$, kde \mathbf{F} je deformační gradient (viz řešení úkolu 2.2). Pro rovnoměrně deformované těleso můžeme novou polohu bodu \mathbf{x} popsat lineární funkcí

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \quad (120)$$

kde vektor \mathbf{u}_0 představuje novou polohu bodu původně umístěného v počátku a \mathbf{F} je deformační gradient, v případě rovnoměrné deformace chápaný jako daný tenzor (nezávislý na \mathbf{x}). Pokud derivujeme j -tou složku vektoru $\boldsymbol{\xi}$ podle i -té složky vektoru \mathbf{x} , dostaneme složku ij gradientu $\nabla \boldsymbol{\xi}$, která je zároveň složkou ji tenzoru \mathbf{F} :

$$(\nabla \boldsymbol{\xi})_{ij} = \nabla_i \xi_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_{jk} x_k = F_{jk} \delta_{ik} = F_{ji} \quad (121)$$

Podle konvence, kterou jsme se rozhodli používat, je tedy deformační gradient transpozicí tenzoru, který vznikne jako gradient zobrazení původního polohového vektoru na nový polohový vektor, tj. platí $\mathbf{F} = (\nabla \boldsymbol{\xi})^T$.

V případě obecné (nerovnoměrné) deformace lze novou polohu popsat nelineární funkcí $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$, kterou lze také zapsat jako $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, kde \mathbf{u} je pole posunů. Deformační gradient se pak chápe jako tenzorové pole

$$\mathbf{F} = (\nabla(\mathbf{x} + \mathbf{u}))^T = \mathbf{1} + (\nabla \mathbf{u})^T \quad (122)$$

Je vidět, že tenzor označený v úkolu 2.3 jako \mathbf{G} je vlastně transponovaným gradientem pole posunů:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = (\nabla \mathbf{u})^T \quad (123)$$

Tenzor deformace (někdy přesněji označován jako tenzor malé deformace) je symetrickou částí tenzoru \mathbf{G} , takže vztah mezi tenzorem deformace a vektorem posunů lze zapsat jako

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u})^T + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u})_{\text{sym}} \equiv \nabla_s \mathbf{u} \quad (124)$$

kde symbol ∇_s označuje operátor “symetrický gradient” (aplikovaný na vektorové pole \mathbf{u}). Vztah (124) představuje tenzorový zápis geometrických rovnic (v teorii malých deformací).

Matematické nástroje pro práci s integrály (doplňující text)

Skalární i tenzorová pole obvykle popisují rozložení různých fyzikálních veličin ve zkoumaném tělese, kterému matematicky odpovídá jistá oblast V v trojrozměrném prostoru. Ve fyzikálních rovnicích se často objevují integrály přes takovou oblast, případně přes její hranici S . Například celkovou hmotnost tělesa se spojitě rozloženou hmotou získáme jako integrál z hustoty (objemové hmotnosti). Pro úpravy integrálních výrazů jsou užitečná pravidla, která představují zobecnění známých vět pro jednoduché integrály funkcí jedné proměnné na vícenásobné integrály funkcí více proměnných.

Připomeňte si nejprve tzv. základní větu integrálního počtu (o integrování derivace),

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a) = [f]_a^b \quad (125)$$

Přitom f' zde označuje derivaci funkce f podle proměnné x , tedy df/dx . Pokud ve vztahu (125) místo funkce f napíšeme součin dvou funkcí fg a uplatníme pravidlo pro derivaci součinu, získáme po jednoduché úpravě vzorec pro integraci per partes,

$$\int_a^b f' g dx = [fg]_a^b - \int_a^b f g' dx \quad (126)$$

Při rozšíření na funkce více proměnných nejprve prozkoumáme nejjednodušší případ, kdy se integruje parciální derivace funkce dvou proměnných x a y přes rovinnou oblast A ve tvaru obdélníka, který je

kartézským součinem intervalů $[a, b]$ a $[c, d]$. Podle Fubiniovy věty lze dvojný integrál přes obdélník rozepsat jako dva do sebe vnořené jednoduché integrály:

$$\int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy \quad (127)$$

Ve vnitřním integrálu hraje proměnná y vlastně roli parametru a podle (125) lze napsat

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx = f(b, y) - f(a, y) \quad (128)$$

Po dosazení do (127) dostaneme

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d (f(b, y) - f(a, y)) dy = \int_c^d f(b, y) dy - \int_c^d f(a, y) dy \quad (129)$$

Názorně to znamená, že jsme obdélník A rozložili na nekonečně tenké vodorovné proužky a na každém proužku vyjádřili integrál z $\partial f(x, y)/\partial x$ jako rozdíl hodnot funkce f na pravém a levém konci proužku vynásobený tloušťkou proužku dy . Poté zbývá integrovat vzhledem k y . Integrál $\int_c^d f(b, y) dy$ je vlastně integrál z funkce f přes úsečku odpovídající jedné ze stran obdélníka A a integrál $\int_c^d f(a, y) dy$ je integrál z funkce f přes protilehlou stranu.

Odvozený výsledek je sice užitečný, ale je zapsán poněkud kostrbatě a navíc platí jen pro integraci přes obdélníkovou oblast. Zkusme integrovat přes poněkud obecnější rovinnou oblast, kterou lze popsat podmínkami

$$a(y) \leq x \leq b(y) \quad \text{a} \quad c \leq y \leq d \quad (130)$$

kde a a b jsou dané funkce proměnné y , zatímco c a d jsou dané konstanty (nakreslete si obrázek). Postup předvedený pro obdélník upravíme takto:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d (f(b(y), y) - f(a(y), y)) dy = \\ &= \int_c^d f(b(y), y) dy - \int_c^d f(a(y), y) dy \end{aligned} \quad (131)$$

V prvním z integrálů na pravé straně bod (x, y) , ve kterém se funkce f vyhodnocuje, probíhá “pravou část” hranice oblasti A , kterou označíme S^+ , a ve druhém probíhá její “levou část”, kterou označíme S^- (viz vámi nakreslený obrázek). Abychom však výsledek mohli přepsat pomocí křivkových integrálů, musíme diferenciál dy vyjádřit pomocí diferenciálu hranice ds . Jestliže symbolem \mathbf{n} označíme jednotkový vektor kolmý na hranici a směřující ven z oblasti A , platí na pravé části hranice $dy = n_x ds$ a na levé části hranice $dy = -n_x ds$, kde n_x je vodorovná složka zmíněného jednotkového vektoru (nakreslete opět odpovídající obrázek a tvrzení zdůvodněte). Díky tomu můžeme výsledek odvozený ve (131) zapsat v elegantním tvaru

$$\int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA = \int_c^d f(b(y), y) dy - \int_c^d f(a(y), y) dy = \int_{S^+} f n_x ds + \int_{S^-} f n_x ds = \int_S f n_x ds \quad (132)$$

Příjemné je, že nakonec zmizelo rozdělení hranice na pravou a levou část a integruje se jednotným způsobem po celé hranici S . Jde vlastně o křivkový integrál po uzavřené křivce, ale pro jednoduchost jej značíme jen jako integrál přes S . Výsledek lze s trochou fantazie rozšířit i na integrály přes prostorovou oblast V , kdy funkce f závisí na souřadnicích x, y a z . Získáváme tak tzv. **Greenovu větu** ve tvaru

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_S n_x f dS \quad (133)$$

Hranicí S je nyní jistá plocha v prostoru a dS je její diferenciál, tedy nekonečně malá ploška na hranici zkoumaného tělesa.

Je zřejmé, že obdobné vztahy můžeme zapsat i pro integrály z parciálních derivací podle y a podle z . Na pravé straně se přitom místo složky n_x normálového vektoru \mathbf{n} použijí složky n_y , resp. n_z . Po přechodu k tenzorovému označení napíšeme

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S n_i f dS \quad (134)$$

což lze chápat jako složkový zápis vztahu

$$\int_V \nabla f \, dV = \int_S \mathbf{n} f \, dS \quad (135)$$

Místo skalárního pole f můžeme použít vektorové pole, případně jeho složky. Greenova věta tak nabývá různých podob, ale její podstata zůstává stejná. Uveďme několik příkladů:

$$\int_V \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \, dV = \int_S n_i f_j \, dS \quad (136)$$

$$\int_V \nabla \mathbf{f} \, dV = \int_S \mathbf{n} \otimes \mathbf{f} \, dS \quad (137)$$

$$\int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dV = \int_S n_i f_i \, dS \quad (138)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \, dS \quad (139)$$

Vztahu (139) se někdy říká **divergenční věta**, protože na levé straně se integruje divergence vektorového pole. Podobné vztahy lze samozřejmě zapsat i pro tenzorová pole. Všimněte si obecného pravidla – při přechodu od integrálu přes celou oblast k integrálu přes její hranici se z diferenciálního operátoru ∇_i stane n_i , případně z ∇ se stane \mathbf{n} .

Zobecněním vzorce pro integraci per partes na funkce více proměnných je tzv. **Gaussova-Ostrogradského věta**. Dosadíme-li do (134) místo funkce f součin funkcí f a g , dostaneme po úpravách

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dV = \int_S n_i f g \, dS - \int_V f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dV \quad (140)$$

což je složkový zápis vztahu

$$\int_V (\nabla f) g \, dV = \int_S \mathbf{n} f g \, dS - \int_V f \nabla g \, dV \quad (141)$$

I zde můžeme místo skalárních polí použít pole tenzorová, je jen potřeba dát pozor na indexy a správnou interpretaci operací (např. přímého součinu nebo kontrakce).

Cvičení 4

4.1 Gradient

V předchozím textu byl popsán diferenciální operátor ∇ (nabla) a zaveden pojem gradient skalárního nebo tenzorového pole.

- V případě skalárního pole (tedy skalární funkce prostorových proměnných) má gradient charakter vektorového pole a udává v každém bodě "směr nejrychlejšího nárůstu funkční hodnoty". Vysvětlete, proč tomu tak je.

Návod: Vzpomeňte si na totální diferenciál funkce f a jeho zápis pomocí gradientu:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x} \quad (142)$$

- Zjistěte, čemu odpovídá výraz $\nabla f \cdot \mathbf{n}$, jestliže \mathbf{n} je jednotkový vektor.

4.2 Názorný význam divergence

V předchozím textu byl také zaveden pojem divergence tenzorového pole.

