Studijní program Optika a optometrie

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Základní údaje

Výzva	ESF výzvy pro vysoké školy II.
Název a reg. číslo projektu	Projekt ČVUT ESF II. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013243
Název výstupu	Studijní obor Optika a optometrie
Název instituce	České vysoké učení technické v Praze
Adresa příjemce a webová stránka	Jugoslávských partyzánů 1580/3, Praha 6- Dejvice, 160 00 www.cvut.cz
Datum vzniku finální verze výstupu	září 2021 – únor 2022
Číslo povinně volitelné aktivity výzvy	Aktivita č. 2: Zkvalitnění vzdělávací činnosti a moderní výukové trendy
Forma výstupu	pdf
Cílová skupina	Studenti/pracovníci vysokých škol
Zaměření výstupu (tematická oblast, obor apod.)	Optika a optometrie
Tvůrci výstupu **Odborný garant výstupu**	Mgr. Urzová Jana, Ph.D Doc. Ing. Marie Pospíšilová, CSc.
Odborní posuzovatelé	Ne

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

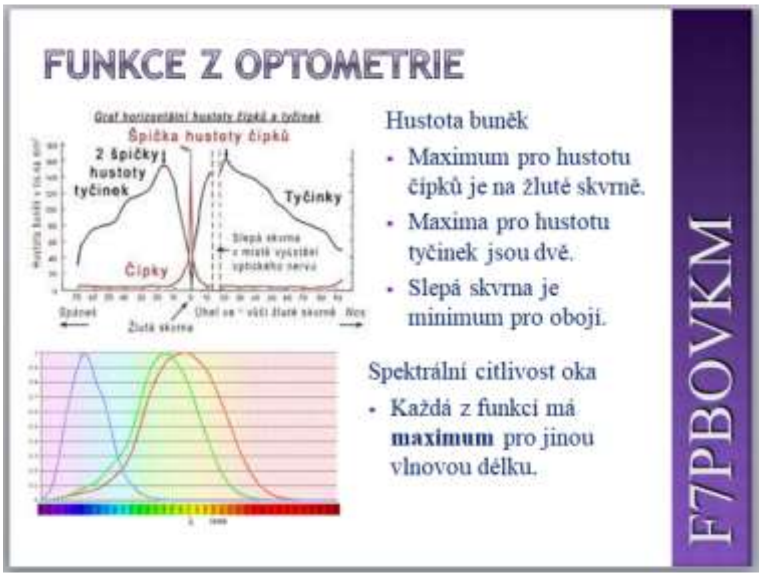
ZPRÁVA O VÝSTUPECH PROJEKTU ESF II.

Autor: Mgr. Jana Urzová, Ph.D.

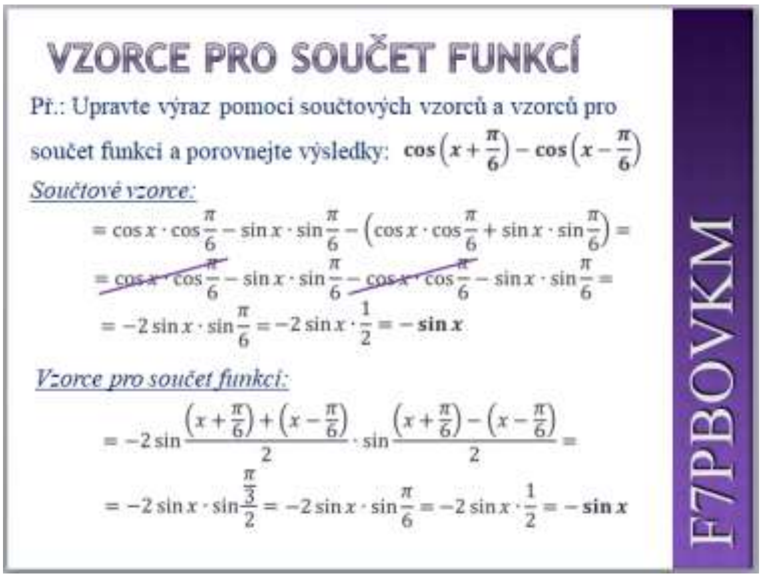
Předměty: F7PBOVKM - Vybrané kapitoly z matematiky pro optometristy