- Zkuste odhalit názorný význam divergence pole posunu, definované předpisem

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla_i u_i = u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (143)$$

[Návod: Rozepište tento výraz explicitně jako součet tří členů a zamyslete se, jaký mají jednotlivé členy význam a jaký význam má jejich součet.] Určete, jaký je názorný význam podmínky $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

- Představte si vektorové pole \mathbf{q} popisující tepelný tok. Jeho význam je následující: Elementární ploškou dS s jednotkovou normálou \mathbf{n} projde za elementární časový interval dt množství tepla dané výrazem $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS dt$. Jinými slovy, průmět vektoru \mathbf{q} do směru \mathbf{n} (tedy skalární součin $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$) odpovídá množství tepla, které proteče ploškou kolmou na daný směr, vztaženému na jednotku času a jednotkový obsah plošky. Zkuste odhalit názorný význam divergence tepelného toku, tedy výrazu

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla_i q_i = q_{i,i} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (144)$$

4.3 Divergence gradientu a stopa gradientu

Zjistěte, jaký operátor vznikne, jestliže vytvoříte divergenci z gradientu. Uvažujte libovolné skalární pole $f(\mathbf{x})$ a na jeho gradient aplikujte operátor divergence. Přepište do složkového zápisu a interpretujte výsledek.

Dále zjistěte, čemu odpovídá stopa gradientu vektorového pole. Stopou rozumíme dvojitou kontrakci s jednotkovým tenzorem 2. řádu. Je rozdíl mezi stopou gradientu a stopou symetrické části gradientu vektorového pole?

4.4 Vztah mezi polem napětí a polem posunů

Již víme, že zobecněný Hookeův zákon můžeme v tenzorovém zápisu prezentovat ve tvaru $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí, \mathbf{D}_e je tenzor pružné tuhosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor deformace. Ukázali jsme také, že tenzor deformace je symetrickou částí gradientu posunů, tj. platí $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}$. Spojením těchto dvou vztahů dostáváme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \nabla_s \mathbf{u} \quad (145)$$

Vysvětlete, proč není chybou, pokud v této rovnici nahradíme symetrickou část gradientu samotným gradientem, tj. přepíšeme (145) jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \nabla \mathbf{u} \quad (146)$$

4.5 Odvození Cauchyho rovnic rovnováhy

Připomeňte si, že tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ lze zavést pomocí bilineární formy $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{u})$, jež vektoru \mathbf{a} popisujícímu (nekonečně malou) plošku a vektoru \mathbf{u} popisujícímu posun přiřadí práci, kterou by síly působící na tuto plošku vykonaly na daném posunu. Přitom vektor \mathbf{a} je kolmý na danou plošku a jeho velikost odpovídá jejímu obsahu. Pokud vektor \mathbf{a} zafixujeme, získáme lineární formu, která každému posunu \mathbf{u} přiřazuje práci vykonanou jistou silou. Takové lineární formě odpovídá vektor síly působící na plošku \mathbf{a} , vyjádřený jako $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Pokud za \mathbf{a} dosadíme jednotkový vektor \mathbf{n} , bude $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ představovat tzv. vektor napětí, protože síla bude vztažena na jednotku obsahu.

Na těleso vyplňující oblast V mohou působit vnější síly dvojího druhu. Objemové síly jsou spojitě rozloženy po objemu tělesa a popsány vektorovým polem $\bar{\mathbf{b}}$. Velikost vektoru $\bar{\mathbf{b}}$ odpovídá intenzitě objemových sil, chápáné jako síla na jednotku objemu. Objemové síly obvykle představují vlastní tíhu tělesa, ale podobný charakter mají i setrvačné síly uvažované v dynamice. Druhým typem vnějších sil jsou síly povrchové, \mathbf{t} , které jsou spojitě rozloženy po povrchu tělesa S (tedy po hranici oblasti V) a jejich intenzita odpovídá síle na jednotku obsahu. Tyto síly představují silové působení sousedních těles na zkoumané těleso, přenášené kontaktem na společné hranici. Na podepřené části hranice nejsou povrchové síly předem známé, protože mají charakter reakcí vznikajících ve vazbách. Na zbylé (volné) části hranice jsou pak předepsané a mají charakter zatížení. Jestliže obecnou plošku \mathbf{a} uvažovanou v definici napětí umístíme na hranici a píšeme $\mathbf{a} = \mathbf{n} dS$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý na hranici a dS je obsah diferenciální plošky, odpovídá povrchová síla vektoru napětí a platí $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Nyní můžeme zapsat podmínky rovnováhy zkoumaného tělesa jako celku. Výslednice všech vnějších sil působících na těleso (včetně reakcí) musí být nulová. Silovou část této výslednice můžeme vyjádřit jako součet integrálu objemových sil a integrálu povrchových sil, takže silová podmínka rovnováhy má tvar

$$\int_V \bar{\mathbf{b}} dV + \int_S \mathbf{t} dS = \mathbf{0} \quad (147)$$

Uvědomte si, že $\bar{\mathbf{b}} dV$ je elementární vnější síla působící na nekonečně malý objem dV a $\mathbf{t} dS$ je elementární síla působící na nekonečně malou plošku dS na hranici tělesa.

V rovnici (147) vyjádřete povrchové síly pomocí tenzoru napětí a následně s využitím Greenovy věty převed'te druhý integrál na levé straně této rovnice na integrál přes objem tělesa. Po sloučení integrálů dostanete podmínku rovnováhy ve tvaru

$$\int_V (...) dV = \mathbf{0} \quad (148)$$

Protože však v rovnováze má být nejen celé těleso, ale i každá jeho část, musí obdobná podmínka platit pro integrál z téhož výrazu přes každou podoblast oblasti V . Tuto podoblast můžeme volit libovolně malou a v limitě dostaneme podmínku, že samotný integrand (tj. vytečkovaný výraz v (148)) musí být roven nulovému vektoru, a to v každém bodě zkoumaného tělesa (při přesné matematické analýze se dospěje k závěru, že tato podmínka musí být splněna “skoro všude”, tj. až na množinu nulové míry, v našem případě nulového objemu). Takto lokálně zapsaná podmínka rovnováhy odpovídá známým Cauchyho rovnicím. Odvod'te tyto rovnice v kompaktním tenzorovém zápisu a poté je přepište do složkového zápisu a porovnejte s rovnicemi, které znáte z teorie pružnosti (kde se obvykle odvozují ze silových podmínek rovnováhy elementárního kváдру).

Přednáška 5

Okrajové podmínky

Pro jednoduchost uvažujeme jen podepření, které se týká všech složek posunů, tedy vetknutí. Na podepřené části hranice, označené jako S_u , jsou předepsány posuny, obvykle jako nulové, ale obecně může dojít k pohybu hranice a posuny jsou rovny předepsaným hodnotám $\bar{\mathbf{u}}$. V podporách vznikají reakce, které jsou v našem případě popsány vektorem vyjadřujícím v každém bodě hranice S_u intenzitu sil působících od podpor na zkoumané těleso, vztaženou na jednotku obsahu hranice. Tyto síly, označené \mathbf{t}_R , zároveň odpovídají napětí, které na hraničních ploškách vzniká. Protože jde o napětí na ploškách s pevně danou normálou \mathbf{n} , hovoříme o vektoru napětí \mathbf{t} , který se z tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ vypočte jako $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Přitom \mathbf{n} označuje jednotkový vektor kolmý na hranici a orientovaný ven ze zkoumaného tělesa, tedy takzvanou vnější normálu tělesa. Hranice tělesa samozřejmě může být zakřivená, takže v každém jejím bodě může být \mathbf{n} jiný vektor.

Zbývá část hranice, označená jako S_t , je nepodepřená a může se volně posouvat. Na této volné části hranice mohou být předepsány plošně rozložené vnější síly, charakterizované vektorem $\bar{\mathbf{t}}$. Těmto známým silám pak musí odpovídat vektor napětí, získaný kontrakcí tenzoru napětí s vnější normálou. Statické okrajové podmínky tedy mají tvar $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}$. Pokud je v některých bodech volná hranice nezátížená, mají okrajové podmínky stejný tvar, jen je vektor předepsaných povrchových sil $\bar{\mathbf{t}}$ nulový.

Přehled základních rovnic lineární pružnosti v tenzorovém zápisu

geometrické	$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}$	
materiálové	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}$	ve V
statické	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$	
geometrické okrajové podmínky	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$	na S_u
statické okrajové podmínky	$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}$	na S_t

Clapeyronova věta

S využitím Gaussovy-Ostrogradského věty lze odvodit následující identitu známou jako Clapeyronova věta:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \, dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \, dS - \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} \, dV \quad (149)$$

Proveďte si podrobné odvození ve složkovém zápisu.

Rovnice (149) byla odvozena jednoduchou formální úpravou, ale její význam spočívá v tom, že jednotlivé členy mají názorný fyzikální význam. Symboly $\boldsymbol{\sigma}$ a \mathbf{u} samozřejmě odpovídají poli napětí a poli posunů. Na levé straně lze součin $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}$ nahradit součinem $\boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u}$, protože tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ je symetrický. Jelikož $\nabla_s \mathbf{u}$, tedy symetrická část gradientu posunů, odpovídá tenzoru malé deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$, lze součin $\boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$ chápat jako práci, kterou by napětí $\boldsymbol{\sigma}$ vykonalo na deformaci $\boldsymbol{\varepsilon}$. Přesněji řečeno jde o hustotu práce, tedy veličinu vztaženou na jednotkový objem materiálu. Její integrací přes objem tělesa získáme celkovou práci vnitřních sil. Nejedná se však o skutečně vykonanou práci, ale o myšlenou (tedy virtuální) veličinu. Napětí zde vlastně nahrazuje sílu (na jednotkovou plochu) a deformace nahrazuje posun (odpovídá rozdílu posunů vztaženému na jednotkovou vzdálenost bodů, jejichž vzájemný posun zkoumáme). Uvědomte si, že práce je dána jednoduše součinem síly a posunu pouze, pokud je během posunu síla konstantní. Pokud se síla mění, je třeba počítat infinitezimální přírůstky práce, konané okamžitou hodnotou síly na nekonečně malém přírůstku posunu, a ty pak integrovat přes celý deformační proces. Z tohoto důvodu tedy hovoříme o levé straně rovnice (149) jako o virtuální práci vnitřních sil.

Výrazy na pravé straně rovnice (149) upravíme s využitím vztahů $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\bar{\mathbf{b}}$ a $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}$ a celou rovnici přepíšeme jako

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dS \quad (150)$$

Pravou stranu pak interpretujeme jako virtuální práci vnějších sil (objemových a povrchových). Opět jde o myšlenou veličinu, protože ve skutečnosti se objemové a povrchové síly během deformace tělesa zpravidla mění.

Obecný princip virtuálních prací (PVP)

Při odvození rovnic (149)–(150) jsme pod symboly σ a \mathbf{u} chápali skutečné pole napětí a skutečné pole posunů odpovídající jednomu zkoumanému stavu tělesa. Rovnost (150) však platí i v případě, že pole napětí odpovídá jednomu možnému stavu tělesa a pole posunů odpovídá jinému stavu. Pole napětí, které je v rovnováze s jistými objemovými a povrchovými silami, představuje tzv. staticky přípustný stav. Pole posunů a z něj odvozené pole deformace představují tzv. kinematicky přípustný stav. Provedme si ještě jednou kompletní odvození rovnosti virtuálních prací pro všechny staticky přípustné stavy A a kinematicky přípustné stavy B (navzájem zcela nezávislé):

Pro libovolná (dostatečně hladká) tenzorová pole σ^A a \mathbf{u}^B podle Clapeyronovy věty (přímo plynoucí z Gaussovy věty) platí

$$\int_V \sigma^A : \nabla \mathbf{u}^B dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \sigma^A \cdot \mathbf{u}^B dS - \int_V (\nabla \cdot \sigma^A) \cdot \mathbf{u}^B dV \quad (151)$$

Po přidání předpokladů

$$\nabla \cdot \sigma^A + \mathbf{b}^A = \mathbf{0} \quad \text{ve } V \quad (152)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma^A = \mathbf{t}^A \quad \text{na } S \quad (153)$$

$$\varepsilon^B = \nabla_s \mathbf{u}^B \quad \text{ve } V \quad (154)$$

a předpokladu, že tenzor σ^A je symetrický, můžeme identitu (151) přepsat jako

$$\int_V \sigma^A : \varepsilon^B dV = \int_V \mathbf{b}^A \cdot \mathbf{u}^B dV + \int_S \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{u}^B dS \quad (155)$$

a interpretovat jako rovnost virtuální práce vnitřních sil (kterou by napětí stavu A vykonala na deformacích stavu B) a virtuální práce vnějších sil (kterou by vnější síly stavu A vykonaly na posunech stavu B).

Princip virtuálních posunutí (PVP)

Jestliže speciálně zvolíme staticky přípustný stav A jako skutečný a kinematicky přípustný stav B jako virtuální, pak rovnice (155) představuje rovnost práce skutečných napětí na virtuálních deformacích a práce skutečných vnějších sil na virtuálních posunech:

$$\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (156)$$

Pokud navíc zvolíme virtuální posuny $\delta \mathbf{u}$ tak, aby byly nulové na podepřené části hranice S_u , a uvážíme statické okrajové podmínky $\mathbf{n} \cdot \sigma = \bar{\mathbf{t}}$ na S_t , přepíše se (156) jako

$$\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (157)$$

Tato rovnost představuje **slabou formulaci podmínek rovnováhy**. Můžeme ji využít k ověření, že pole napětí σ je v rovnováze s danými objemovými silami $\bar{\mathbf{b}}$ a povrchovými silami $\bar{\mathbf{t}}$.

Princip virtuálních sil (PVs)

Jestliže speciálně zvolíme staticky přípustný stav A jako virtuální a kinematicky přípustný stav B jako skutečný, pak rovnice (155) představuje rovnost práce virtuálních napětí na skutečných deformacích a práce virtuálních vnějších sil na skutečných posunech:

$$\int_V \delta \sigma : \varepsilon dV = \int_V \delta \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (158)$$

Pokud navíc sestrojíme virtuální napětí $\delta \sigma$ tak, aby bylo uvnitř tělesa i na nepodepřené části hranice S_t v rovnováze s nulovými virtuálními vnějšími silami, a uvážíme kinematické okrajové podmínky $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ na S_u , přepíše se (158) jako

$$\int_V \delta \sigma : \varepsilon dV = \int_{S_u} \delta \mathbf{t}_R \cdot \bar{\mathbf{u}} dS \quad (159)$$

kde $\delta \mathbf{t}_R = \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}$ na S_u jsou virtuální reakce. Dokonce lze najít samorovnovážná pole napětí $\delta \boldsymbol{\sigma}$, která jsou v rovnováze s nulovými povrchovými silami na celé hranici tělesa (včetně její podepřené části). Pro taková virtuální napětí pak platí

$$\int_V \delta \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0 \quad (160)$$

Tato rovnost představuje **slabou formulaci podmínek kompatibility**. Můžeme ji využít k ověření, zda pro dané pole deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ existuje pole posunů \mathbf{u} tak, aby platilo $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}_s \mathbf{u}$.

Cvičení 5

5.1 Laméovy rovnice

V doplňujících poznámkách k přednášce najdete přehled základních rovnic pro lineárně pružné těleso podrobené malým deformacím a malým rotacím, mezi které patří rovnice geometrické, materiálové a statické. Spojením těchto rovnic vzniknou známé Laméovy rovnice. Jsou to vlastně podmínky rovnováhy zapsané pomocí pole posunutí.

Napište Laméovy rovnice jednak v kompaktním tenzorovém zápisu (viz přednáška), jednak ve složkovém zápisu. Nejprve pracujte s obecným symbolem pro tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e , resp. jeho složky D_{ijkl}^e , a potom rovnice zjednodušte za předpokladu, že materiál je homogenní (tj. \mathbf{D}_e nezávisí na prostorových souřadnicích) a izotropní. Zápis výsledných rovnic se pokuste co nejvíc zjednodušit. Nejvýhodnější zřejmě je použít reprezentaci tuhosti založenou na Laméových koeficientech, tj. $\mathbf{D}_e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}_S$.

5.2 Greenova věta

Aplikujte Greenovu větu na pravou stranu rovnice

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\nabla}_s \mathbf{u} dV \quad (161)$$

a integrál přes objem tělesa převed'te na integrál přes jeho povrch. Následně vytvořte stopu výrazů na obou stranách (tj. rovnici dvojitě kontrahujte s jednotkovým tenzorem) a interpretujte fyzikální (resp. spíš geometrický) význam výsledné rovnice.

Dále ukažte, že k podobnému výsledku bychom dospěli s využitím principu virtuálních sil, kdybychom virtuální pole napětí volili jako $\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$. Jak by vypadala odpovídající pole virtuálních povrchových a objemových sil? Co bychom pak získali z rovnosti virtuálních prací?

V podobném duchu potom zkuste využít princip virtuálních posunů tak, že virtuální pole deformací zvolíte jako $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}$. Jak by vypadalo odpovídající pole virtuálních posunů? Co bychom získali z rovnosti virtuálních prací?

5.3 Podmínky kompatibility deformací

Jak je zmíněno v podkladech k přednášce, rovnice (12) představuje slabou formulaci podmínek kompatibility. Tyto podmínky souvisejí se skutečností, že počet složek deformací převyšuje počet složek posunů. Pokud bychom zcela libovolně zvolili pole deformace, nebylo by zaručeno, že k němu existuje odpovídající pole posunů, jehož je zvolené pole deformace symetrickým gradientem. Podmínky, které existenci takového pole posunů zaručují, jsou právě podmínky kompatibility.

Zamyslete se nad tím, kolik nezávislých podmínek kompatibility lze sestavit. Pak se je pokuste najít.

Návod: Zapište geometrické rovnice (vztahy mezi deformacemi a posuny) pro složky deformace ε_{11} , ε_{12} a ε_{22} . Na pravé straně se objeví první derivace složek posunů u_1 a u_2 . Pak zkuste každý ze zapsaných vztahů dvakrát derivovat tak, aby členy obsahující třetí derivace složek posunů u_1 a u_2 , které se objeví na pravé straně, měly podobný charakter a bylo možno mezi nimi najít závislost. Při odvození se uplatní věta o vzájemnosti smíšených parciálních derivací.

5.4 Samorovnovážné pole napětí

Ověřte, že lze sestavit nenulové pole napětí, které splňuje podmínky rovnováhy s nulovými vnějšími silami. Pro jednoduchost předpokládejte rovinnou napjatost a pracujte pouze se složkami napětí σ_{11} , $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ a σ_{22} . Rozepište dvě Cauchyho rovnice rovnováhy pro tento případ (s nulovými objemovými silami). Poté ukažte, že jsou tyto rovnice identicky splněny, pokud zvolíme složky napětí ve tvaru

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \quad (162)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \quad (163)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (164)$$

kde $F(x_1, x_2)$ je libovolná (dvakrát spojitě diferencovatelná) funkce.⁸

Kromě rovnováhy s nulovými objemovými silami uvnitř tělesa můžeme také požadovat splnění rovnováhy s nulovými povrchovými silami na jeho hranici. Pro rovinnou oblast ve tvaru obdélníka o stranách a a b (s jedním z vrcholů umístěným do počátku) zvolte funkci F ve tvaru

$$F(x_1, x_2) = c \left(1 - \cos \frac{2\pi x_1}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi x_2}{b} \right) \quad (165)$$

kde c je libovolná konstanta. Odvoďte odpovídající pole napětí a ověřte, že na celé hranici zkoumaného obdélníka jsou splněny homogenní statické okrajové podmínky (tj. rovnováha s nulovými povrchovými silami).

⁸Funkci F sloužící ke konstrukci pole napětí podle vztahů (162)–(164) se říká Airyova funkce napětí.

Přednáška 6

Práce vnitřních sil a potenciální energie pružné deformace

Na přednášce jsme se zběžně seznámili s potenciální energií pružné deformace a její hustotou. Tato energie se ukládá v materiálu při jeho deformaci a je možné ji opět uvolnit při odtížení (je tedy vratná). Jestliže se materiál chová pružně, nedochází při jeho přetváření k disipaci energie. Veškerá vykonaná práce se pak při statickém zatěžování přemění na potenciální energii pružné deformace. Pokud dochází k dynamickým účinkům, část vykonané práce se může přeměnit na kinetickou energii. V následujících úvahách se omezíme na statické procesy s nulovou kinetickou energií.

Z pohledu celého tělesa konají práci vnější síly na posunech svého působíště. Můžeme však také zkoumat elementární dílek tělesa o objemu dV , na který působí okolní dílky, což je popsáno pomocí napětí. V rámci domácího úkolu si ověříte, že práci vykonanou na takovém dílku při změně deformace o $d\epsilon$ lze vyjádřit jako $\sigma : d\epsilon dV$. Práci tedy koná napětí na přírůstcích deformace. Pokud bychom napětí vynásobili celkovou deformací, ϵ , dostali bychom jen fiktivní práci, protože ve skutečnosti se při postupné deformaci mění i napětí podle příslušného konstitutivního vztahu, např. podle Hookeova zákona. Při výpočtu skutečně vykonané práce tedy musíme kumulovat její přírůstky v nekonečně malých časových intervalech a průběžně upravovat hodnotu napětí. Změnu deformace, ke které došlo během časového intervalu dt , lze zapsat jako $d\epsilon = \dot{\epsilon} dt$, kde $\dot{\epsilon}$ je rychlost deformace (tečka označuje derivaci podle času). Abychom vyjádřili práci vykonanou vnitřními silami v celém tělese během časového intervalu $[0, T]$, musíme elementární práci integrovat v čase i prostoru:

$$W_{int} = \int_V \int_0^T \sigma : \dot{\epsilon} dt dV = \int_V \int_0^T \mathcal{P}_{int} dt dV \quad (166)$$

Integruje se zde veličina

$$\mathcal{P}_{int} = \sigma : \dot{\epsilon} \quad (167)$$

kteřá představuje práci vykonanou napětím, vztaženou na jednotku objemu a jednotku času. Jde tedy o hustotu výkonu vnitřních sil. Slovo “hustota” zde označuje veličinu vztaženou na jednotku objemu a “výkon” odpovídá práci za jednotku času.