F7PBOFYZ – Fyzika pro optometristy

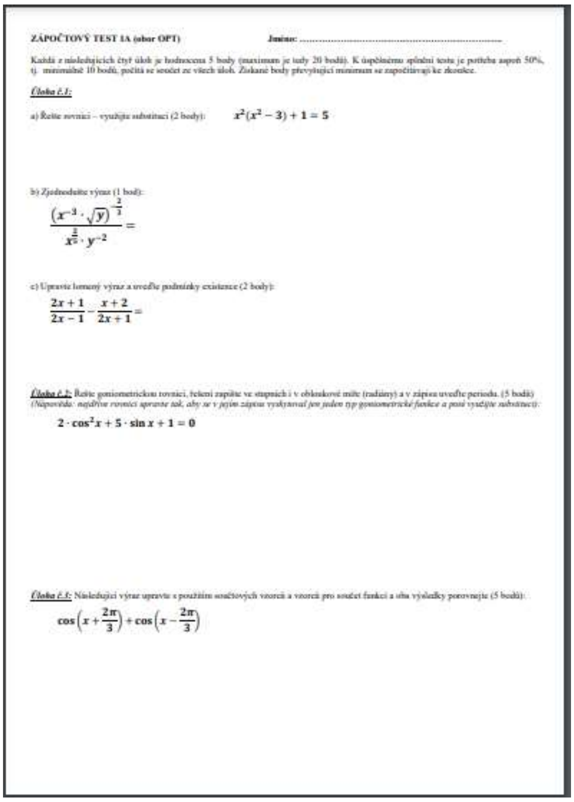
V rámci řešení projektu byly připraveny materiály pro výuku předmětu **F7PBOVKM - Vybrané kapitoly z matematiky pro optometristy**, konkrétně výukové prezentace, sady řešených i neřešených úloh, testy pro průběžné testování dosažených znalostí a dovedností, polosemestrální testy a zkouškové písemky. Zkušební testy všech typů byly připraveny vždy v několika variantách stejné obtížnosti. Cílem bylo ilustrovat matematické pojmy na situacích, které souvisí se studovaným oborem, viz ukázka z prezentace:



Řešené typové příklady byly zpracovány vždy formou animovaných prezentací, ukázka:



Ukázka zápočtového testu:



ZÁPOČTOVÝ TEST 1A (obor OPT) **Jméno:** ....

Každá z následujících čtyř úloh je hodnocena 5 body (maximum je tedy 20 bodů). K úspěšnému splnění testu je potřeba aspoň 50%, tj. minimálně 10 bodů, počítá se součet ze všech úloh. Získané body převyšující minimum se započítávají ke zkoušce.

Úloha č.1:

a) Řešte rovnici – využijte substituci (2 body): $x^2(x^2-3)+1=5$

b) Zjednodušte výraz (1 bod):

$$\frac{\left(x^{-3}\cdot\sqrt{y}\right)^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{5}}\cdot y^{-2}}=$$

c) Upravte lomený výraz a uveďte podmínky existence (2 body):

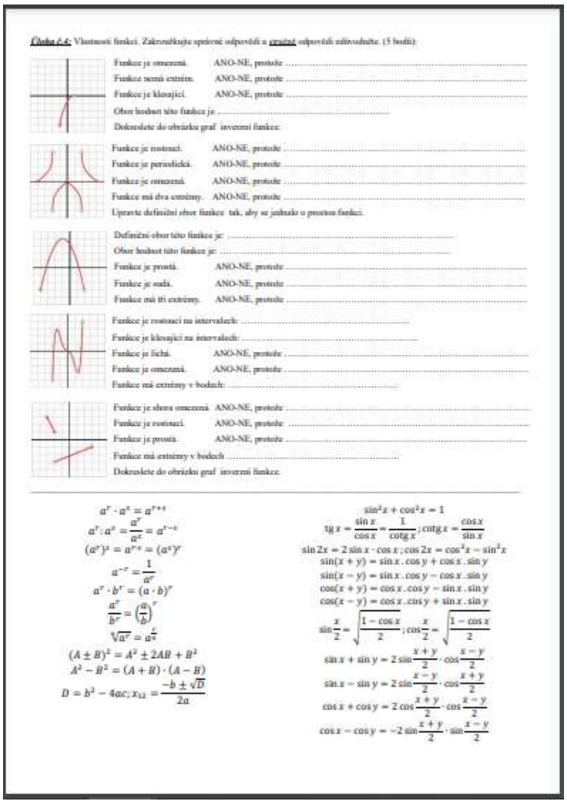
$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{x+2}{2x+1}=$$

Úloha č.2: Řešte goniometrickou rovnici, řešení zapište ve stupních i v obloukové míře (radiány) a v zápisu uveďte periodu. (5 bodů)
(Nápověda: nejdříve rovnici upravte tak, aby se v jejím zápisu vyskytoval jen jeden typ goniometrické funkce a poté využijte substituci):

$$2\cdot\cos^2 x+5\cdot\sin x+1=0$$

Úloha č.3: Následující výraz upravte s použitím součtových vzorců a vzorců pro součet funkcí a oba výsledky porovnejte (5 bodů):

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$$



Úloha č.4: Vlastnosti funkcí. Zakroužkujte správné odpovědi a stručně odpovědi zdůvodněte. (5 bodů)

Funkce je omezená. ANO-NE, protože ....
Funkce nemá extrém. ANO-NE, protože ....
Funkce je klesající. ANO-NE, protože ....
Obor hodnot této funkce je ....
Dokreslete do obrázku graf inverzní funkce.

Funkce je rostoucí. ANO-NE, protože ....
Funkce je periodická. ANO-NE, protože ....
Funkce je omezená. ANO-NE, protože ....
Funkce má dva extrémy. ANO-NE, protože ....
Upravte definiční obor funkce tak, aby se jednalo o prostou funkci.

Definiční obor této funkce je: ....
Obor hodnot této funkce je: ....
Funkce je prostá. ANO-NE, protože ....
Funkce je sudá. ANO-NE, protože ....
Funkce má tři extrémy. ANO-NE, protože ....

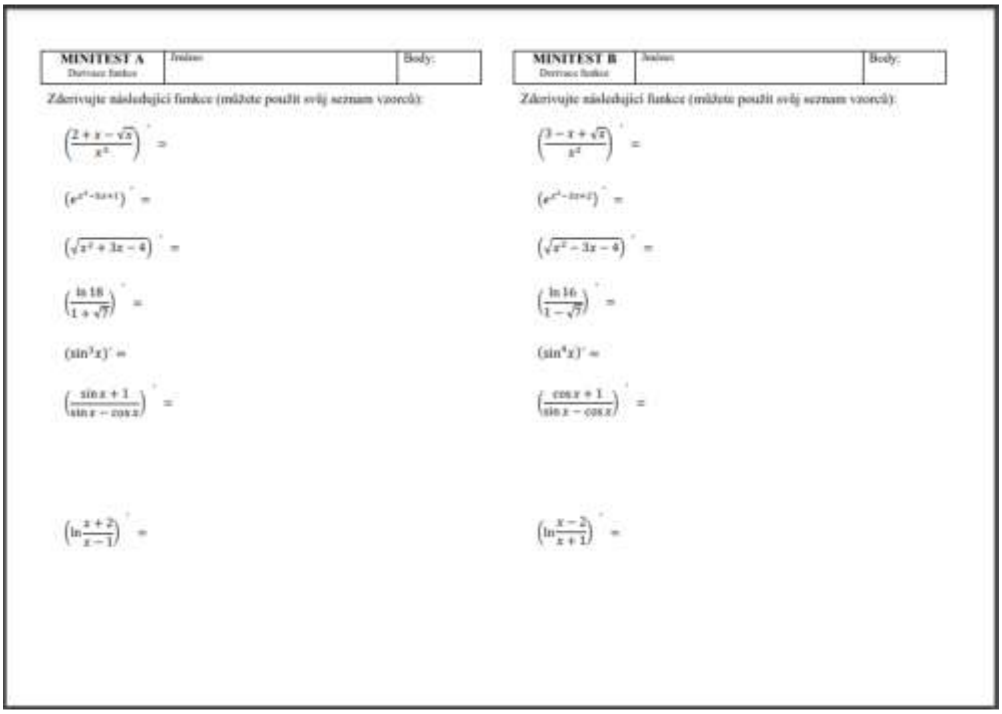
Funkce je rostoucí na intervalech: ....
Funkce je klesající na intervalech: ....
Funkce je lichá. ANO-NE, protože ....
Funkce je omezená. ANO-NE, protože ....
Funkce má extrémy v bodech: ....

Funkce je shora omezená. ANO-NE, protože ....
Funkce je rostoucí. ANO-NE, protože ....
Funkce je prostá. ANO-NE, protože ....
Funkce má extrémy v bodech ....
Dokreslete do obrázku graf inverzní funkce.

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$$
$$a^r:a^s=\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$
$$(a^r)^s=a^{r\cdot s}=(a^s)^r$$
$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$
$$a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r$$
$$\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$$
$$\sqrt[s]{a^r}=a^{\frac{r}{s}}$$
$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$
$$A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$$
$$D=b^2-4ac;\ x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\operatorname{cotg} x};\ \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$$
$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\ \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

Dále byly připraveny průběžné minitesty pro ověřování dosažených dovedností:



MINITEST A Derivace funkce	Jméno:	Body:

Zderivujte následující funkce (můžete použít svůj seznam vzorců):