Jak už bylo řečeno, pro pružný materiál se veškerá práce vykonaná napětím na přírůstcích deformace přemění na potenciální energii pružné deformace. Toto tvrzení představuje zjednodušenou podobu prvního zákona termodynamiky.⁹ Potenciální energie závisí pouze na okamžitém stavu, nikoli na způsobu, jakým se objekt do tohoto stavu dostal. Pro pružné těleso to znamená, že potenciální energie pružné deformace závisí jen na okamžité deformaci a lze sestavit funkci $\mathcal{E}_{int}(\epsilon)$, která popisuje její hustotu. Potenciální energii pružné deformace celého tělesa pak získáme integrací její hustoty:

$$E_{int} = \int_V \mathcal{E}_{int}(\epsilon) dV \quad (168)$$

Abychom hodnotu E_{int} mohli vypočítat, musíme znát rozložení deformace v celém tělese. Potenciální energie pružné deformace tedy závisí na celém poli deformace a z matematického hlediska se jedná o funkcionál, neboli zobrazení, které každé funkci z jistého prostoru funkcí přiřazuje reálné číslo.

Energetickou bilanci lze provést nejen pro celé těleso, ale i pro každý jeho elementární dílek. Zároveň místo konečného časového intervalu můžeme uvažovat nekonečně malý přírůstek času dt . Práce vykonaná napětím na dílku o objemu dV za čas dt je při pružném chování materiálu rovna přírůstku potenciální energie pružné deformace tohoto dílku, což se zapíše jako

$$\sigma : \dot{\epsilon} dt dV = d\mathcal{E}_{int} dV \quad (169)$$

Po vydělení infinitezimálními veličinami dt a dV dostaneme vztah

$$\sigma : \dot{\epsilon} = \dot{\mathcal{E}}_{int} \quad (170)$$

⁹V obecném případě je třeba do bilance energie zahrnout i přenos tepla. Stav pružného materiálu je pak charakterizován deformací a další nezávislou stavovou veličinou, kterou může být teplota, nebo měrná entropie. Při izotermálním procesu je dodaná práce rovna přírůstku Helmholtzovy volné energie, zatímco při izentropickém (adiabatickém) procesu je rovna přírůstku vnitřní energie.

který popisuje rovnost hustoty výkonu vnitřních sil a časové derivace hustoty potenciální energie pružné deformace. Jelikož \mathcal{E}_{int} je primárně funkcí deformace a na čase závisí jen v důsledku proměny deformace, získáme jeho časovou derivaci podle pravidla o derivaci složené funkce:

$$\dot{\mathcal{E}}_{int} = \frac{\partial \mathcal{E}_{int}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (171)$$

Rovnost (170) pak můžeme přepsat jako

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{int}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (172)$$

Tato rovnost musí platit pro libovolný tenzor rychlosti deformace $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Rychlost deformace může být předepsána zcela libovolně (nezávisle na okamžité hodnotě deformace či napětí), nicméně je vždy dána symetrickým tenzorem. Odtud plyne, že symetrická část tenzoru $\boldsymbol{\sigma}$ musí být rovna symetrické části tenzoru $\partial \mathcal{E}_{int} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$. Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je vždy symetrický. Funkční předpis pro \mathcal{E}_{int} můžeme prezentovat tak, aby smykové deformace ε_{ij} a ε_{ji} ($i \neq j$) byly zastoupeny “rovnocenně”. Pak je symetrický i tenzor $\partial \mathcal{E}_{int} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ a z rovnosti (172) plyne

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{E}_{int}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (173)$$

Odvozený vztah (173) vyjadřuje napětí jako funkci deformace a představuje obecný tvar materiálových rovnic pro pružný materiál.¹⁰ Při speciální volbě funkčního předpisu pro \mathcal{E}_{int} tento vztah může být lineární a odpovídat Hookeovu zákonu, ale obecně bude výsledný vztah mezi napětím a deformací nelineární. Jak je ale vidět, ani pro nelineárně pružný materiál nemůže být závislost napětí na deformaci zcela libovolná, ale musí být odvozena (resp. musí být možné ji odvodit) z jisté skalární funkce \mathcal{E}_{int} , která v této souvislosti hraje roli tzv. potenciálu. Takový postup zaručuje, že materiálový model respektuje první zákon termodynamiky (zachování energie).

V souvislosti s pojmem potenciál je dobré připomenout, že v teorii plasticity se používá pojem “plastický potenciál” pro funkci, jejíž derivace podle napětí určuje směr přírůstku plastické deformace (viz nesdružený zákon plastického přetváření, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}$). Podobně jako v rovnici (173) se zde jako potenciál chápe skalární funkce, jejíž gradient vystupuje v jistém vztahu popisujícím tenzorovou veličinu. Dalším příkladem je potenciál gravitačního nebo elektrostatického pole, jehož gradient odpovídá síle působící na částici o jednotkové hmotnosti nebo jednotkovém náboji.

Přehled nových pojmů

Některé z níže uvedených veličin již byly definovány na přednášce nebo v předchozím textu, další k nim přidáváme:

hustota výkonu vnitřních sil	$\mathcal{P}_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$
výkon vnitřních sil	$P_{int} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV$
výkon vnějších sil	$P_{ext} = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS$
hustota potenciální energie pružné deformace	$\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}$ (pro lineárně pružný materiál)
potenciální energie pružné deformace	$E_{int} = \int_V \mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV$
potenciální energie vnějších sil	$E_{ext} = - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS$

Definice potenciální energie vnějších sil v posledním řádku vyžaduje vysvětlení. Uvedený vzorec odpovídá případu, kdy jsou vnější síly pevně předepsané. Nelze jej tedy použít, pokud se vnější síly mění, např. v závislosti na změně tvaru zatíženého tělesa. Všimněte si také, že integrál přes hranici je zde omezen na nepodepřenou část hranice S_t . Proto má $\bar{\mathbf{t}}$ skutečně význam předepsaných povrchových sil. Naproti tomu v definici výkonu vnějších sil P_{ext} se provádí integrace po celé hranici S , protože v případě pohybu

¹⁰V literatuře se pro popis pružného materiálu odvozený z energetického potenciálu používá termín *hyperelasticita* nebo *Greenova elasticita*. Naproti tomu *Cauchyho elasticita* popisuje napětí přímo jako vhodně zvolenou funkci deformace. Tento přístup je sice obecnější, ale pokud pro zvolenou funkci neexistuje potenciál, ze kterého lze vztah mezi napětím a deformací odvodit, není takový model v souladu se zákony termodynamiky. Totéž platí i pro *hypoelasticitu*, která popisuje vztah mezi nekonečně malými přírůstky (nebo rychlostmi) napětí a deformace.

podepřené části konají práci i reakce. Proto povrchové síly označujeme \mathbf{t} . Na volné části hranice S_t platí $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ = předepsané povrchové síly, ale na podepřené části hranice S_u platí $\mathbf{t} = \mathbf{t}_R$ = neznámé reakce.

Přidejme ještě další dva užitečné pojmy. Součet potenciální energie pružné deformace a potenciální energie vnějších sil nazveme celkovou potenciální energií (soustavy těleso + zatížení):

$$E_p = E_{int} + E_{ext} = \int_V \mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS \quad (174)$$

Kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \quad (175)$$

spočítáme integrací výrazu $\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}/2$, který představuje její hustotu. Přitom ρ je objemová hmotnost materiálu, ρdV vyjadřuje hmotnost elementární kostičky o objemu dV a $\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \|\dot{\mathbf{u}}\|^2$ je druhá mocnina velikosti (normy) vektoru rychlosti.

Variace funkcionálu

Připomeňte si, že pod pojmem funkcionál se rozumí zobrazení Π , které každé funkci u z jistého vhodně zvoleného prostoru funkcí \mathcal{U} přiřadí reálné číslo. Příkladem může být třeba funkcionál definovaný předpisem

$$\Pi(u) = \int_0^L u^2 dx \quad (176)$$

Prostor \mathcal{U} je v tomto případě potřeba volit tak, aby pro každý jeho prvek u výše uvedený integrál existoval a měl konečnou hodnotu. Logickou volbou je proto $\mathcal{U} = L_2(0, L)$, kde $L_2(0, L)$ je prostor všech funkcí integrovatelných s kvadrátem v Lebesgueově smyslu na intervalu $(0, L)$. Za \mathcal{U} však můžeme zvolit i jakýkoliv podprostor prostoru $L_2(0, L)$, například vybrat jen ty funkce $u \in L_2$, které splňují podmínku $u(0) = 0$.

Ukažme si, jak je možné matematicky definovat variaci daného funkcionálu Π . Pro dvě dané funkce $u \in \mathcal{U}$ a $\delta u \in \mathcal{U}$ nejprve sestrojíme pomocnou funkci proměnné h , definovanou předpisem

$$F(h) = \Pi(u + h \delta u) \quad (177)$$

Názorně si představíme, že zkoumáme, jak se mění hodnota funkcionálu Π , jestliže vyjdeme ze zvoleného „bodu“ u a vydáme se ve „směru“ δu . Pomocná proměnná udává, „jak daleko“ jsme z výchozího bodu došli. Pro $h = 0$ jsme přímo v bodu u a $F(0)$ odpovídá $\Pi(u)$. Pokud je funkce F v bodu 0 klesající, pak funkcionál Π nemůže pro funkci u nabývat lokálního minima, protože pro dostatečně malé kladné h bude $F(h) < F(0)$ a tedy $\Pi(u + h \delta u) < \Pi(u)$. Ovšem i v případě, že funkce F je v bodu 0 rostoucí, by nemohlo jít o minimum, protože by platilo $F(h) < F(0)$ pro dostatečně malé záporné hodnoty h . Pokud tedy má funkcionál nabývat pro funkci u minima, musí být derivace funkce F v bodě $h = 0$ rovna nule, a to pro libovolnou volbu funkce δu .