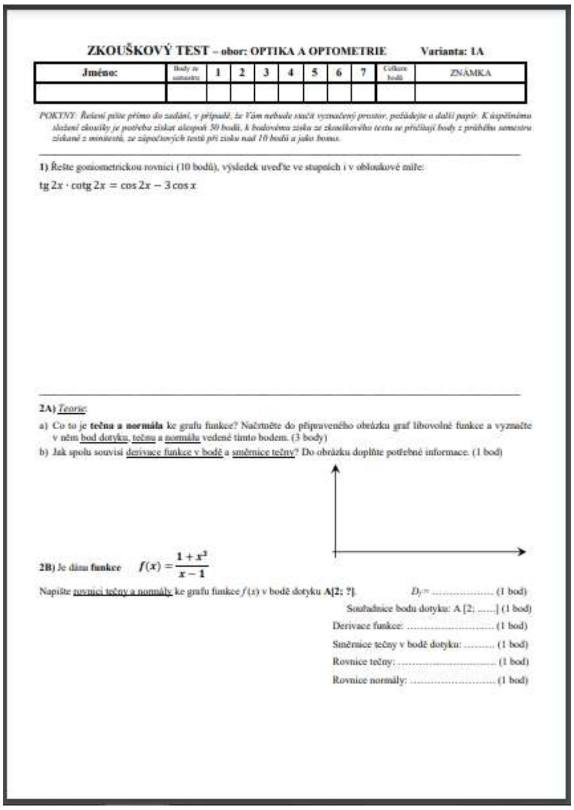
$$\left(\frac{2+x-\sqrt{x}}{x^2}\right)'=$$
$$\left(e^{x^2-3x+1}\right)'=$$
$$\left(\sqrt{x^2+3x-4}\right)'=$$
$$\left(\frac{\ln 18}{1+\sqrt{7}}\right)'=$$
$$(\sin^3 x)'=$$
$$\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-\cos x}\right)'=$$
$$\left(\ln\frac{x+2}{x-1}\right)'=$$

MINITEST B Derivace funkce	Jméno:	Body:

Zderivujte následující funkce (můžete použít svůj seznam vzorců):

$$\left(\frac{3-x+\sqrt{x}}{x^2}\right)'=$$
$$\left(e^{x^2-3x+2}\right)'=$$
$$\left(\sqrt{x^2-3x-4}\right)'=$$
$$\left(\frac{\ln 16}{1-\sqrt{7}}\right)'=$$
$$(\sin^4 x)'=$$
$$\left(\frac{\cos x+1}{\sin x-\cos x}\right)'=$$
$$\left(\ln\frac{x-2}{x+1}\right)'=$$

Zkouškové testy byly připraveny v několika verzích, součástí testu je vždy seznam vzorců, ukázka:



ZKOUŠKOVÝ TEST – **obor: OPTIKA A OPTOMETRIE** **Varianta: 1A**

Jméno:	Body ze semestru	1	2	3	4	5	6	7	Celkem bodů	ZNÁMKA

POKYNY: Řešení pište přímo do zadání, v případě, že Vám nebude stačit vyznačený prostor, požádejte o další papír. K úspěšnému složení zkoušky je potřeba získat alespoň 50 bodů, k bodovému zisku ze zkouškového testu se přičítají body z průběhu semestru získané z minitestů, ze zápočtových testů při zisku nad 10 bodů a jako bonus.

1) Řešte goniometrickou rovnici (10 bodů), výsledek uveďte ve stupních i v obloukové míře:

$\mathrm{tg}\,2x \cdot \mathrm{cotg}\,2x = \cos 2x - 3\cos x$

2A) *Teorie:*

a) Co to je **tečna a normála** ke grafu funkce? Načrtněte do připraveného obrázku graf libovolné funkce a vyznačte v něm bod dotyku, tečnu a normálu vedené tímto bodem. (3 body)

b) Jak spolu souvisí derivace funkce v bodě a směrnice tečny? Do obrázku doplňte potřebné informace. (1 bod)

2B) Je dána **funkce** $f(x) = \frac{1+x^3}{x-1}$

Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě dotyku **A[2; ?]**.

D_f = ... (1 bod)

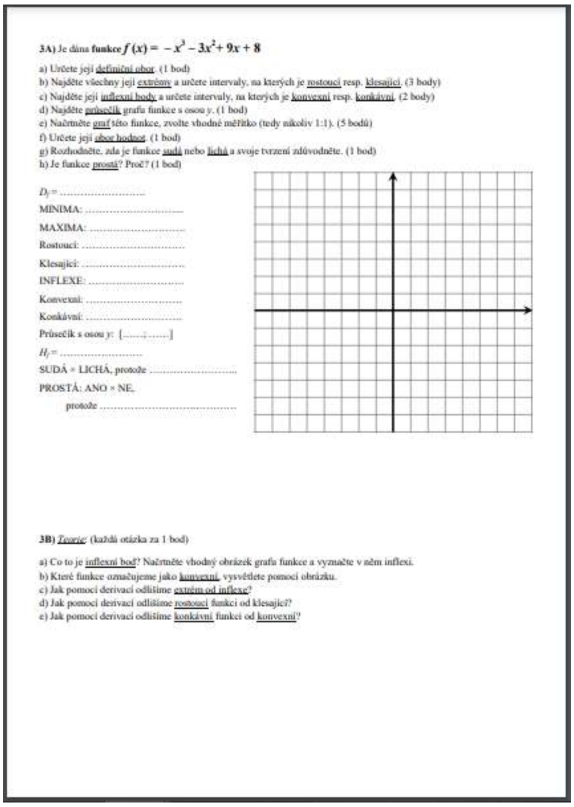
Souřadnice bodu dotyku: A [2; ......] (1 bod)