Při zápisu pomocné funkce $F(h) = \Pi(u + h \delta u)$ jsme pro jednoduchost považovali funkce u a δu za pevně dané, ale takovou funkci můžeme sestrojit pro různé kombinace u a δu . **První variací** funkcionálu Π nazýváme funkcionál $\delta \Pi$, který libovolným dvěma funkcím $u \in \mathcal{U}$ a $\delta u \in \mathcal{U}$ přiřadí první derivaci pomocné funkce $F(h) = \Pi(u + h \delta u)$ v bodě $h = 0$. Můžeme tedy psát

$$\delta \Pi(u, \delta u) = F'(0) = \left. \frac{dF}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pi(u + h \delta u) - \Pi(u)}{h} \quad (178)$$

V posledním výrazu na pravé straně jsme opustili pomocnou funkci F a zapsali první variaci přímo pomocí původního funkcionálu Π a funkcí u a δu . V matematické literatuře se výrazem tohoto typu definuje tzv. Gateauxův diferenciál nebo **Gateauxova derivace**. Tento pojem má širší význam než variace funkcionálu, protože jej lze zavést i pro zobrazení, jejichž oborem hodnot není přímo množina reálných čísel, ale obecně jakýkoliv Banachův prostor (úplný normovaný vektorový prostor).

Obdobně můžeme definovat i **druhou variaci** $\delta^2 \Pi$ jako druhou derivaci pomocné funkce F v bodě $h = 0$:

$$\delta^2 \Pi(u, \delta u) = F''(0) = \left. \frac{d^2 F}{dh^2} \right|_{h=0} \quad (179)$$

V tomto případě už by byl přepis pomocí původního funkcionálu Π zbytečně složitý, protože bychom museli použít dvojnásobnou limitu.

Předvedme si odvození první a druhé variace pro funkcionál definovaný předpisem (176). V tomto případě dostáváme

$$\begin{aligned} F(h) &= \Pi(u + h \delta u) = \int_0^L (u + h \delta u)^2 dx = \int_0^L (u^2 + 2hu \delta u + h^2 \delta u^2) dx = \\ &= \int_0^L u^2 dx + 2h \int_0^L u \delta u dx + h^2 \int_0^L \delta u^2 dx \end{aligned} \quad (180)$$

$$F'(h) = 2 \int_0^L u \delta u dx + 2h \int_0^L \delta u^2 dx \quad (181)$$

$$F''(h) = 2 \int_0^L \delta u^2 dx \quad (182)$$

$$F'(0) = 2 \int_0^L u \delta u dx \quad (183)$$

$$F''(0) = 2 \int_0^L \delta u^2 dx \quad (184)$$

První variací je tedy funkcionál

$$\delta \Pi(u, \delta u) = 2 \int_0^L u \delta u dx \quad (185)$$

a druhou variací je funkcionál

$$\delta^2 \Pi(u, \delta u) = 2 \int_0^L \delta u^2 dx \quad (186)$$

Možná vás zarazí, že druhá variace v tomto případě nezávisí na u , ale jen na δu . Je to způsobeno tím, že původní funkcionál byl kvadratický. Podobně jako druhá derivace kvadratické funkce je konstanta, je druhá variace kvadratického funkcionálu nezávislá na tom, ve kterém „bodu“ prostoru funkcí ji sestrojíme. V obecném případě $\delta^2 \Pi$ může záviset na u i δu .

Jak bylo výše naznačeno, funkcionál Π může nabývat lokálního minima pro jistou funkci u pouze v případě, že jeho první variace vymizí pro všechna δu . Podmínka

$$\delta \Pi(u, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{U} \quad (187)$$

je analogická podmínce nulových prvních derivací pro funkci více proměnných a nazýváme ji **podmínkou stacionarity**. Pokud je navíc druhá variace kladná pro libovolné nenulové δu , můžeme s jistotou říci, že se jedná o ostré lokální minimum. Tuto podmínku můžeme zapsat jako

$$\delta^2 \Pi(u, \delta u) > 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{U} \setminus \{0\} \quad (188)$$

kde $\mathcal{U} \setminus \{0\}$ je prostor \mathcal{U} bez nulového prvku (identicky nulové funkce).

Výše uvedená podmínka (188) je názorná pro inženýra, ale z matematického hlediska není postačující. Abychom mohli mluvit o **lokálním** minimu, musíme v prostoru \mathcal{U} definovat vzdálenost mezi jeho prvky, kterými jsou ovšem funkce. To se nejlépe udělá pomocí vhodně zvolené normy. V prostoru L_2 je norma definována předpisem

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^L u^2 dx} \quad (189)$$

Místo podmínky (188) by měla být splněna přísnější podmínka, vyžadující existenci takové konstanty $C > 0$, pro kterou platí

$$\delta^2 \Pi(u, \delta u) \geq C \|\delta u\|^2 \quad \forall \delta u \in \mathcal{U} \quad (190)$$

Cvičení 6

6.1 Práce vnitřních sil

Při úvahách o potenciální energii deformace jsme využili toho, že práce, kterou vykoná napětí σ na elementárním dílku o objemu dV při změně jeho deformace o $d\epsilon$ je dána výrazem $\sigma : d\epsilon dV$. Rozepište výraz $\sigma : d\epsilon$ po složkách v tenzorovém zápisu a pak jej přepište v inženýrském zápisu. Zdůvodněte, proč jde o vykonanou práci na jednotku objemu. Přitom si představte elementární kvádr o délkách hran dx , dy a dz , na který působí na jeho stěnách elementární síly odvozené z daných složek napětí. Například kolmo na protilehlé stěny s normálou x působí síla $\sigma_x dy dz$, orientovaná souhlasně s kladnou poloosou x na stěně s kladnou vnější normálou a opačně na protější stěně se zápornou vnější normálou. Při deformaci tyto síly konají práci na posunech u ve směru osy x a výsledný příspěvek k elementární práci je součinem síly $\sigma_x dy dz$ a vzájemného posunu $u(x_0 + dx/2, y_0, z_0) - u(x_0 - dx/2, y_0, z_0) = (\partial u(x_0, y_0, z_0)/\partial x) dx$, kde (x_0, y_0, z_0) jsou souřadnice bodu uprostřed elementárního kvádru. Podobně vyjádřete příspěvky dalších složek napětí, sečtěte a upravte.

Pokud vám na tomto odvození připadá něco podezřelého, neváhejte své pochybnosti popsat.

6.2 Výpočet variace funkcionálu

Sestrojte první a druhou variaci následujících funkcionálů:

$$\Pi_1(u) = \int_0^L gu \, dx \quad (191)$$

$$\Pi_2(u) = \int_0^L u^3 \, dx \quad (192)$$

$$\Pi_3(u) = \int_0^L (u'')^2 \, dx \quad (193)$$

$$\Pi_4(u) = \int_0^L \sin u \, dx \quad (194)$$

$$\Pi_5(u) = u(L/2) \quad (195)$$

Přitom g značí danou funkci proměnné x , místo $(u'')^2$ se pro jednoduchost může psát jen u''^2 a v definici Π_5 je na pravé straně hodnota funkce u v bodě $x = L/2$.

Zkuste vymyslet obecné pravidlo pro výpočet první variace funkcionálu, který má tvar

$$\Pi(u) = \int_0^L G(x, u, u', u'') \, dx \quad (196)$$

kde G je daná spojitě diferencovatelná funkce čtyř reálných proměnných.

Sestrojte první a druhou variaci následujících funkcionálů:

$$\Pi_6(\mathbf{u}) = \int_V \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{u} \, dS \quad (197)$$

$$\Pi_7(\mathbf{u}) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \quad (198)$$

$$\Pi_8(\mathbf{u}) = \int_V \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, dV \quad (199)$$

$$\Pi_9(\mathbf{u}) = \int_V \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A} : \nabla \mathbf{u} \, dV \quad (200)$$

Přitom \mathbf{g} a \mathbf{h} jsou daná vektorová pole a \mathbf{A} je dané tenzorové pole 2. řádu.

6.3 Vlastnosti variace funkcionálu

Zamyslete se nad tím, zda obecně platí následující tvrzení:

- Jestliže funkcionál Π je součtem funkcionálů Π_1 a Π_2 , neboli $\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_1(\mathbf{u}) + \Pi_2(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, pak pro jeho variaci platí $\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \delta\Pi_1(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \delta\Pi_2(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$.

- Jestliže funkcionál Π je α -násobkem funkcionálu Π_1 , neboli $\Pi(\mathbf{u}) = \alpha\Pi_1(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, pak pro jeho variaci platí $\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \alpha\delta\Pi_1(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$.
- Jestliže je funkcionál Π lineární, neboli $\Pi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{u}) + \Pi(\mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a zároveň $\Pi(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\Pi(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a $\alpha \in R$, pak je jeho variace ... (vhodně doplňte).
- Pro každý funkcionál Π je jeho první variace lineární funkcionál vzhledem k $\delta\mathbf{u}$, neboli platí $\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}_1 + \delta\mathbf{u}_2) = \delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}_1) + \delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}_2)$ pro každé $\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}_1, \delta\mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$ a zároveň $\delta\Pi(\mathbf{u}, \alpha\delta\mathbf{u}) = \alpha\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a $\alpha \in R$.

Přednáška 7

Princip minima potenciální energie pro pružné těleso

Již na minulé přednášce jsme si vysvětlili, že potenciální energie E_p systému složeného z pružného tělesa a jeho zatížení je součtem potenciální energie pružné deformace E_{int} a potenciální energie zatížení E_{ext} . Jestliže v jistém stavu nabývá potenciální energie E_p stacionární hodnoty, je tento stav rovnovážný. Pokud jde navíc o ostré minimum potenciální energie, je rovnováha stabilní.

Výraz pro potenciální energie soustavy skládající se z pružného tělesa a jeho zatížení se skládá ze dvou příspěvků, z nichž jeden závisí na poli deformace a druhý na poli posunů. Tato pole ale nejsou nezávislá a pole deformace lze přímo vyjádřit z pole posunů (naopak by to šlo udělat pouze, pokud by bylo zadáno kompatibilní pole deformace). Proto můžeme potenciální energii považovat za funkcionál závislý na poli posunů a zapsat ji pro lineární pružné těleso jako

$$E_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \mathbf{u} dV - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS \quad (201)$$

Aby bylo možné první integrál v (201) vyhodnotit, musí být uvažované pole posunů dostatečně hladké. Například pokud by bylo nespojité, vedlo by to k singularitě v poli deformací a odpovídající potenciální energie by neměla konečnou hodnotu. Dá se ukázat, že všechny integrály v (201) mají konečnou hodnotu pro takové vektorové funkce \mathbf{u} vektorové proměnné \mathbf{x} , které mají na oblasti V zobecněné derivace integrovatelné s kvadrátem v Lebesgueově smyslu. V matematické literatuře se prostor skalárních funkcí, které mají na oblasti V zobecněné derivace až do řádu n integrovatelné s kvadrátem v Lebesgueově smyslu označuje jako $H_n(V)$. Jednotlivé složky pole posunů u_i , $i = 1, 2, 3$, musejí patřit do prostoru $H_1(V)$, takže celé pole posunů patří do kartézského součinu $H_1(V) \times H_1(V) \times H_1(V)$, který označíme $H_1^3(V)$. Navíc je při minimalizaci potenciální energie potřeba brát v úvahu pouze takové kinematické stavy, které respektují předepsané vazby, neboli taková pole posunů, která splňují geometrické okrajové podmínky $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ na podepřené části hranice, S_u . Pro další použití tedy zavedeme množiny funkcí

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in H_1^3(V) \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ na } S_u\} \quad (202)$$

$$\mathcal{U}_0 = \{\mathbf{u} \in H_1^3(V) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } S_u\} \quad (203)$$

Množina \mathcal{U}_0 má charakter vektorového prostoru, protože součet dvou funkcí patřících do \mathcal{U}_0 je opět prvkem \mathcal{U}_0 a stejně tak libovolný skalární násobek funkce z \mathcal{U}_0 patří do \mathcal{U}_0 . Pro množinu \mathcal{U} takové tvrzení platí pouze, pokud jsou předepsané okrajové podmínky homogenní, tj. pokud $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Pro obecné nehomogenní okrajové podmínky to vektorový prostor není, ale přesto budeme někdy poněkud nepřesně mluvit o prostoru \mathcal{U} . Samozřejmě pokud je $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, prostory \mathcal{U} a \mathcal{U}_0 splývají. Obecně hledáme pole posunů v “prostoru” \mathcal{U} , zatímco z prostoru \mathcal{U}_0 bereme variace pole posunů, chápané jako možné změny $\delta \mathbf{u}$, které lze přidat k vyšetřovanému konkrétnímu poli $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tak, aby modifikované pole $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ patřilo do \mathcal{U} .