Derivace funkce: .... (1 bod)

Směrnice tečny v bodě dotyku: .... (1 bod)

Rovnice tečny: .... (1 bod)

Rovnice normály: .... (1 bod)



3A) Je dána **funkce** $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 8$

a) Určete její definiční obor. (1 bod)

b) Najděte všechny její extrémy a určete intervaly, na kterých je rostoucí resp. klesající. (3 body)

c) Najděte její inflexní body a určete intervaly, na kterých je konvexní resp. konkávní. (2 body)

d) Najděte průsečík grafu funkce s osou y. (1 bod)

e) Načrtněte graf této funkce, zvolte vhodné měřítko (tedy nikoliv 1:1). (5 bodů)

f) Určete její obor hodnot. (1 bod)

g) Rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a svoje tvrzení zdůvodněte. (1 bod)

h) Je funkce prostá? Proč? (1 bod)

D_f = ...

MINIMA: ....

MAXIMA: ....

Rostoucí: ....

Klesající: ....

INFLEXE: ....

Konvexní: ....

Konkávní: ....

Průsečík s osou y: [......; ......]

H_f = ...

SUDÁ × LICHÁ, protože ....

PROSTÁ: ANO × NE,

protože ....

3B) *Teorie:* (každá otázka za 1 bod)

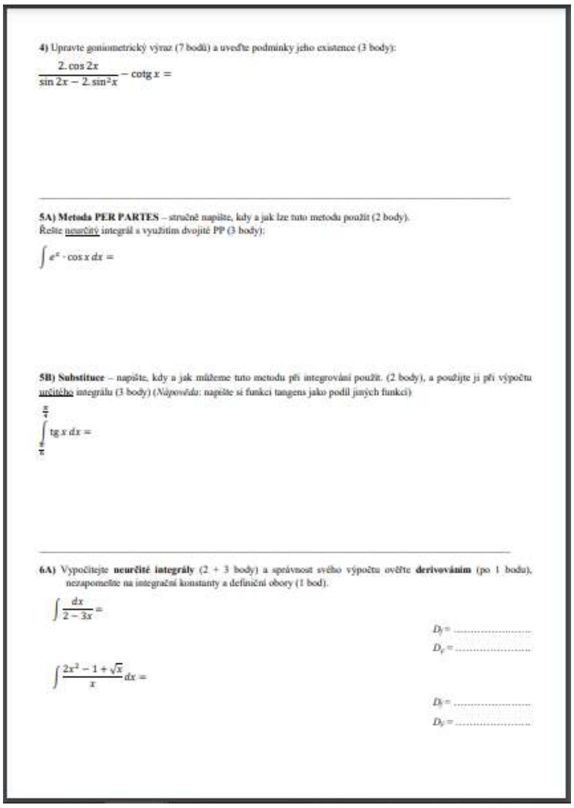
a) Co to je inflexní bod? Načrtněte vhodný obrázek grafu funkce a vyznačte v něm inflexi.

b) Které funkce označujeme jako konvexní, vysvětlete pomocí obrázku.

c) Jak pomocí derivací odlišíme extrém od inflexe?

d) Jak pomocí derivací odlišíme rostoucí funkci od klesající?

e) Jak pomocí derivací odlišíme konkávní funkci od konvexní?



4) Upravte goniometrický výraz (7 bodů) a uveďte podmínky jeho existence (3 body):

$\frac{2.\cos 2x}{\sin 2x - 2.\sin^2 x} - \mathrm{cotg}\,x =$

5A) Metoda PER PARTES – stručně napište, kdy a jak lze tuto metodu použít (2 body).
Řešte neurčitý integrál s využitím dvojité PP (3 body):

$\int e^x \cdot \cos x\, dx =$

5B) Substituce – napište, kdy a jak můžeme tuto metodu při integrování použít. (2 body), a použijte ji při výpočtu určitého integrálu (3 body) (*Nápověda:* napište si funkci tangens jako podíl jiných funkcí)

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,x\, dx =$

6A) Vypočítejte **neurčité integrály** (2 + 3 body) a správnost svého výpočtu ověřte **derivováním** (po 1 bodu), nezapomeňte na integrační konstanty a definiční obory (1 bod).