Dále jsme zkoumali, za jakých podmínek nabývá pro jistou funkci¹¹ $\tilde{\mathbf{u}}$ tento funkcionál minima v prostoru všech funkcí splňujících kinematické okrajové podmínky $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ na S_u . Při vyšetřování podmínek minima je třeba zjistit, jak se změní hodnota E_p , jestliže posuny $\tilde{\mathbf{u}}$ změníme o $\delta \mathbf{u}$. Jelikož i po této změně mají být splněny okrajové podmínky na S_u , musíme $\delta \mathbf{u}$ volit na S_u jako nulové, ale jinak je libovolné (přesněji řečeno opět požadujeme existenci zobecněných derivací integrovatelných s kvadrátem). Po poněkud zdoluhavých, ale jinak jednoduchých úpravách jsme dospěli k vyjádření přírůstku potenciální energie ve tvaru¹²

$$E_p(\tilde{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}) - E_p(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_V \nabla_s \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u} dV + \frac{1}{2} \int_V \nabla_s \delta \mathbf{u} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u} dV - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (204)$$

¹¹Na přednášce jsme psali \mathbf{u} , ale je dobré vlnkou odlišit konkrétní funkci $\tilde{\mathbf{u}}$, pro kterou minimum nastává, od obecného pole posunů \mathbf{u} .

¹²V některých krocích odvození jsme vynechávali index s u symbolu ∇ , tj. pracovali jsme s gradientem posunů místo jeho symetrické části. Vzhledem k malé symetrii tenzoru tuhosti \mathbf{D}_e jsou kvadratické výrazy typu $\nabla_s \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u}$ a $\nabla \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}_e : \nabla \delta \mathbf{u}$ zcela ekvivalentní.

Výraz na pravé straně (204) obsahuje členy, které na změně posunů $\delta \mathbf{u}$ závisí lineárně, a členy, které na ní závisí kvadraticky. Není náhodou, že lineární část přírůstku odpovídá první variaci

$$\delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) = \int_V \nabla_s \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u} dV - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (205)$$

a kvadratická část přírůstku (až na faktor 1/2) odpovídá druhé variaci

$$\delta^2 E_p(\delta \mathbf{u}) = \int_V \nabla_s \delta \mathbf{u} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u} dV \quad (206)$$

Všimněte si, že se v obou případech opět jedná o funkcionály, neboť funkci přiřazují číslo. První variace δE_p závisí nejen na uvažovaném poli posunů $\tilde{\mathbf{u}}$, ale také na jeho změně $\delta \mathbf{u}$, které v této souvislosti říkáme *variace posunů*. Již víme, že pro pevně zvolené $\tilde{\mathbf{u}}$ se δE_p chová jako lineární forma argumentu $\delta \mathbf{u}$. Platí totiž

$$\delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_2) = \delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}_1) + \delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}_2) \quad (207)$$

$$\delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \alpha \delta \mathbf{u}) = \alpha \delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) \quad (208)$$

což lze snadno ověřit dosazením podle (205). Podobně druhá variace $\delta^2 E_p$ se chová jako kvadratická forma. Podle (206) druhá variace závisí pouze na $\delta \mathbf{u}$, což souvisí s tím, že výchozí funkcionál E_p byl kvadratický (jak víme, v obecném případě může druhá variace záviset i na $\tilde{\mathbf{u}}$).

Na základě (205) a (206) můžeme přírůstek potenciální energie popsany vztahem (204) přepsat jako součet první variace a druhé variace dělené dvěma:

$$E_p(\tilde{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}) - E_p(\tilde{\mathbf{u}}) = \delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \delta^2 E_p(\delta \mathbf{u}) \quad (209)$$

Zkoumáme nyní podmínky, za kterých je přírůstek $E_p(\tilde{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}) - E_p(\tilde{\mathbf{u}})$ kladný pro každou nenulovou variaci posunů $\delta \mathbf{u}$, takže funkcionál potenciální energie E_p nabývá pro pole posunů $\tilde{\mathbf{u}}$ ostrého minima. Představte si, že by pro jistou variaci posunů $\delta \mathbf{u}$ měla první variace potenciální energie δE_p zápornou hodnotu. Z této skutečnosti zatím neplyne, že celý přírůstek potenciální energie je záporný, protože ten se skládá ze součtu první a poloviny druhé variace. Nicméně pokud uvažovanou variaci posunů vynásobíme obecným skalárem α , můžeme výsledný přírůstek potenciální energie napsat jako

$$E_p(\tilde{\mathbf{u}} + \alpha \delta \mathbf{u}) - E_p(\tilde{\mathbf{u}}) = \delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \alpha \delta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \delta^2 E_p(\alpha \delta \mathbf{u}) = \alpha \delta E_p(\tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + \alpha^2 \frac{1}{2} \delta^2 E_p(\delta \mathbf{u}) \quad (210)$$

Zde jsme právě využili toho, že první variace se chová jako lineární forma a druhá jako kvadratická forma. Skalární násobitel α můžeme zvolit kladný, ale tak malý, aby kvadratická část výrazu na pravé straně (210) byla zanedbatelná oproti lineární a výsledná hodnota tedy byla záporná. Vidíme tedy, že má-li být splněna podmínka minima, nesmí první variace pro žádné $\delta \mathbf{u}$ nabývat záporné hodnoty. To však znamená, že musí být identicky nulová, protože kdyby pro některé $\delta \mathbf{u}$ nabývala kladné hodnoty, pak pro $-\delta \mathbf{u}$ by nabývala záporné hodnoty a podmínka by nebyla splněna. Touto úvahou jsme dospěli k dílčímu závěru, že **nutnou podmínkou minima funkcionálu E_p je nulová hodnota jeho první variace pro každé $\delta \mathbf{u}$** (splňující okrajovou podmínku $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ na S_u). Toto je podmínka stacionarity, která je obdobou podmínky nulových prvních derivací při hledání minima funkce.

Jestliže je první variace funkcionálu skutečně identicky nulová, pak o přírůstku jeho hodnoty rozhoduje **druhá variace** a ta **musí nabývat kladné hodnoty pro každé nenulové $\delta \mathbf{u}$** (opět splňující zmíněnou okrajovou podmínku). Toto je obdoba podmínky kladné druhé derivace pro funkci jedné proměnné a pozitivní definitnosti matice druhých derivací v případě funkce více proměnných.

Podmínku nulové první variace můžeme v uvažovaném případě přepsat jako rovnici

$$\int_V \nabla_s \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u} dV = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } S_u \quad (211)$$

kteřá má být splněna pro každé $\delta \mathbf{u}$ splňující homogenní geometrické okrajové podmínky. V této rovnici poznáváme princip virtuálních posunů, který (jak víme) představuje slabou formulaci podmínek rovnováhy. Variaci posunů $\delta \mathbf{u}$ interpretujeme jako virtuální pole posunů a výraz $\nabla_s \delta \mathbf{u}$ pak představuje odpovídající virtuální pole deformace $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$. Součin $\nabla_s \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}_e$ odpovídá napětí vypočtenému ze skutečného pole posunů $\tilde{\mathbf{u}}$ s využitím geometrických rovnic a Hookeova zákona.

Podmínku kladné druhé variace můžeme zapsat jako

$$\int_V \nabla_s \delta \mathbf{u} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \delta \mathbf{u} dV > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (212)$$

Jestliže je tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e pozitivně definitní, platí

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}_e : \delta \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0} \quad (213)$$

a po integraci kladného výrazu dostaneme samozřejmě kladný výsledek. Musíme ale dát pozor, aby se nemohlo stát, že pro některé přípustné nenulové $\delta \mathbf{u}$ je $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ nulové na celé oblasti V . Jinými slovy, nesmí existovat nenulové pole posunů, které má nulové hodnoty na podepřené části hranice a odpovídají mu identicky nulové deformace v celém tělese. Kdyby takové pole existovalo, znamenalo by to, že dané těleso se může pohybovat jako mechanismus, aniž by se deformovalo. Při takovém pohybu by potenciální energie deformace zůstávala nulová, ale vnější síly by mohly konat práci a jejich potenciální energie by se zmenšovala, teoreticky bez jakéhokoli omezení. Funkcionál potenciální energie by nebyl zdola omezen a jeho minimum by neexistovalo.

Cvičení 7

7.1 Princip minima potenciální energie pro nelineárně pružné těleso

Připomeňte si, že v obecném případě (nelineárně) pružného tělesa je potenciální energie pružné deformace dána výrazem

$$E_{int} = \int_V \mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (214)$$

kde \mathcal{E}_{int} je hustota potenciální energie pružné deformace, uvažovaná zde jako funkce tenzoru malé deformace. Výraz pro potenciální energii vnějších sil,

$$E_{ext} = - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS \quad (215)$$

zůstává beze změny.

Odvoďte výraz pro první variaci funkcionálu potenciální energie pro nelineárně pružné těleso, запиšte podmínku stacionarity tohoto funkcionálu a její vhodnou úpravou dospějte k odpovídající diferenciální rovnici a okrajovým podmínkám, které lze odvodit z principu minima.

Dále odvoďte výraz pro druhou variaci a zjistěte, za jakých podmínek je nezáporná pro každou nenulovou geometricky přípustnou variaci posunů.

Přednáška 8

Castiglianův variační princip

V poslední době jsme se podrobně zabývali **Lagrangeovým principem**, tedy principem **minima potenciální energie**, který lze motivovat přirozenými fyzikálními úvahami a každodenní zkušeností. Slovně lze Lagrangeův princip formulovat takto: **Ze všech kinematically přípustných stavů nastane ten, který minimalizuje potenciální energii systému.** Přitom “kinematically přípustným stavem” rozumíme stav přemístění a z něj odvozené deformace, který splňuje geometrické okrajové podmínky na podepřené části hranice. Obecná podoba Lagrangeova principu je univerzální, jeho konkrétní zápis pro jednotlivé typy modelů (trojrozměrné kontinuum, tažený prut, ohýbaný prut, diskrétní soustavu, atd.) se liší pouze tím, jak se vyjádří potenciální energie a okrajové podmínky odpovídající vazbám.

Nyní se budeme věnovat jinému, ale příbuznému principu, který je v jistém smyslu duální k Lagrangeovu principu. Jedná se o **Castiglianův princip minima doplňkové energie**, který lze slovně formulovat takto: **Ze všech staticky přípustných stavů nastane ten, který minimalizuje doplňkovou energii systému.** Jde také o jeden z univerzálních principů mechaniky, který lze aplikovat na nejrůznější mechanické modely.

Pojem “doplňková energie” není zcela běžný a motivace pro jeho zavedení byla vysvětlena na přednášce. Cílem bylo najít takový funkcionál, jehož podmínka stacionarity bude odpovídat rovnosti virtuálních prací konaných virtuálními silovými veličinami na skutečných geometrických veličinách. Pomocí logických úvah jsme pro **lineárně pružné těleso** dospěli k funkcionálu doplňkové energie

$$E_p^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS \quad (216)$$

První integrál představuje tzv. doplňkovou energii vnitřních sil, druhý doplňkovou energii vnějších sil (v tomto případě reakcí $\mathbf{t}_R \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$). Připomeňte si, že \mathbf{C}_e je tenzor pružné poddajnosti (tedy inverzní tenzor k tenzoru pružné tuhosti \mathbf{D}_e), S_u je podepřená část hranice, \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k hranici a $\bar{\mathbf{u}}$ jsou posuny předepsané na S_u (obvykle nulové, s výjimkou případů, kdy dojde k přemístění podpor). Minimum funkcionálu E_p^* se hledá v prostoru (přesněji řečeno lineární varietě) všech rovnovážných polí napětí, tj. na množině všech polí $\boldsymbol{\sigma}$ splňujících podmínky

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{ve } V \quad (217)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{na } S_t \quad (218)$$

Množinu všech takových polí napětí označíme symbolem \mathcal{S} , zatímco \mathcal{S}_0 bude označovat prostor všech samorovnovážných polí napětí, tj. těch, která splňují podmínky rovnováhy s nulovými objemovými silami a nulovými povrchovými silami na části hranice S_t .

Funkcionál (216) je kvadratický a jeho první a druhou variaci vyjádříme snadno jako

$$\delta E_p^*(\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS \quad (219)$$

$$\delta^2 E_p^*(\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \delta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \delta \boldsymbol{\sigma} dV \quad (220)$$

Z podmínky $\delta E_p^*(\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\sigma}) = 0$ ovšem tentokrát nemůžeme vyvodit, že $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e = \mathbf{0}$, protože tato podmínka musí být nutně splněna pouze pro $\delta \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_0$, tedy pro samorovnovážná pole $\delta \boldsymbol{\sigma}$, nikoli pro zcela libovolná pole. Podmínka $\delta E_p^*(\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\sigma}) = 0$ je slabou formou podmínky kompatibility pro deformace vypočtené z napětí. Obecně je obtížné ji převést na diferenciální rovnici, protože do hry vstupují také předepsané posuny na hranici. Aplikace v rámci teorie prutů bude předvedena v domácím úkolu.

Platnost Castiglianova principu lze rozšířit i na obecné **nelineárně pružné těleso**. Funkcionál doplňkové energie má v tomto případě zobecněnou podobu

$$E_p^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_V \mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma}) dV - \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS \quad (221)$$

kde \mathcal{E}_{int}^* je hustota doplňkové energie vnitřních sil (někdy se mluví o doplňkové energii napětí). Tuto veličinu lze chápat jako integrovanou podobu doplňkové práce, jejíž elementární přírůstek je dán součinem $d\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$,

kde $d\boldsymbol{\sigma}$ je přírůstek tenzoru napětí a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor deformace. Má tedy platit $d\mathcal{E}_{int}^* = d\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$, což lze přepsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (222)$$

Vztah (222) představuje inverzní podobu materiálového zákona, neboli předpis, jak vypočítat deformaci z napětí. Veličina \mathcal{E}_{int}^* zde hraje roli potenciálu. Pokud tento potenciál zvolíme v kvadratickém tvaru

$$\mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} \quad (223)$$

pak bude vztah mezi deformací a napětím lineární a rovnice (222) bude mít podobu inverzního Hookeova zákona

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} \quad (224)$$

Legendrova transformace

Jak už jsme vysvětlili dříve, materiálové rovnice pro pružný (hyperelastický) materiál můžeme zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (225)$$

kde \mathcal{E}_{int} je hustota potenciální energie pružné deformace, tj. energie vratným způsobem uložená v deformaci materiálu, vztažená na jednotku objemu. Zároveň lze stejný materiálový zákon zapsat v inverzní podobě (222). Je jasné, že mezi potenciály \mathcal{E}_{int} a \mathcal{E}_{int}^* musí být úzká souvislost. Jak jsme ukázali na přednášce, tuto souvislost lze popsat Legendrovou transformací, na jejímž základě lze ze znalosti jednoho z těchto potenciálů odvodit ten druhý:

$$\mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \max_{\boldsymbol{\varepsilon}} [\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon})] \quad (226)$$

$$\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \max_{\boldsymbol{\sigma}} [\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma})] \quad (227)$$

Maximum je určeno jednoznačně, pokud je výchozí potenciál ryze konvexní. Legendrova transformace pak vede k duálnímu potenciálu, který je také ryze konvexní.

Cvičení 8

8.1 Pozitivní definitnost tenzoru pružné tuhosti

Ukažte, že kvadratický potenciál $\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}/2$ je ryze konvexní právě tehdy, když je tenzor pružné tuhosti \mathbf{D}_e pozitivně definitní.

Dále uvažujte tenzor pružné tuhosti odpovídající izotropnímu materiálu. Rozepište podmínku jeho pozitivní definitnosti a zjistěte, k jakým podmínkám pro pružné konstanty vede. Uvažte přitom všechny dříve zmíněné kombinace pružných konstant, tedy E a ν , K a G , nebo Laméovy konstanty.

8.2 Legendrova transformace

Na přednášce jsme ukázali, že Legendrovou transformací kvadratického potenciálu $\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}/2$ dostaneme kvadratický potenciál $\mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}_e^{-1} : \boldsymbol{\sigma}/2$.

Dále pracujte s jednoosou napjatostí a prozkoumejte, jaký materiálový zákon vznikne, pokud sestrojíme hyperelastický model založený na potenciálu $\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = c|\boldsymbol{\varepsilon}|^n$, kde c je daný parametr o rozměru Nm^{-2} a n je daný bezrozměrný parametr. Sestrojte odpovídající vztah pro výpočet napětí z dané deformace. Poté proveďte Legendrovu transformaci, sestrojte duální potenciál $\mathcal{E}_{int}^*(\boldsymbol{\sigma})$ a z něj pak odvoďte vztah pro výpočet deformace z daného napětí. Porovnejte se vztahem, který by vznikl přímou inverzí vztahu pro výpočet napětí z dané deformace. Určete také, pro jaké hodnoty parametrů jsou uvažované potenciály konvexní a jaké to má důsledky pro vztah mezi napětím a deformací.

8.3 Využití Castiglianova principu při analýze nosníku

Na přednášce jsme zmínili, že Castiglianův princip lze využít při analýze prutových konstrukcí a souvisí se silovou metodou. Předvedme to na jednoduchém příkladu nosníku o rozpětí L , který je vlevo vetknutý a vpravo prostě podepřený. Nosník je příčně zatížen daným spojitým zatížením o intenzitě $f(x)$. Pro konkrétnost uvažujme lineárně proměnné zatížení, $f(x) = a + bx$, kde a a b jsou dané konstanty.

Staticky přípustný stav nosníku je dán takovým rozložením ohybových momentů $M(x)$, které splňuje statickou rovnici

$$M''(x) = -f(x) \quad (228)$$

a statickou okrajovou podmínku

$$M(L) = 0 \quad (229)$$

Mezi všemi funkcemi $M(x)$ splňujícími tyto podmínky je skutečným rozložením ohybových momentů ta, která minimalizuje Castiglianův funkcionál doplňkové energie. Zkuste vysvětlit, proč je tento funkcionál dán výrazem

$$E_p^*(M) = \int_0^L \frac{M^2(x)}{EI(x)} dx \quad (230)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a I je moment setrvačnosti průřezu. (Návod: vyjděte z rozložení normálového napětí daného předpisem $\sigma(x, z) = M(x)z/I$ a z definice hustoty doplňkové energie pro lineárně pružný materiál.)

V dalším kroku pak charakterizujte obecné řešení úlohy (13)–(14) pro konkrétní zatížení $f(x) = a + bx$. Toto řešení lze parametrizovat jednou veličinou, která pak bude hrát roli základní neznámé. Doplňkovou energii vyjádřete jako funkci této neznámé a najděte její minimum. Pokuste se o fyzikální interpretaci tohoto postupu (tj. zamyslete se nad názorným významem zvolené základní neznámé a příslušné rovnice, vzniklé jako podmínka nulové derivace).

Přednáška 10

Podmínky stacionarity Hellingerova-Reissnerova funkcionálu

Na přednášce jsme ukázali, že při vyšetřování minima Castiglianova funkcionálu při respektování statických rovnic a statických okrajových podmínek můžeme využít techniku Lagrangeových multiplikátorů, což motivuje zavedení funkcionálu¹³

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS + \int_V \boldsymbol{\lambda} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}) dV + \int_{S_t} \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) dS \quad (231)$$

který jsme pak s využitím Gaussovy věty upravili do tvaru

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\lambda} dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\lambda} dV + \int_V \boldsymbol{\lambda} \cdot \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_t} \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) dS \quad (232)$$

Odvodili jsme podmínky stacionarity tohoto funkcionálu a na jejich základě identifikovali názorný význam Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$ a $\boldsymbol{\mu}$. Ukázali jsme, že multiplikátory $\boldsymbol{\lambda}$ odpovídají poli posunů uvnitř tělesa a multiplikátory $\boldsymbol{\mu}$ odpovídají záporně vzatým posunům na volné části hranice. Položili jsme proto $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$ a $\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{u}$ a sestrojili upravený funkcionál

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) &= -\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, -\mathbf{u}) = \\ &= \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u} dV - \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dS - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (233)$$

Souvislost Hellingerova-Reissnerova principu s Lagrangeovým principem

Pokud volíme pole posunů tak, aby splňovalo geometrické okrajové podmínky $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ na části hranice S_u , pak se funkcionál (233) zjednoduší na

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma}) dV - \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS \quad (234)$$

Pokud zvolíme pole napětí ve tvaru $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \nabla_s \mathbf{u}$ a dosadíme do (234), vznikne Lagrangeův funkcionál potenciální energie. Jinými slovy, platí

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{D}_e : \nabla_s \mathbf{u}) = E_p(\mathbf{u}) \quad (235)$$

To nás inspirovalo k myšlence, že Hellingerův-Reissnerův princip úzce souvisí s Lagrangeovým principem, což lze vysvětlit na základě Legendreovy transformace

$$\max_{\boldsymbol{\sigma}} \left[\boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} \right] = \frac{1}{2} \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \mathbf{u} \quad (236)$$

ve které na levé straně považujeme $\nabla_s \mathbf{u}$ za pevně dané a maximalizujeme vzhledem k $\boldsymbol{\sigma}$. Integrací vztahu (236) přes objem tělesa získáme na pravé straně potenciální energii deformace a na levé straně výsledek velice podobný prvnímu integrálu v rovnici (234), až na přítomnost symbolu “max”. To nás přivádí k ještě hlubšímu pochopení souvislosti mezi Lagrangeovým a Hellingerovým-Reissnerovým principem.

Podle Lagrangeova principu se minimalizuje funkcionál celkové potenciální energie

$$E_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{D}_e : \nabla_s \mathbf{u} dV + E_{ext}(\mathbf{u}) \quad (237)$$

¹³Na přednášce jsme pracovali s obecnější variantou nelineárně pružného (hyperelastického) chování materiálu, ale zde pro jednoduchost používáme hustotu doplňkové energie v kvadratické podobě, která odpovídá lineární pružnosti.

Hledání minima celkové potenciální energie můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{u}} E_p(\mathbf{u}) &= \min_{\mathbf{u}} \left[\int_V \max_{\boldsymbol{\sigma}} \left(\boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} \right) dV + E_{ext}(\mathbf{u}) \right] = \\ &= \min_{\mathbf{u}} \max_{\boldsymbol{\sigma}} \left[\int_V \left(\boldsymbol{\sigma} : \nabla_s \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\sigma} \right) dV + E_{ext}(\mathbf{u}) \right] = \min_{\mathbf{u}} \max_{\boldsymbol{\sigma}} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})\end{aligned}\quad (238)$$

Tím se znovu potvrzuje, že Hellingerův-Reissnerův princip není principem minima, ale principem “minimaxu”, tedy stacionárního bodu, ve kterém je příslušný funkcionál vzhledem k napětí maximalizován a vzhledem k posunutím minimalizován, podobně jako je tomu v horském sedle. Pokud pro pevně zvolené pole posunutí \mathbf{u} nejprve maximalizujeme $\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ vzhledem k $\boldsymbol{\sigma}$, získáme vlastně odpovídající potenciální energii $E_p(\mathbf{u})$, a její minimalizací pak najdeme skutečné pole posunutí. Při “přesném řešení” tedy uplatněním Lagrangeova a Hellingerova-Reissnerova principu dospějeme k naprosto stejnému výsledku. Použijeme-li však přibližné řešení, například metodou konečných prvků, splníme při postupu podle Lagrangeova principu podmínky kompatibility přesně a podmínky rovnováhy jen přibližně (ve slabém smyslu), zatímco podle Hellingerova-Reissnerova principu splníme obě skupiny rovnic jen přibližně. To sice vypadá jako nevýhoda, ale v řadě případů je možné tímto postupem chování prvků vylepšit. Vynucení kompatibility v silném smyslu může být příčinou různých projevů “zamykání” (anglicky *locking*), při kterém se model chová jako příliš tuhý a vypočtené průhyby jsou mnohem menší než skutečné. Hellingerův-Reissnerův princip může posloužit jako základ tzv. smíšených formulací, které aproximují pole napětí nezávisle na poli posunutí a vztah mezi nimi zabezpečují pouze v slabém smyslu.

Použití Hellingerova-Reissnerova principu

Jako konkrétní příklad využití Hellingerova-Reissnerova principu uvedeme téměř nestlačitelný materiál, tedy materiál s Poissonovým součinitelem ν blízkým mezní hodnotě 0.5. Pro takový materiál jsou některé složky tenzoru tuhosti \mathbf{D}_e obrovské a v limitě pro $\nu \rightarrow 0.5$ se blíží nekonečnu, což pochopitelně vede k numerickým problémům při použití Lagrangeova principu založeného na funkcionálu (237). Naproti tomu ve (234) se některé složky tenzoru poddajnosti \mathbf{C}_e blíží nule, což nemusí být na závadu. Použití Hellingerova-Reissnerova principu je tedy pro tento typ úloh výhodnější. Není ale třeba konstruovat nezávislé aproximace všech složek napětí, protože výše popsany problém souvisí pouze s objemovou částí deformace a napětí. Hustotu potenciální energie deformace tedy rozdělíme na objemovou a deviatorickou část¹⁴ a pouze pro objemovou přejdeme k vyjádření použitému ve (234). Výsledkem je pak funkcionál

$$\Pi_{up}(\mathbf{u}, \sigma_m) = \int_V \left(\sigma_m \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\sigma_m^2}{2K} + G \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{I}_D : \nabla_s \mathbf{u} \right) dV + E_{ext}(\mathbf{u}) \quad (239)$$

V literatuře se pro střední napětí σ_m v tomto kontextu používá často symbol p (chápaný jako hydrostatický tlak, někdy s opačným znaménkem), odtud tedy označení “u-p formulace” a index up . Připomeňte si, že divergence pole posunutí $\nabla \cdot \mathbf{u}$ odpovídá objemové deformaci, K je objemový modul pružnosti a G je smykový modul pružnosti. Pokud je materiál dokonale nestlačitelný, stačí položit $1/K = 0$ a člen $\sigma_m^2/(2K)$ pak vypadne.

Cvičení 10

10.1 Druhá variace Hellingerova-Reissnerova funkcionálu

Vyjádřete druhou variaci funkcionálu Π_{HR} definovaného ve (233) a ukažte, že stacionární bod tohoto funkcionálu neodpovídá minimu ani maximu.

10.2 Formulace $u - p$

Ukažte, že pro dokonale nestlačitelný materiál by bylo možno funkcionál $\Pi_{up}(\mathbf{u}, \sigma_m)$ sestavit z funkcionálu $E_p(\mathbf{u})$ přidáním podmínky $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ s využitím Lagrangeova multiplikátoru.

Dále se vraťte k obecnějšímu tvaru funkcionálu $\Pi_{up}(\mathbf{u}, \sigma_m)$ podle (239). Vyjádřete první variaci tohoto funkcionálu a odvoďte podmínky jeho stacionarity. Jaký je názorný význam těchto podmínek?

¹⁴Oddělení objemových a tvarových změn je samozřejmě možné pouze pro izotropní materiál.

10.3 Diskretizace

Proveďte diskretizaci funkcionálu $\Pi_{up}(\mathbf{u}, \sigma_m)$, založenou na aproximaci pole posunutí a pole středního napětí v obecném tvaru

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (240)$$

$$\sigma_m(\mathbf{x}) = \sum_J N_J^*(\mathbf{x}) p_J \quad (241)$$

kde N_I jsou zvolené báze funkce pro aproximaci posunutí, N_J^* jsou zvolené báze funkce pro aproximaci středního napětí a \mathbf{u}_I a p_J jsou příslušné stupně volnosti (uzlové hodnoty posunů a středního napětí).

Po diskretizaci se z funkcionálu stane funkce proměnných \mathbf{u}_I a p_J , které můžeme uspořádat do sloupcové matice (nejprve všechny posuny, poté všechna střední napětí). Odvoďte podmínky stacionarity této funkce. Výsledkem bude soustava lineárních rovnic s blokovou strukturou. Zamyslete se nad vlastnostmi matice této soustavy, která je v jistém smyslu zobecněním matice tuhosti. Je tato matice symetrická? Je pozitivně definitní? Je regulární?

Přednáška 11

Cvičení 11

11.1 Princip Hu-Washizu

Obecný variační princip nesoucí jméno autorů Hu a Washizu (tedy Huův-Washizuův princip, což vypadá v češtině poněkud bizarně, a proto mu budeme říkat princip Hu-Washizu) pracuje dokonce se třemi nezávislými poli. Lze k němu dospět například tak, že při výpočtu celkové potenciální energie vyjádříme potenciální energii deformace v závislosti na deformaci, chápané jako nezávislé pole, a geometrické rovnice zavedeme jako omezující podmínku. Hledáme tedy

$$\min_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}} [E_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) + E_{ext}(\mathbf{u})] \quad (242)$$

přes všechny dvojice polí \mathbf{u} a $\boldsymbol{\varepsilon}$ splňující geometrické rovnice

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla_s \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (243)$$

a geometrické okrajové podmínky

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{na } S_u \quad (244)$$

Kdybychom jednoduše dosadili $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}$, stačilo by minimalizovat přes všechna pole posunutí \mathbf{u} a dospěli bychom k obvyklému principu minima potenciální energie. Pokud ale místo toho podmínku (243) vynutíme pomocí Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$, budeme hledat stacionární bod jistého funkcionálu $\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda})$. Sestrojte tento funkcionál, odvoďte podmínky jeho stacionarity a vysvětlete jejich názorný význam. Uvažujte přitom jednak kvadratickou podobu potenciální energie deformace

$$E_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (245)$$

a jednak její obecnější podobu

$$E_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_V \mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, dV \quad (246)$$

Zatím jsme předpokládali, že geometrické okrajové podmínky (3) jsou splněny “předem”, tj. uvažovali jsme jen taková pole posunutí, která tyto podmínky splňují. Další možné rozšíření principu Hu-Washizu by spočívalo v tom, že i tyto podmínky vynutíme pomocí dalších Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\mu}$. Zapište příslušný funkcionál, odvoďte jeho podmínky stacionarity a na základě jedné z nich najděte vztah mezi $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ a přepište výsledný funkcionál pouze pomocí polí, která mají názorný význam.

11.2 Interpretace principu Hu-Washizu jako principu “minimaxminu”

Pokuste se podmínku stacionarity funkcionálu Π_{HW} sestrojeného v předchozí úloze zapsat jako podmínku “minimaxminu”. Ukažte přitom, jak se princip Hu-Washizu s využitím Legendrovy transformace dá přepsat do tvaru, ve kterém lze rozpoznat příbuznost s Hellingerovým-Reissnerovým a Lagrangeovým principem.