$\int \frac{dx}{2-3x} =$

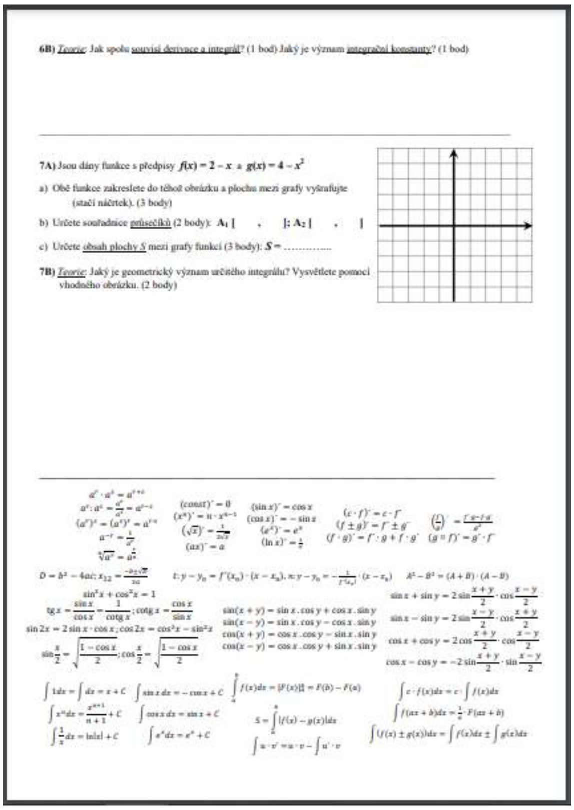
D_f = ...

D_F = ...

$\int \frac{2x^2 - 1 + \sqrt{x}}{x} dx =$

D_f = ...

D_F = ...



6B) *Teorie:* Jak spolu souvisí derivace a integrál? (1 bod) Jaký je význam integrační konstanty? (1 bod)

7A) Jsou dány funkce s předpisy $f(x) = 2 - x$ a $g(x) = 4 - x^2$

a) Obě funkce zakreslete do téhož obrázku a plochu mezi grafy vyšrafujte (stačí náčrtek). (3 body)

b) Určete souřadnice průsečíků (2 body): **A₁ [,]; A₂ [,]**

c) Určete obsah plochy S mezi grafy funkcí (3 body): S = ...

7B) *Teorie:* Jaký je geometrický význam určitého integrálu? Vysvětlete pomocí vhodného obrázku. (2 body)

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; $(a^r)^s = (a^s)^r = a^{r \cdot s}$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

$(const)' = 0$; $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(ax)' = a$

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$; $(g \circ f)' = g' \cdot f'$

$D = b^2 - 4ac$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $t: y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ $A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,x}$; $\mathrm{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$

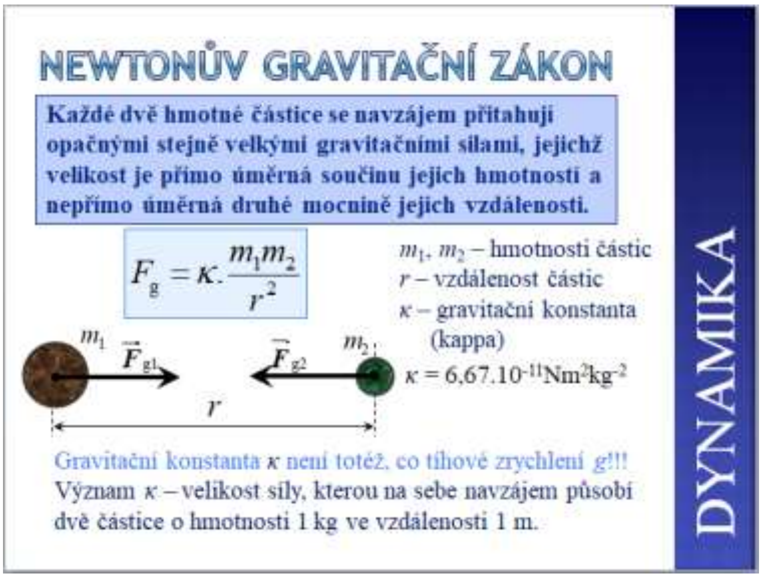
$\int 1 dx = \int dx = x + C$; $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; $\int \cos x\, dx = \sin x + C$; $\int e^x dx = e^x + C$

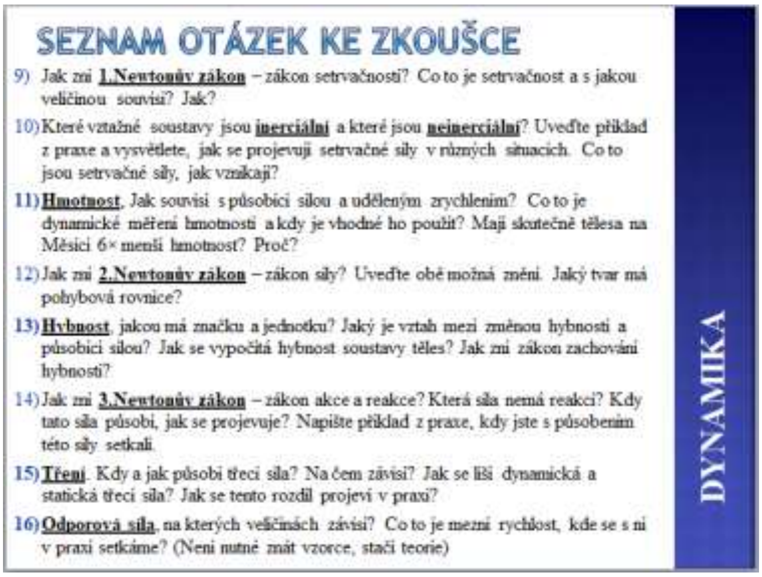
$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$; $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$; $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$; $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$; $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

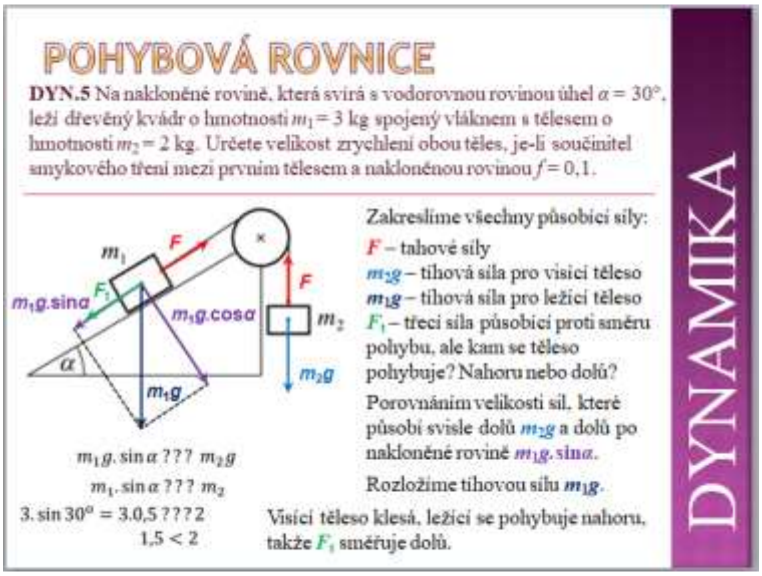
V rámci řešení projektu byly připraveny materiály pro výuku předmětu **F7PBOFYZ – Fyzika pro optometristy**, konkrétně výukové prezentace, sady řešených i neřešených úloh, testy pro průběžné testování dosažených znalostí a dovedností, zápočtové testy a zkouškové písemky. Zkušební testy všech typů byly připraveny vždy v několika variantách stejné obtížnosti. Ukázka z prezentace:



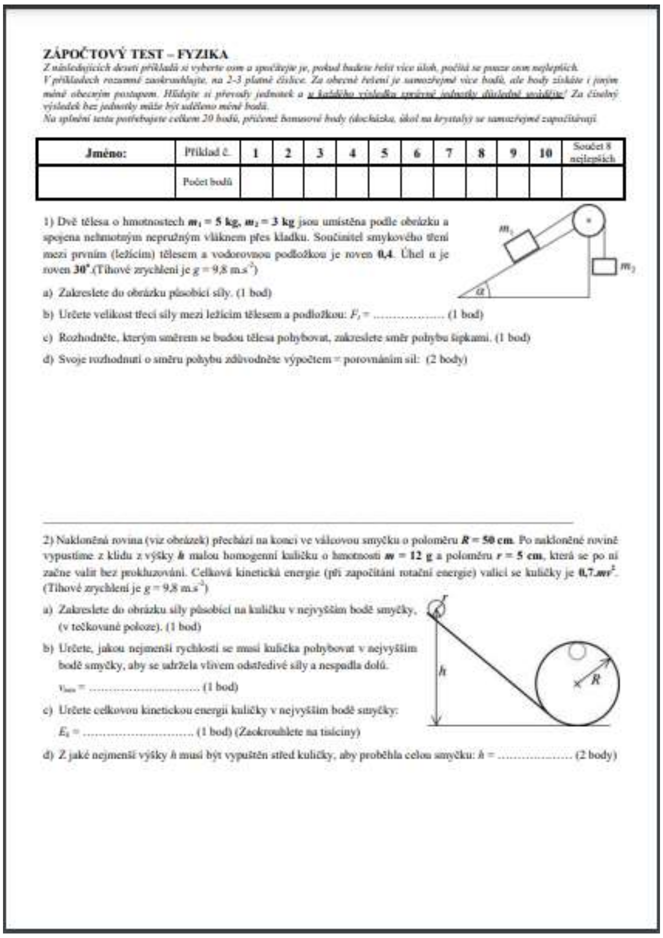
Ke každému tématu byl sestaven seznam zkouškových otázek, který budou mít studenti k dispozici:



Pro teoretická cvičení byly připraveny sady příkladů, které obsahují v úvodu vzorce potřebné k řešení příkladů, neřešené příklady a příklady s animovaným vzorovým řešením. Studenti mají před cvičením k dispozici verzi bez řešení, na cvičení se potom seznámí s verzí s řešenými příklady, která je následně umístěna na stránky předmětu jako pomoc při přípravě na zápočtový test. Ukázka verze s řešením:



V zápočtovém testu potom vypadá zadání následovně:



ZÁPOČTOVÝ TEST – FYZIKA

Z následujících deseti příkladů si vyberte osm a spočítejte je, pokud budete řešit více úloh, počítá se pouze osm nejlepších. V příkladech rozumně zaokrouhlujte, na 2-3 platné číslice. Za obecné řešení je samozřejmě více bodů, ale body získáte i jiným méně obecným postupem. Hlídejte si převody jednotek a u každého výsledku správné jednotky důsledně uvádějte! Za číselný výsledek bez jednotky může být uděleno méně bodů. Na splnění testu potřebujete celkem 20 bodů, přičemž bonusové body (docházka, úkol na krystaly) se samozřejmě započítávají.

Jméno:	Příklad č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Součet 8 nejlepších
	Počet bodů											

1) Dvě tělesa o hmotnostech $\mathbf{m_1 = 5\ kg}$, $\mathbf{m_2 = 3\ kg}$ jsou umístěna podle obrázku a spojena nehmotným nepružným vláknem přes kladku. Součinitel smykového tření mezi prvním (ležícím) tělesem a vodorovnou podložkou je roven **0,4**. Úhel α je roven **30°**.(Tíhové zrychlení je $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$)

a) Zakreslete do obrázku působící síly. (1 bod)

b) Určete velikost třecí síly mezi ležícím tělesem a podložkou: F_t = ... (1 bod)

c) Rozhodněte, kterým směrem se budou tělesa pohybovat, zakreslete směr pohybu šipkami. (1 bod)

d) Svoje rozhodnutí o směru pohybu zdůvodněte výpočtem = porovnáním sil: (2 body)

2) Nakloněná rovina (viz obrázek) přechází na konci ve válcovou smyčku o poloměru $\mathbf{R = 50\ cm}$. Po nakloněné rovině vypustíme z klidu z výšky $\boldsymbol{h}$ malou homogenní kuličku o hmotnosti $\mathbf{m = 12\ g}$ a poloměru $\mathbf{r = 5\ cm}$, která se po ní začne valit bez prokluzování. Celková kinetická energie (při započítání rotační energie) valící se kuličky je $\mathbf{0{,}7.mv^2}$. (Tíhové zrychlení je $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$)

a) Zakreslete do obrázku síly působící na kuličku v nejvyšším bodě smyčky. (v tečkované poloze). (1 bod)

b) Určete, jakou nejmenší rychlostí se musí kulička pohybovat v nejvyšším bodě smyčky, aby se udržela vlivem odstředivé síly a nespadla dolů.

v_{min} = ... (1 bod)

c) Určete celkovou kinetickou energii kuličky v nejvyšším bodě smyčky:

E_k = ... (1 bod) (Zaokrouhlete na tisíciny)

d) Z jaké nejmenší výšky h musí být vypuštěn střed kuličky, aby proběhla celou smyčku: h = ... (2 body)

Všechny materiály byly koncipovány tak, aby v případě přechodu do online prostředí mohly být využity k samostudiu nebo při online výuce.

Fyzika: HALLIDAY, D., RESNICK R., WALKER, J., DUB, P. (ed.). Fyzika.1+2., přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN: 978-80-214-4123-1.

Matematika:
[1] KRAČMAR, S., MRÁZ, F., NEUSTUPA, J. Sbírka příkladů z Matematiky I. Vydavatelství ČVUT, Praha 2017. ISBN: 978-80-01-05267-9.
[2] TKADLEC, J. Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné, Vydavatelství ČVUT, Praha 2011. ISBN: 978-80-01-04792-7.
[3] OLŠÁK, P. Úvod do algebry, zejména lineární, 2. ed., Vydavatelství ČVUT, Praha 2013. ISBN: