EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky

Matematická analýza II

Luděk Nechvátal

Brno 2022

CC BY SA

Předmluva

Předkládaný text slouží jako studijní opora k předmětu Matematická analýza II, který bezprostředně navazuje na předmět Matematická analýza I. Oba jsou vyučovány na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně pro studenty prvního ročníku oborů Matematické inženýrství a Fyzikální inženýrství.

Látka se věnuje především diferenciálnímu a integrálnímu počtu funkce více proměnných (tedy zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, případně $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$). Uvedeny budou také základní poznatky z teorie křivkového a plošného integrálu.

Proč se zabývat funkcemi více proměnných? V praxi je často třeba uvažovat veličiny, které závisejí na více než jedné proměnné, např. objem rotačního kužele závisí na poloměru podstavy r a výšce h, teplota v kovovém prutu může záviset na místě x a čase t, hustota tělesa se může měnit v závislosti na bodu X o souřadnicích $[x, y, z]$, vektor síly $\vec{f} = (f_1, f_2)$ v rovině může záviset na souřadnicích bodu v rovině (tj. máme $\vec{f} = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$), apod. Uvedené naznačuje, že nám půjde o geometricko-fyzikální popis situace.

Připomeňme, že v SA1 jsme množinu $\mathbb{R}$ chápali nejenom jako množinu nějakých prvků (reálných čísel), ale byla zde jasně dána algebraická struktura (sčítání, násobení, $\mathbb{R}$ je vybavena relací uspořádání, klíčový byl také axiom o suprému). Podobně, $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n-krát) nebude chápána pouze jako množina uspořádaných n-tic, ale jako množina, na které je zavedena určitá struktura. Zejména, součet každých dvou prvků $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $Y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$X + Y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] \in \mathbb{R}^n$$

a násobek libovolným skalárem $c \in \mathbb{R}$ je pro každé $X \in \mathbb{R}^n$ definován jako

$$cX = [cx_1, \dots, cx_n] \in \mathbb{R}^n.$$

Lze ukázat, že $\mathbb{R}^n$ s takto definovanými operacemi tvoří vektorový prostor dimenze n (viz předmět Lineární algebra). Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat buď body, nebo vektory (podle situace). Interpretujeme-li prvky X a Y jako body, pak rozdíl $Y - X$ bude chápán jako vektor (to je v souladu s tím, co známe z analytické geometrie).

Další podstatnou vlastností je, že v $\mathbb{R}^n$ umíme měřit vzdálenosti bodů. Matematická abstrakce pojmu vzdálenosti dvou prvků nějaké množiny vedla ke vzniku teorie metrických prostorů, velmi stručný úvod do této teorie je obsahem první kapitoly.

Pokud si čtenář bude chtít znalosti doplnit nad rámec probíraných statí nebo bude potřebovat více příkladů k procvičení, lze se inspirovat literaturou uvedenou na konci tohoto textu.

Brno srpen 2022 Autor

Obsah

Kapitola 1

Úvod do metrických prostorů

1 Metrika a metrický prostor

Definice 1.1 — metriky a metrického prostoru. Buď $M \neq \emptyset$ libovolná množina a $\rho : M \times M \to \langle 0, \infty)$ zobrazení, které pro všechna $x, y, z \in M$ splňuje

(m1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (axiom totožnosti),

(m2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axiom symetrie),

(m3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost)

Zobrazení ρ nazýváme *metrika na M*, prvky množiny M nazýváme *body metrického prostoru (M, ρ)*, číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdálenost bodů x, y*.

Příklad 1.2. 1. Je-li M libovolná množina a $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y \\ 0 & \text{pro } x = y \end{cases}$, pak (M, ρ) je metrický prostor (nazývá se *diskrétní*).

2. Je-li $M = \mathbb{R}$, pak $\rho(x, y) = |x - y|$ je metrika.
3. Je-li $M = \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$, pak

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|,$$
$$\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$
$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

jsou metriky. Metrika ρ_1 se nazývá *součtová (manhattanská, taxíkářská)*, metrika ρ_2 se nazývá *eukleidovská*[1], metrika ρ_∞ se nazývá *maximální (šachovnicová, Čebyševova*[2]*)*. Axiomy (m1), (m2) zřejmě platí. Ověřme (m3).

- V případě metriky ρ_1 máme

$$\begin{aligned}\rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\geq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| = \rho_1(x, y).\end{aligned}$$

- V případě metriky ρ_2 vyjdeme z Cauchyho–Schwarzovy[3]nerovnosti (ta se někdy též nazývá Cauchyho–Buňakovského[4]–Schwarzova)

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

[1]Eukleidés 3. stol. př.n.l., Řek žijící v Alexandrii v Egyptě

[2]Pafnutij Lvovič Čebyšev 1821–1894, Rus

Položme $u_i = p_i + q_i$, $v_i = q_i$. Potom

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)q_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}.$$

Pokud naopak $u_i = p_i$, $v_i = p_i + q_i$, tak

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(p_i + q_i) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2}.$$

Sečtením pak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2} \cdot \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}\right),$$

tj.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2} \quad \text{(Minkowského[5]nerovnost).}$$

Dosazením $p_i = x_i - z_i$, $q_i = z_i - y_i$ máme

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}, \quad \text{tj. } \rho_2(x, y) \le \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y).$$

- Konečně, v případě metriky ρ_∞ označme j, resp. k, resp. ℓ, ten index, pro který nastane maximum z hodnot $|x_i - z_i|$, resp. $|z_i - y_i|$, $|x_i - y_i|$, tj.

$$\begin{aligned}
\rho_\infty(x, z) &= \max\{|x_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = |x_j - z_j|,\\
\rho_\infty(z, y) &= \max\{|z_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = |z_k - y_k|,\\
\rho_\infty(x, y) &= \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = |x_\ell - z_\ell|.
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y) &= |x_j - z_j| + |z_k - y_k|\\
&\ge |x_\ell - z_\ell| + |z_\ell - y_\ell| \ge |x_\ell - z_\ell + z_\ell - y_\ell| = |x_\ell - y_\ell| = \rho_\infty(x, y),
\end{aligned}$$

tedy

$$\rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y) \ge \rho_\infty(x, y).$$

4. Je-li $M = C(\langle a, b\rangle)$ (množina všech funkcí spojitých na $\langle a, b\rangle$), pak

$$\begin{aligned}
\rho_C(f, g) &= \max\{|f(x) - g(x)| : x \in \langle a, b\rangle\} \quad \text{(metrika stejnoměrné konvergence),}\\
\rho_I(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x \quad \text{(integrální metrika)}
\end{aligned}$$

jsou metriky. Ověření axiomů (m1) a (m2) je opět triviální. Axiom (m3) lze v případě ρ_C lze ověřit podobně jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$. V případě ρ_I máme

$$\rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$$

[3]Karl Hermann Amandus Schwarz 1843–1921, Němec
[4]Viktor Jakovlevič Buňakovskij 1804–1889, Rus
[5]Hermann Minkowski 1864–1909, německý Žid

$$\leq \int_a^b \big(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b |f(x) - h(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |h(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \rho_I(f,h) + \rho_I(h,f),$$

kde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost pro absolutní hodnotu, monotonii vzhledem k integrovaným funkcím (viz věta 22.8 v SA1) a aditivitu integrálu (integrál součtu je součet integrálů, viz věta 22.6 z SA1).

5. Je-li $M = \ell^\infty$ (množina všech ohraničených posloupností), pak

$$\rho_\infty(\{a_n\},\{b_n\}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

je metrika. Splnění axiomů (m1), (m2) je opět zřejmé. Axiom (m3) by se dokázal analogicky jako u ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.3 — otevřené a uzavřené koule, okolí. Nechť (M,ρ) je metrický prostor, $a \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$. Pak množina

$$B_r(a) := \{x \in M : \rho(a,x) < r\}$$

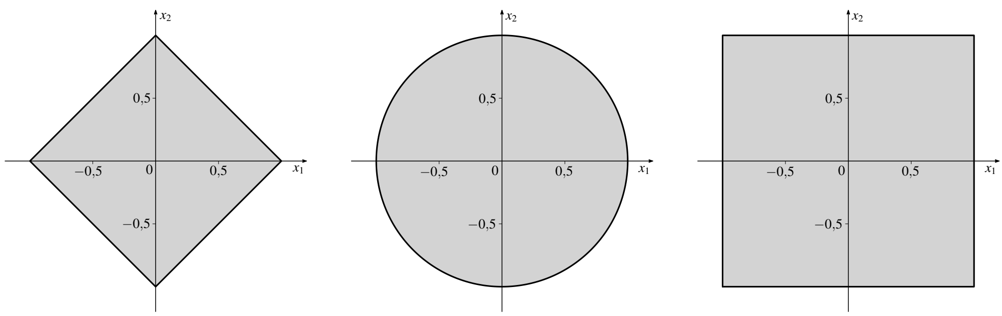
se nazývá *otevřená koule se středem a a poloměrem r* („ball“) a množina

$$B_r[a] := \{x \in M : \rho(a,x) \leq r\}$$

se nazývá *uzavřená koule se středem a a poloměrem r*. Speciálně: $O_\varepsilon(a) := B_\varepsilon(a)$ se nazývá *(epsilonové) okolí bodu a* a $O^*_\varepsilon(a) := O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ se nazývá *ryzí (epsilonové) okolí bodu a*.

Poznámka 1.4. Platí: $\varepsilon \leq \delta \implies O_\varepsilon(a) \subseteq O_\delta(a)$. Není-li podstatná velikost poloměru ε, budeme psát stručně $O(a)$.

Příklad 1.5. Načrtněte $O_\varepsilon(a)$ v $\mathbb{R}^2$ s metrikami ρ_1, ρ_2 a ρ_∞. Viz obrázek 1.1 (voleno $a = [0,0]$ a $\varepsilon = 1$).



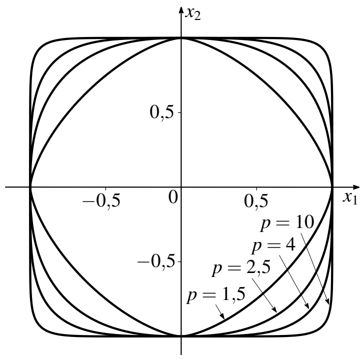
Obrázek 1.1: Jednotková koule (se středem v počátku) v $\mathbb{R}^2$ s metrikou ρ_1, resp. ρ_2, resp. ρ_∞

Poznámka 1.6. Metriku na $\mathbb{R}^n$ lze (obecněji) zavést pro libovolné $p \in \langle 1,\infty)$ vztahem

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Jednotková „kružnice“ se středem v počátku pro případ $n = 2$ (tj. množina všech bodů mající jednotkovou vzdálenost od počátku v metrice ρ_p) je načrtnuta pro několik hodnot parametru p na obrázku 1.2. Z tohoto obrázku je pak zřejmé, proč se maximální metrika značí indexem ∞.

Pozor, pro $p < 1$ výše uvedená funkce ρ_p nepředstavuje metriku!



Obrázek 1.2: Jednotkové „kružnice" v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku pro $p = 1.5$, $p = 2.5$, $p = 4$ a $p = 10$

Definice 1.7 — vzdálenosti dvou množin a průměru množiny. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Pro neprázdné $A, B \subseteq M$ definujeme:
$\rho(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$ – *vzdálenost množin A, B*,
$d(A) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ – *průměr množiny* A.
Jestliže množina $\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ není shora ohraničená, klademe $d(A) = \infty$. Vzdálenost bodu x od množiny A definujeme jako $\rho(x, A) := \rho(\{x\}, A)$.

Poznámka 1.8. Je-li $A \cap B \neq \emptyset$, pak zřejmě $\rho(A, B) = 0$ (vzdálenost však může být nulová i pro A, B disjunktní). Je-li alespoň jedna z množin A, B prázdná, pak klademe jejich vzdálenost rovnu ∞. Naopak průměr prázdné množiny klademe nulový, tj. $d(\emptyset) = 0$.

Definice 1.9. Buď (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Řekneme, že A je *ohraničená*, jestliže $d(A) < \infty$.

Poznámka 1.10. Množina A je zřejmě ohraničená, jestliže existuje bod a a číslo $r > 0$ tak, že $A \subseteq B_r(a)$.

Příklady k procvičení

1.1. Nechť ρ je metrika na množině M. Ukažte, že pro každé $x, y, z \in M$ platí

$$|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, z).$$

1.2. Ukažte, že zobrazení ρ definované jako

$$\rho(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

je metrikou na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3. Pomocí Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti ukažte, že pro libovolný bod $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

1.4. Ukažte, že zobrazení $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definované

$$\rho(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\right)^{1/p}$$

není metrikou na $\mathbb{R}^2$ pro $0 < p < 1$.

1.5. Určete vzdálenost posloupností $a = \{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $b = \{(-2)^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ v metrice

$$\rho(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a = b, \\ 1/k & \text{pro } a \neq b, \quad \text{kde } k \text{ je nejmenší index takový, že } a_k \neq b_k. \end{cases}$$

Ukažte také, že ρ je skutečně metrikou na množině všech posloupností.

1.6. Pro $x \in \langle 0,1\rangle$ určete hodnotu $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce $f(x) = ax$ měla nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$ v integrální metrice ρ_I. *Nápověda.* Pozor, integrand obsahuje absolutní hodnotu, je tedy potřeba provést diskuzi znaménka!

1.7. Určete průměr množiny $A = \{f \in C(\langle 0,1\rangle) : f(x) = ax + b, |a| < 1, |b| < 1\}$ v metrickém prostoru $(C(\langle 0,1\rangle), \rho_C)$, resp. $(C(\langle 0,1\rangle), \rho_I)$.

Výsledky. **1.5.** $\rho(a,b) = 1$. **1.6.** $a = \sqrt{2}/2$. **1.7.** $d(A) = 4$ v metrice ρ_C a $d(A) = 3$ v metrice ρ_I.

2 Podmnožiny metrického prostoru

Definice 2.1 — význačných bodů v metrickém prostoru. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Bod $a \in M$ se nazývá

vnitřní bod množiny A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $O_\varepsilon(a) \subseteq A$,
hraniční bod množiny A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $O_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ a zároveň $O_\varepsilon(a) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$,
bod uzávěru množiny A, jestliže $\rho(a,A) = 0$,
hromadný bod množiny A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $O_\varepsilon^*(a) \cap A \neq \emptyset$,
izolovaný bod množiny A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $O_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Definice 2.2 — vnitřku, hranice, uzávěru a derivace množiny. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$.

1. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny* A a značí se A°, někdy int A (interior),
2. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice množiny* A a značí se ∂A, někdy fr A (frontier),
3. Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá *uzávěr množiny* A a značí se $\overline{A}$, někdy cl A (closure),
4. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny* A a značí se A'.

Příklad 2.3. Uvažujte $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$ a množiny a) $A = (0,1)$, b) $A = \langle 0,1) \cap \mathbb{Q}$, c) $A = \langle 0,1\rangle \cup \{2\}$. Napište A°, ∂A, $\overline{A}$ a A'.

Řešení. ad a) $A^\circ = A = (0,1)$, $\partial A = \{0,1\}$, $\overline{A} = \langle 0,1\rangle$, $A' = \langle 0,1\rangle$.
ad b) $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \langle 0,1\rangle$, $\overline{A} = \langle 0,1\rangle$, $A' = \langle 0,1\rangle$.
ad c) $A^\circ = (0,1)$, $\partial A = \{0,1,2\}$, $\overline{A} = \langle 0,1\rangle \cup \{2\}$, $A' = \langle 0,1\rangle$.

Definice 2.4 — otevřené a uzavřené množiny v metrickém prostoru. Buď (M,ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A^\circ = A$, množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže $\overline{A} = A$.

■ **Věta 2.5.** *Buď (M,ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Množina A je otevřená $\iff$ $M \setminus A$ je uzavřená. Množina A je uzavřená $\iff$ $M \setminus A$ je otevřená.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že pro každou $A \subseteq M$ platí $A^\circ = M \setminus \overline{M \setminus A}$. Skutečně, $x \in M \setminus \overline{M \setminus A} \iff x \notin \overline{M \setminus A} \iff \varepsilon := \rho(x, M \setminus A) > 0 \iff (y \in M \setminus A)(\rho(x,y) \geq \varepsilon) \iff O_\varepsilon(x) \cap (M \setminus A) = \emptyset \iff O_\varepsilon(x) \subseteq A \iff x \in A^\circ$.

Nechť A je otevřená, tj. $A = A^\circ$. Podle výše dokázaného tedy platí $A = M \setminus \overline{M \setminus A}$. Odtud plyne, že $M \setminus A = M \setminus (M \setminus \overline{M \setminus A})$. Protože pro každou podmnožinu $B \subseteq M$ platí $M \setminus (M \setminus B) = B$, platí z předchozí rovnosti, že $M \setminus A = \overline{M \setminus A}$, tj. $M \setminus A$ je uzavřená.

Nechť naopak $M \setminus A$ je uzavřená, tj. $M \setminus A = \overline{M} \setminus A$. Pak podle první části máme $A^\circ = M \setminus \overline{M \setminus A} = M \setminus (M \setminus A) = A$.

Platnost druhého tvrzení by se ukázala analogicky. □

Poznámka 2.6. a) Lze ukázat, že v každém metrickém prostoru (M, ρ) pro libovolnou $A \subseteq M$ platí $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, a tedy A° je vždy otevřená a $\overline{A}$ je vždy uzavřená.

b) Obecně $\overline{B_r(a)} \neq B_r[a]$, např. je-li (M, ρ) diskrétní, $a \in M$, $r = 1$, potom $B_1(a) = \{a\}$ a tedy $\overline{B_1(a)} = \{a\}$, avšak $B_1[a] = M$.

c) Platí $\emptyset^\circ = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, a tedy $\emptyset$ je v jakémkoliv metrickém prostoru otevřená i uzavřená zároveň. Podle předchozí věty je pak celá M také otevřená i uzavřená zároveň.

Definice 2.7 — indukované metriky a metrického podprostoru. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Metriku ρ_A, definovanou jako $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$ pro $\forall x, y \in A$, nazýváme *metrikou indukovanou na množině A metrikou ρ*. Metrický prostor (A, ρ_A) nazýváme *podprostorem metrického prostoru (M, ρ)*. Píšeme $(A, \rho_A) \subseteq (M, \rho)$.

Příklad 2.8. Uvažujeme-li $\mathbb{R}$ jako podmnožinu $\mathbb{R}^2$ (tj. reálná čísla ztotožníme s dvojicemi $(a, 0)$), pak každá z metrik ρ_i $(i = 1, 2, \infty)$ na $\mathbb{R}^2$ indukuje metriku $\rho(x, y) = |x - y|$ na $\mathbb{R}$.

Cvičení

2.1. Uveďte příklad takové množiny $A \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou jsou množiny A, A°, $\overline{A}$, $\left(\overline{A}\right)^\circ$ a $\overline{A^\circ}$ v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, |x - y|)$ vzájemně různé.

2.2. Rozhodněte, zda množina $A = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : |f(x)| < 1 \ \forall x \in \langle a, b\rangle\}$ je otevřená v metrickém prostoru $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$.

Výsledky. **2.2.** Ano.

3 Konvergence v metrickém prostoru

Definice 3.1 — konvergentní posloupnosti v metrickém prostoru. Buď (M, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M (tj. zobrazení $\mathbb{N} \to M$). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k bodu $x \in M$* (*je konvergentní v M*), jestliže $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ (zapisujeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, stručně $\lim x_n = x$ nebo $x_n \to x$).

Příklad 3.2. 1. (M, ρ) diskrétní (viz příklad 1.2.1): $x_n \to x \iff (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies x_n = x)$.

2. $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ (viz příklad 1.2.3): $[x_n, y_n] \to [x, y] \iff x_n \to x$, $y_n \to y$ v $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$.

   Důkaz. $0 = \lim(|x_n - x| + |y_n - y|) = \lim |x_n - x| + \lim |y_n - y|$. Protože, ale $\lim |x_n - x| \geq 0$, $\lim |y_n - y| \geq 0$, musí být $\lim |x_n - x| = 0$, $\lim |y_n - y| = 0$. □

   Analogické tvrzení platí pro všechny metrické prostory z příkladu 1.2.3.

3. $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$ (viz příklad 1.2.4):

   $$f_n \to f \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in \langle a, b\rangle) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

   Má-li posloupnost funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ vlastnost uvedenou na pravé straně ekvivalence, řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* na $\langle a, b\rangle$ k funkci f.

   Důkaz. Konvergence $f_n \to f$ v $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$ znamená:

   $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \rho_C(f_n, f) < \varepsilon \iff$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \langle a, b\rangle\} < \varepsilon \iff$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in \langle a, b\rangle) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Definice 3.3 — ohraničenosti posloupnosti. Buď (M, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená*, jestliže množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená ve smyslu definice 1.9.

■ Věta 3.4. *Buď (M, ρ) metrický prostor. Pak platí*

1. *Každá posloupnost $\{x_n\} \subseteq M$ má nejvýše jednu limitu v M.*
2. *Posloupnost konvergentní v (M, ρ) je ohraničená v (M, ρ).*
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M \iff$ *pro každou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybranou z $\{x_n\}$ platí* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Důkaz. Plyne z příslušných tvrzení v kapitole o posloupnostech, viz SA1. $\square$

Definice 3.5 — cauchyovské posloupnosti. Buď (M, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

■ Věta 3.6. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v (M, ρ), pak je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $x_n \to x$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro libovolné $m \geq n_0$ a libovolné $n \geq n_0$ tedy s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Poznámka 3.7. Obrácené tvrzení obecně neplatí. Např. pro $M = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale není konvergentní (protože $0 \notin M$).

■ Věta 3.8. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Množina A je uzavřená v (M, ρ) $\iff$ pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$ takovou, že $x_n \to x$, platí $x \in A$.*

Důkaz. „$\Longrightarrow$“ Nechť A je uzavřená, tj. $A = \overline{A}$ a nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost konvergující k $x \in M$. Kdyby $x \notin A$, pak by $\varepsilon := \rho(x, A) > 0$ a tedy pro každé x_n by platilo $\rho(x_n, x) \geq \varepsilon$, což by bylo ve sporu s $x_n \to x$.

„$\Longleftarrow$“ Nechť pro každou posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$, pro kterou $x_n \to x$, platí $x \in A$. Buď $y \in \overline{A}$ libovolný bod, tj. platí $\rho(y, A) = 0$. Ke každému $\frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in A$ takové, že $\rho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. To znamená, že pro takto vytvořenou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\lim \rho(x_n, y) = 0$, tj. $x_n \to y$. Z podmínky plyne, že $y \in A$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$. Protože však také $A \subseteq \overline{A}$, máme $A = \overline{A}$, tj. A je uzavřená. $\square$

Definice 3.9 — ekvivalentních metrik. Nechť M je množina a ρ, σ metriky na M. Řekneme, že ρ a σ jsou *ekvivalentní metriky na* M, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ platí: $x_n \to x$ v (M, ρ) $\iff x_n \to x$ v (M, σ).

Příklad 3.10. a) Metriky ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní, protože pro každou z těchto metrik platí, že $x_k \to x \iff x_i^k \to x_i$ v $(\mathbb{R}, |x - y|)$. To znamená, že $x_k \to x$ v $(\mathbb{R}^n, \rho_j)$, kde $j \in \{1, 2, \infty\} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) : |x_i^k - x_i| < \varepsilon$.

b) Metriky ρ_I a ρ_C na $C(\langle a, b\rangle)$ nejsou ekvivalentní.

Poznámka 3.11. Jsou-li ρ, σ ekvivalentní metriky na M, pak množina $A \subseteq M$ je uzavřená v (M, ρ) $\iff$ je uzavřená v (M, σ) a je otevřená v $(M, \rho) \iff$ je otevřená v (M, σ).

■ Věta 3.12. *Buďte ρ, σ metriky na M. Jestliže existují kladné konstanty a, b takové, že pro všechny dvojice bodů $[x, y] \in M^2$ je $a\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq b\sigma(x, y)$, pak jsou metriky ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť je splněna podmínka věty, $x \in M$, a nechť $\{x_n\} \subseteq M$ je taková posloupnost, že $\lim \sigma(x_n, x) = 0$. Pak $a\sigma(x_n, x) \le \rho(x_n, x) \le b\sigma(x_n, x)$ a z věty o 3 posloupnostech (viz věta 7.10 v SA1) plyne $\lim \rho(x_n, x) = 0$. Pokud bychom vyšli z posloupnosti, pro kterou $\lim \rho(x_n, x) = 0$, pak se důkaz provede stejně s využitím nerovnosti $\frac{1}{b}\rho(x, y) \le \sigma(x, y) \le \frac{1}{a}\rho(x, y)$, která je ekvivalentní s nerovností v podmínce věty. □

Poznámka 3.13. Pozor, obrácené tvrzení neplatí, tj. pokud jsou metriky ρ a σ na M ekvivalentní, tak ještě nemusí platit vlastnost z věty 3.12. Např., metriky ρ, σ na $\mathbb{R}$ definované $\rho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ jsou ekvivalentní, ale neexistují kladné konstanty a, b takové, aby byla splněna podmínka věty 3.12.

Cvičení

3.1. Na základě věty 3.8 ukažte, že množina $A = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : |f(x)| < 1\ \forall x \in \langle a, b\rangle\}$ nemůže být v metrickém prostoru $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$ uzavřená (viz také cvičení 2.2)

3.2. Na základě věty 3.12 rozhodněte, zda metriky ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ jsou na $\mathbb{R}^n$ vzájemně ekvivalentní.

Výsledky. **3.2.** Jsou, viz také příklad 3.10.

4 Úplné a kompaktní metrické prostory

Z předchozí sekce víme, že cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru nemusí mít limitu v tomto prostoru. Jinak řečeno, obecně neplatí Cauchyovo–Bolzanovo kritérium konvergence. Prostory, ve kterých každá cauchyovská posloupnost konvergentní je, se nazývají úplné.

Definice 4.1 — úplného metrického prostoru. Metrický prostor (M, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu.

Příklad 4.2. 1. Prostor $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ je úplný.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Cauchyova–Bolzanova kritéria konvergence, viz věta 7.27 v SA1. □

2. Prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ jsou úplné.

   Důkaz. V případě $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ cauchyovskost znamená, že pro $k, m \ge k_0$ je $\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^m| < \varepsilon$, z čehož plyne, že $|x_i^k - x_i^m| < \varepsilon\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a tedy každá $\{x_i^k\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, je cauchyovská v $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Podle Cauchyho–Bolzanova kritéria konvergence je však každá $\{x_i^k\}$ také konvergentní, tj. $\lim x_i^k = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Odtud plyne, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Protože metriky ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ jsou ekvivalentní, jsou úplné také prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$. □

3. $\mathbb{Q}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ není úplný. Např. $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, ale konverguje k e $\notin \mathbb{Q}$.
4. Lze ukázat, že $\big(C(\langle a, b\rangle), \rho_C\big)$ je úplný, ale $\big(C(\langle a, b\rangle), \rho_I\big)$ úplný není. Stačí vzít např. posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in \langle -1, -1/n) \,, \\ nx & \text{pro } x \in \langle -1/n, 1/n\rangle \,, \\ 1 & \text{pro } x \in (1/n, 1\rangle \,. \end{cases}$$

   Posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v $\big(C(\langle -1, 1\rangle), \rho_I\big)$, ale limita není spojitá funkce a tedy nepatří do $C(\langle -1, 1\rangle)$.

■ **Věta 4.3.** *Je-li metrický prostor (M, ρ) úplný a množina $A \subseteq M$ je uzavřená, pak metrický prostor (A, ρ_A) (ρ_A je metrika indukovaná metrikou ρ) je úplný.*

Důkaz. Buď $\{x_n\} \subseteq A$ libovolná cauchyovská posloupnost. Poněvadž (M, ρ) je úplný, existuje $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$. Podle věty 3.8 je však $x \in A$. □

Podíváme-li se na důkaz I. Weierstrassovy věty (viz věta 13.11 v SA1), stěžejním krokem bylo, že z posloupnosti bodů v uzavřeném intervalu je možné vybrat konvergentní podposloupnost. Tato vlastnost je podstatou tzv. kompaktních metrických prostorů.

Definice 4.4 — kompaktního metrického prostoru a kompaktní množiny v metrickém prostoru. Řekneme, že metrický prostor (M, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat posloupnost konvergentní. Řekneme, že množina $A \subseteq M$ je *kompaktní*, jestliže podprostor (A, ρ_A) je kompaktní.

Věta 4.5. *Je-li A kompaktní množina v metrickém prostoru (M, ρ), pak je A uzavřená a ohraničená v tomto prostoru.*

Důkaz. Uzavřenost sporem: Připusťme, že A není uzavřená, tj. $A \neq \overline{A}$, tedy že existuje $x \in \overline{A} \setminus A$. Protože $\rho(x, A) = 0$, existuje posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$ tak, že $\rho(x_n, x) \to 0$, neboli $x_n \to x$. Pro každou vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ je podle věty 3.4.3 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \notin A$, což je spor s kompaktností A.

Ohraničenost sporem: Připusťme, že A není ohraničená, tj. $d(A) = \infty$. Sestrojme posloupnost $\{x_n\}$ takto. Bod $x_1 \in A$ vybereme libovolně a nechť $x_2 \in A$ je takové, že $\rho(x_1, x_2) \geq 1$ (takové x_2 jistě existuje, protože A je neohraničená). Bod $x_3 \in A$ vybereme tak, aby jeho vzdálenost od obou x_1 a x_2 byla větší nebo rovna 1 (tento bod opět existuje z důvodu neohraničenosti). Pokračujeme tak, aby bod x_n měl vzdálenost větší nebo rovnu jedna od všech předchozích bodů. Posloupnost $\{x_n\}$ i každá posloupnost z ní vybraná není cauchyovská, neboť $\rho(x_n, x_m) \geq 1$ pro $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, a tedy podle věty 3.6 nemůže být konvergentní. To je ale spor s kompaktností A. □

Věta 4.6. *V prostorech $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$, kde $i = 1, 2, \infty$, platí i opačné tvrzení. Máme tedy: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\iff$ je v tomto prostoru uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Nutnost podmínky plyne z věty 4.5. Dokažme její dostatečnost. Uvažujme nejprve metriku ρ_1. Buď $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost bodů z A. Poněvadž A je ohraničená, je každá z číselných posloupností $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots, n$ také ohraničená, a tedy lze z každé z nich vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_i^{k_{\ell_i}}\}_{\ell_i=1}^{\infty}$ konvergující k $x_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ (viz věta 7.22 v SA1). To znamená, že každá posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ má podvýběr konvergující k bodu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Protože však A je uzavřená, musí podle věty 3.8 být $x^0 \in A$. Jinak řečeno, každá posloupnost z A obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v A, což je požadavek v definici kompaktnosti. Z ekvivalence metrik ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ plyne tvrzení i pro prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$. □

Věta 4.7. *Je-li metrický prostor (M, ρ) kompaktní, pak je úplný.*

Důkaz. Buď $\{x_n\}$ libovolná cauchyovská posloupnost v (M, ρ). Poněvadž (M, ρ) je kompaktní, existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in M$. Ukažme, že $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Posloupnost $\{x_{n_k}\}$ konverguje k x, což znamená, že k $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq k_0$ je $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $\{x_n\}$ je cauchyovská, k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n, m \geq n_1$ platí $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ a nechť $n \geq n_0$ a $k \geq k_0$ jsou libovolná čísla. Pak také $n_k \geq n_0$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což znamená, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Cvičení

4.1. Nechť ρ je metrika na $\mathbb{R}$ definována:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } |x - y| \text{ iracionální,} \\ 1/2 & \text{je-li } |x - y| \text{ racionální nenulové,} \\ 0 & \text{je-li } x = y. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda $(\mathbb{R}, \rho)$ je úplný (rozmyslete si také, proč ρ je skutečně metrikou).

4.2. Dokažte, že diskrétní metrický prostor (M, ρ) je kompaktní $\iff$ M je konečná. *Nápověda.* Implikaci „$\Longrightarrow$" dokazujte sporem (připusťte, že M není konečná).

Výsledky. **4.1.** Je úplný.

5 Zobrazení metrických prostorů

Definice 5.1 — izometrického zobrazení. Nechť (M, ρ) a (N, σ) jsou metrické prostory a $F : M \to N$ je zobrazení (s $D(F) = M$, tj. zobrazení množiny M do N). Zobrazení F se nazývá *izometrické*, jestliže $\forall x, y \in M$ platí

$$\sigma(F(x), F(y)) = \rho(x, y).$$

Poznámka 5.2. Izometrické zobrazení je vždy prosté (kdyby existovaly v M body $x \neq y$ takové, že $F(x) = F(y)$, pak by podle (m1) a definice izometrie platilo $0 = \sigma(F(x), F(y)) = \rho(x, y) \neq 0$, což je spor). Je-li zobrazení také surjekce, pak existuje inverzní zobrazení $F^{-1} : N \to M$ (s $D(F^{-1}) = N$), které je opět izometrické (v takovém případě řekneme, že (M, ρ) a (N, σ) jsou *izometrické prostory*). Např. všechna shodná zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (posunutí, osová či středová souměrnost, otočení) jsou izometrická zobrazení.

Definice 5.3 — spojitého zobrazení mezi metrickými prostory. Buďte (M, ρ), (N, σ) metrické prostory a $F : M \to N$ zobrazení. Řekneme, že F je *spojité v bodě* $x_0 \in M$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in O_\delta(x_0)$ v (M, ρ) platí $F(x) \in O_\varepsilon(F(x_0))$ v (N, σ). Řekneme, že zobrazení *F je spojité na M*, jestliže je spojité v každém bodě $x \in M$.

■ **Věta 5.4 — Heineho podmínka.** *Nechť (M, ρ), (N, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $F : M \to N$ je spojité v bodě $x_0 \in M$ $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z M takovou, že $x_n \to x_0$ v (M, ρ) platí $F(x_n) \to F(x_0)$ v (N, σ).*

■ **Věta 5.5.** *Nechť (M, ρ), (N, σ) jsou metrické prostory, $A \subseteq M$ a $F : M \to N$ spojité zobrazení na M. Je-li množina A kompaktní (v (M, ρ)), pak je i množina $F(A)$ kompaktní (v (N, σ)).*

■ **Důsledek 5.6 — I. a II. Weierstrassova věta.** *Reálná funkce f spojitá na uzavřeném intervalu je zde ohraničená a nabývá svého maxima a minima.*

Důkaz. Uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ je podle věty 4.6 kompaktní v $(\mathbb{R}, |x - y|)$ a podle věty 5.5 je kompaktní také obraz $f(\langle a, b\rangle)$. I. Weierstrassova věta nyní plyne z faktu, že kompaktní množina v každém metrickém prostoru je ohraničená (viz věta 4.5). II. Weierstrassova věta (tj. skutečnost, že f za daných předpokladů nabývá svého maxima a minima) plyne z následující úvahy. Protože $f(\langle a, b\rangle)$ je ohraničená, existuje supremum množiny $f(\langle a, b\rangle)$. Z vlastnosti suprema plyne, že k $1/n$ existuje $y_n \in f(\langle a, b\rangle)$ takové, že $\sup f(\langle a, b\rangle) - 1/n < y_n$, a tedy $\lim_{n\to\infty} y_n = \sup f(\langle a, b\rangle)$. Protože množina $f(\langle a, b\rangle)$ je (opět podle věty 4.5) uzavřená, platí podle věty 3.8, že $\sup f(\langle a, b\rangle) \in f(\langle a, b\rangle)$, tj. $\sup f(\langle a, b\rangle) = \max f(\langle a, b\rangle)$. Analogicky by se ukázalo, že f nabývá na $\langle a, b\rangle$ i své nejmenší hodnoty. □

Definice 5.7 — stejnoměrně spojitého zobrazení. Nechť (M,ρ), (N,σ) jsou metrické prostory a $F: M \to N$ zobrazení. Řekneme, že F je *stejnoměrně spojité na* M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x, y \in M$ splňující $\rho(x,y) < \delta$ platí $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$.

Poznámka 5.8. Stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.

■ **Věta 5.9 — Heineova–Cantorova.** *Buď (M,ρ) kompaktní metrický prostor, (N,σ) metrický prostor a $F: M \to N$ spojité zobrazení. Pak F je stejnoměrně spojité.*

Definice 5.10 — lipschitzovského zobrazení a kontrakce. Buďte (M,ρ), (N,σ) metrické prostory a $F: M \to N$ zobrazení. Řekneme, že F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro $\forall x, y \in M$ je $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x,y)$. Konstanta L se nazývá *Lipschitzova*[6]*konstanta*. Řekneme, že zobrazení F je *kontrakce*, je-li lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

■ **Věta 5.11.** *Nechť (M,ρ), (N,σ) jsou metrické prostory a $F: M \to N$ zobrazení. Je-li F lipschitzovské, pak je stejnoměrně spojité (a tedy také spojité).*

Důkaz. Nechť F je lipschitzovské s konstantou L. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta = \varepsilon/L$. Jsou-li $x, y \in M$ libovolné body takové, že $\rho(x,y) < \delta$, pak $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x,y) < L\delta = L\varepsilon/L = \varepsilon$. □

Příklad 5.12. Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$, která má derivaci na (a,b). Pak f je lipschitzovská na $\langle a,b \rangle \iff f'$ je na (a,b) ohraničená.

Důkaz. „$\Longleftarrow$“: Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz věta 16.2 v SA1) ke každým $x, y \in \langle a,b \rangle$ existuje $\xi \in (x,y)$ takové, že $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$. Odtud $|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y-x| \leq L|y-x|$.
„$\Longrightarrow$“: Protože f je lipschitzovská na $\langle a,b \rangle$, platí $|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$ pro $x, y \in \langle a,b \rangle$. Buď $x \in (a,b)$ libovolné a y pišme ve tvaru $y = x + h$, kde $h \in (a-x, b-x)$. Potom lze podmínku přepsat jako $|f(x+h) - f(x)| \leq L|x+h-x| = L|h|$, což je v případě $h \neq 0$ ekvivalentní podmínce

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq L.$$

Odtud

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = |f'(x)| \leq \lim_{h\to 0} L = L,$$

tj. f' je na (a,b) ohraničená. □

Definice 5.13 — limity zobrazení mezi metrickými prostory. Buďte (M,ρ), (N,σ) metrické prostory, $F: M \to N$ zobrazení a $x_0 \in M$ hromadný bod množiny M. Řekneme, že zobrazení F má v bodě $x_0 \in M$ *limitu* $y_0 \in N$ a píšeme $\lim_{x\to x_0} F(x) = y_0$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in O^*_\delta(x_0)$ v (M,ρ) platí $F(x) \in O_\varepsilon(y_0)$ v (N,σ).

Poznámka 5.14. a) Pozor, limitu lze (narozdíl od spojitosti) uvažovat pouze v hromadných bodech množiny M!

b) Jestliže má zobrazení F v bodě $x_0 \in M$ limitu $F(x_0)$, pak je v tomto bodě spojité.

Definice 5.15 — pevného bodu zobrazení. Nechť M je množina a $F: M \to M$. Bod $x \in M$ se nazývá *pevný bod zobrazení* F, jestliže $F(x) = x$.

[6] Rudolf Lipschitz 1832–1903, Němec

■ **Věta 5.16 — Banachova[7] věta o pevném bodu.** *Nechť* (M, ρ) *je úplný metrický prostor a* $F : M \to M$ *kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení* F*. Navíc, tento pevný bod je limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde* $x_1 \in M$ *je libovolný bod a* $x_{n+1} = F(x_n)$*,* $n = 1, 2, \ldots$*.*

Důkaz. a) Nejdříve ukažme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(F(x_{n-1}), F(x_n)) \le L\rho(x_{n-1}, x_n)\\ &= L\rho(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) \le L^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \cdots \le L^{n-1}\rho(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Odtud a z (m3) plyne, že pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}&\rho(x_n, x_{n+m}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m})\\ &\le L^{n-1}\rho(x_1, x_2) + L^n\rho(x_1, x_2) + L^{n+1}\rho(x_1, x_2) + \cdots + L^{n+m-2}\rho(x_1, x_2)\\ &= (L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{n+m-2})\rho(x_1, x_2)\\ &= (1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-1})L^{n-1}\rho(x_1, x_2) = \frac{1 - L^m}{1 - L}L^{n-1}\rho(x_1, x_2) \le L^{n-1}\frac{\rho(x_1, x_2)}{1 - L} \to 0\end{aligned}$$

pro $n \to \infty$, neboť $L^{n-1} \to 0$ pro $n \to \infty$, tj. $\{x_n\}$ je cauchyovská.

b) Protože (M, ρ) je úplný, existuje $\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \in M$.

c) Ukažme, že x_* je pevný bod F. Platí

$$\begin{aligned}\rho(x_*, F(x_*)) &\le \rho(x_*, x_n) + \rho(x_n, F(x_*))\\ &= \rho(x_*, x_n) + \rho(F(x_{n-1}), F(x_*)) \le \rho(x_*, x_n) + L\rho(x_{n-1}, x_*) \to 0\end{aligned}$$

pro $n \to \infty$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_*, x_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_{n-1}, x_*) = 0$$

pro $n \to \infty$. Tedy $\rho(x_*, F(x_*)) = 0$ a podle (m1) je $F(x_*) = x_*$.

d) Jako poslední krok ukažme jednoznačnost pevného bodu. Předpokládejme, že existuje pevný bod $x_{**} \ne x_*$ zobrazení F. Pak $\rho(x_{**}, x_*) = \rho(F(x_{**}), F(x_*)) \le L\rho(x_{**}, x_*)$. Odtud plyne, že $(1 - L)\rho(x_{**}, x_*) \le 0$ a poněvadž $0 < L < 1$, musí být $\rho(x_{**}, x_*) = 0$, tj. $x_{**} = x_*$. □

Cvičení

5.1. Uvažujte metrické prostory $(C(\langle -1, 1\rangle), \rho_I)$ a $(C(\langle -1, 1\rangle), \sigma)$, kde

$$\sigma(f, g) = \int_{-1}^{1} x^2|f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dále, nechť $F : C(\langle -1, 1\rangle) \to C(\langle -1, 1\rangle)$ je zobrazení definované

$$F(f)(x) = kf(x^3).$$

Určete konstantu k tak, aby F bylo izometrické.

5.2. Uvažujte metrické prostory $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$, $(\mathbb{R}, |x - y|)$ a zobrazení $F : C(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}$ definované

$$F(f) = f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Ukažte, že F je na $C(\langle a, b\rangle)$ spojité.

5.3. Ukažte, že Newtonova metoda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(tato metoda hledá numericky kořen rovnice $f(x) = 0$) konverguje ke kořenu $x_* = \sqrt{3}$ pro funkci $f(x) = x^2 - 3$ a libovolný startovací bod $x_1 \in \langle\sqrt{3}, \infty)$.

[7] Stefan Banach 1892–1945, Polák

Výsledky. **5.1.** $k = \pm 3$.

Kapitola 2

Diferenciální počet funkce více proměnných

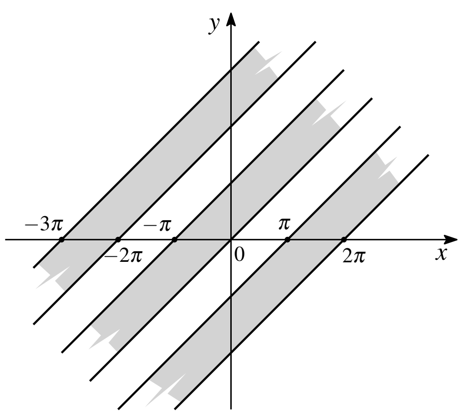
6 Funkce více proměnných, spojitost a limita

Definice 6.1 — funkce n proměnných. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme *(reálnou) funkcí n (reálných) proměnných*. Množina $D(f) := \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}$ tak, že $[x_1, x_2, \dots, x_n, y] \in f\}$ se nazývá *definiční obor* funkce f, množina $H(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ tak, že $[x_1, x_2, \dots, x_n, y] \in f\}$ se nazývá *obor hodnot*. Zapisujeme: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, stručně $y = f(X)$. Pro $n = 2$: $z = f(x, y)$, pro $n = 3$: $u = f(x, y, z)$, atp. *Grafem funkce n proměnných* nazveme množinu $G(f) := \{[X, f(X)] \in \mathbb{R}^{n+1} : X \in D(f)\}$.

Poznámka 6.2. Není-li definiční obor zadán, považujeme za něj množinu všech $X \in \mathbb{R}^n$, pro která má daný předpis smysl.

Příklad 6.3. Načrtněte $D(f)$ funkce $f(x, y) = \sqrt{\sin(y - x)}$.

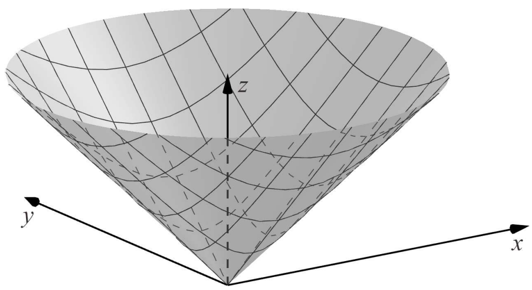
Řešení. Jedinou podmínkou je nezápornost výrazu pod odmocninou, tj. definiční obor obdržíme z podmínky $\sin(y - x) \geq 0$. Ta je ekvivalentní podmínce $2k\pi \leq y - x \leq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Máme tedy $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi \leq y - x \leq (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, viz obrázek 6.1.



Obrázek 6.1: Naznačení definičního oboru funkce $f(x, y) = \sqrt{\sin(y - x)}$ („pruhy“ se periodicky opakují)

Příklad 6.4. Načrtněte graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení. Řezy plochy s rovinami rovnoběžnými se souřadnými rovinami xz a yz jsou hyperboly ležící (ve zmíněných souřadných rovinách pak přejdou v asymptoty těchto hyperbol). Řezy plochy s rovinami rovnoběžnými se souřadnou rovinou xy jsou pak kružnice se středem v počátku. Grafem je tedy polovina rotační kuželové plochy (hodnota $z = f(x, y)$ je podle zadání nezáporná) s osou rotace v ose z, viz obrázek 6.2.



Obrázek 6.2: Kuželová plocha (graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$)

Uvažujeme-li na množině $\mathbb{R}^n$ některou z ekvivalentních metrik $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ a na množině $D(f)$ potom příslušnou indukovanou metriku, pak funkci n proměnných lze považovat za zobrazení metrického prostoru $(D(f), \rho_i)$ na metrický prostor $(H(f), |x - y|)$. O funkci f řekneme, že je spojitá (resp. stejnoměrně spojitá, resp. lipschitzovská), je-li toto zobrazení spojité (resp. stejnoměrně spojité, resp. lipschitzovské). Lze použít všechna tvrzení z předchozí kapitoly. Nebude-li řečeno jinak, budeme používat maximální metriku ρ_∞. V tomto případě

$$O(X) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$$

a $O^*(X) = O(X) \setminus \{X\}$.

Limitu funkce n proměnných bychom zavedli jako v definici 5.13. Pokud chceme pojem rozšířit i na „nevlastní případ“, je potřeba uvažovat také okolí nevlastních bodů (nevlastním bodem rozumíme bod $X = [x_1, \dots, x_n]$, kde alespoň jedna složka $x_i = \pm\infty$). Je-li $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in (\mathbb{R}^*)^n$ nevlastní bod, pak klademe

$$O^*(X) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

kde

$$a_i = \begin{cases} x_i - \varepsilon & \text{pro } x_i \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{pro } x_i = -\infty \\ c \in \mathbb{R} & \text{pro } x_i = \infty \end{cases}, \quad b_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon & \text{pro } x_i \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{pro } x_i = \infty, \\ c \in \mathbb{R} & \text{pro } x_i = -\infty \end{cases}.$$

Okolí nevlastního bodů je vždy ryzí. Pokud X je nevlastní bod a pro každé okolí $O(X)$ platí $O(X) \cap D(f) \neq \emptyset$, pak X lze považovat za hromadný bod $D(f)$.

Definice 6.5 — limity funkce n proměnných. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce a X_0 je hromadný bod $D(f)$. Řekneme, že f má v bodě X_0 limitu $a \in \mathbb{R}^*$ (píšeme $\lim_{X \to X_0} f(X) = a$), jestliže ke každému okolí $O(a)$ existuje okolí $O^*(X_0)$ takové, že pro každé $X \in O^*(X_0) \cap D(f)$ platí $f(X) \in O(a)$.

■ **Vlastnosti .** 1. *Funkce f má v X_0 nejvýše jednu limitu.*

2. *Má-li f v bodě X_0 limitu $a \in \mathbb{R}$, pak existuje $O^*(X_0)$ takové, že f je na $O^*(X_0) \cap D(f)$ ohraničená (funkci nazveme ohraničenou na množině $A \subseteq D(f)$, je-li ohraničená množina $f(A)$ coby podmnožina $\mathbb{R}$).*
3. *Nechť $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = 0$ a existuje $O^*(X_0)$ takové, že funkce g je na $O^*(X_0) \cap D(f)$ ohraničená. Pak*

$$\lim_{X \to X_0} f(X)g(X) = 0.$$

4. *Nechť* $\lim_{X\to X_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{X\to X_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. *Pak platí:* $\lim_{X\to X_0} |f(X)| = |a|$, $\lim_{X\to X_0} (f(X) \pm g(X)) = a \pm b$,
$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = ab, \quad \text{je-li navíc } b \neq 0, \text{ pak } \lim_{X\to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{a}{b}, \quad a \leq b, \text{ je-li } f(X) \leq g(X)$$
na nějakém $O^*(X_0) \cap D(f)$.
5. *Nechť existuje okolí* $O^*(X_0)$ *takové, že pro každé* $X \in O^*(X_0) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ *platí* $f(X) \leq g(X) \leq h(X)$. *Jestliže* $\lim_{X\to X_0} f(X) = \lim_{X\to X_0} h(X) = a \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$.
6. *Limita složené funkce I: Nechť* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a nechť existuje složená funkce* $f \circ \varphi$ *na* $O^*(X_0)$, *přičemž* $\lim_{X\to X_0} \varphi(X) = a \in \mathbb{R}$ *a funkce* f *je spojitá v bodě* a. *Potom*
$$\lim_{X\to X_0} f(\varphi(X)) = f\big(\lim_{X\to X_0} \varphi(X)\big) = f(a).$$
7. *Limita složené funkce II: Nechť funkce* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je definována na nějakém* $O^*(X_0)$, *kde* $X_0 \in (\mathbb{R}^*)^n$, *platí* $\lim_{X\to X_0} \varphi(X) = b$ *a* $\varphi(X) \neq b$ *pro každé* $X \in O^*(X_0)$. *Je-li* $\lim_{t\to b} = a$, *pak*
$$\lim_{X\to X_0} f\big(\varphi(X)\big) = a.$$
8. *Heineho podmínka:* $\lim_{X\to X_0} f(X) = a \iff \forall \{X_n\} \subseteq D(f),\ X_n \to X_0,\ X_n \neq X_0,$ *platí* $f(X_n) \to a$.

Výpočet limity funkce dvou a více proměnných obvykle není jednoduchý, zejména nemáme analogii l'Hospitalova pravidla!

Příklad 6.6. Vypočítejte

$$\text{a)} \lim_{[x,y]\to[2,3]} \frac{x+7}{x-y+2}, \quad \text{b)} \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}, \quad \text{c)} \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Řešení. ad a) Přímým dosazením (jedná se o podíl dvou polynomů prvního stupně) máme
$$\lim_{[x,y]\to[2,3]} \frac{x+7}{x-y+2} = 9.$$
ad b) Úpravou výrazu:
$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{2}{3}.$$
ad c) V tomto případě lze danou limitu převést na limitu funkce jedné proměnné (k tomu nás opravňuje sedmý bod vlastností limity):
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{c} x^2+y^2=t \\ t\to 0+ \end{array} \right| = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Příklad 6.7. Dokažte, že limity a) $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$, b) $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ neexistují.

Řešení. ad) Uvažujeme-li funkci pouze nad svazkem přímek $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, pak limity funkce nad jednotlivými přímkami vedou na
$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$
Nad každou přímkou by tedy hodnota limity byla jiná, což je spor s jednoznačností limity. Limita tedy neexistuje.

ad b) Vyzkoušíme-li podobně jako v příkladu a) svazek přímek $y = kx$, zjistíme, že všechny limity funkce nad těmito přímkami jsou nulové. To nám existenci limity nevyvrátí, ale ani nepotvrdí. Podobně, svazek parabol $y = kx^2$ také vede na nulové limity. Až svazek kubických parabol $y = kx^3$, $k \in \mathbb{R}$ vede na

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx^6}{x^6 + k^2x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2},$$

což existenci limity vyloučí.

Příklad 6.8. Vyšetřte limitu

$$\lim_{[x,y] \to [0,0]} \frac{3x^2}{y^2 - 5x + 3y}.$$

Řešení. Metodou svazku přímek $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{k^2x^2 - 5x + 3kx} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{k^2x - 5 + 3k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq 5/3, \\ 27/25 & \text{pro } k = 5/3. \end{cases}$$

Protože pro jednu přímku vychází hodnota limity jinak než pro ostatní, limita zadané funkce neexistuje.

Příklad 6.9. Vyšetřete limitu

$$\lim_{[x,y] \to [\infty,\infty]} (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}.$$

Řešení. Platí

$$0 \le (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)} = x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-y} + y^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-y} \le x^2\,\mathrm{e}^{-x} + y^2\,\mathrm{e}^{-y} \qquad \forall x \ge 0,\ \forall y \ge 0.$$

Protože

$$\lim_{t \to \infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = 0 \quad \text{(použili jsme 2x l'Hospitalovo pravidlo)},$$

funkce $x^2\,\mathrm{e}^{-x} + y^2\,\mathrm{e}^{-y}$ na pravé straně druhé nerovnosti konverguje k nule pro $[x, y] \to [\infty, \infty]$. Podle věty o třech limitách je tedy limita zadané funkce také nula.

■ **Věta 6.10.** *Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $r^* > 0$ a funkce $g : (0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ taková, že $\lim_{r \to 0+} g(r) = 0$ a $|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - a| \le g(r)$ pro každé $r \in (0, r^*)$ a každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\lim_{r \to 0+} g(r) = 0$, existuje $\delta^* > 0$ takové, že pro $\forall r \in (0, \delta^*)$ platí $0 \le g(r) < \varepsilon$. Uvažujeme-li na $\mathbb{R}^2$ metriku ρ_2, pak také $\forall [x, y] \in O^*_\delta([x_0, y_0])$, kde $\delta = \delta^*$ pro $\delta^* \le r^*$ a $\delta = r^*$ pro $\delta^* > r^*$, platí $|f(x, y) - a| < \varepsilon$, tj.

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = a.$$

□

Příklad 6.11. Vyšetřete $\displaystyle\lim_{[x,y] \to [0,1]} \frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$.

Řešení. Máme

$$\left.\frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}\right|_{x = r\cos\varphi,\ y = 1 + r\sin\varphi} = \frac{r^2 + r^3\sin^3\varphi}{r^2} = 1 + r\sin^3\varphi.$$

Odtud,

$$\Big|\underbrace{1 + r\sin^3\varphi}_{f(r\cos\varphi,1+r\sin\varphi)} - \underbrace{1}_{a}\Big| \le \underbrace{r}_{g(r)} \to 0 \quad \text{pro} \quad r \to 0.$$

Hledanou limitou je tedy číslo 1.

Poznámka 6.12. Vztah spojitosti a limity v bodě je nyní následující. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je v bodě $X_0 \in D(f)$ spojitá, jestliže $\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$. Jsou-li všechny body $D(f)$ hromadné, tak platí i opačné tvrzení.

Cvičení

6.1. Načrtněte $D(f)$ funkcí

$$\text{a)}\quad f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-y^2}, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2},$$
$$\text{c)}\quad f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.$$

6.2. Pomocí metody řezů načrtněte $G(f)$ funkcí

$$\text{a)}\quad f(x,y) = \frac{1}{2x^2+3y^2}, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}.$$

6.3. Vyšetřete následující limity:

$$\text{a)}\quad \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{4x^2-3y^2}{2x^2+3y^2}, \qquad \text{b)}\quad \lim_{[x,y]\to[-1,-1]} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2},$$
$$\text{c)}\quad \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2-y^2}{x^2+3x-3y-xy}, \qquad \text{d)}\quad \lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

(využijte nejprve substituce $u = 1/x$, $v = 1/y$ a poté substituci do polárních souřadnic),

$$\text{e)}\quad \lim_{[x,y]\to[0,0]} xy^2 \cos\frac{1}{x^2y}, \qquad \text{f)}\quad \lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{\sin xy}{x},$$
$$\text{g)}\quad \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2},$$

6.4. Zjistěte, zda funkce f je spojitá v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Výsledky. **6.3.** a) neexistuje; b) -4; c) $4/5$; d) 0; e) 0; f) 2; g) ∞. **6.4.** Je.

7 Parciální a směrová derivace, gradient

Definice 7.1 — parciálních derivací funkce dvou proměnných. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce a $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod $D(f)$. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$* (značíme $f'_x(x_0, y_0)$, nebo $f_x(x_0, y_0)$, nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. To znamená, že

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$* (značíme $f'_y(x_0, y_0)$, nebo $f_y(x_0, y_0)$, nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$). Má-li funkce f parciální derivace podle x ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq D(f)$, je tato parciální derivace sama funkcí (značíme f'_x, f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$), analogicky pro f'_y.

Poznámka 7.2. a) Analogicky pro $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definujeme $f'_{x_i}(X_0):=\varphi'_i(x_i^0)$, kde

$$\varphi_i(x_i):=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0).$$

b) Pravidlo pro výpočet je snadné, derivujeme jako funkci jedné proměnné, ostatní proměnné považujeme za parametry.

c) Lze tedy použít všechna pravidla pro derivování jako u funkce jedné proměnné.

d) Pozor, v případě funkce jedné proměnné platilo, že funkce mající derivaci v bodě musí být spojitá v tomto bodě. Toto pravidlo pro funkce dvou a více proměnných obecně neplatí, např.

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{pro } xy=0\\ 0 & \text{pro } xy\neq 0\end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ parciální derivace $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$, ale funkce v tomto bodě není spojitá.

Příklad 7.3. Určete parciální derivace funkce $f(x,y,z)=x^y\ln(x+z^2)$.

Řešení.

$$f'_x=yx^{y-1}\ln(x+z)+x^y\frac{1}{x+z^2},\quad f'_y=x^y\ln x\ln(x+z^2),\quad f'_z=x^y\frac{2z}{x+z^2}.$$

■ **Věta 7.4 — o střední hodnotě.** *Nechť funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má obě parciální derivace ve všech bodech množiny $\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle\subseteq D(f)$. Pak existují čísla $\xi\in(a_1,b_1)$, $\eta\in(a_2,b_2)$ taková, že*

$$f(b_1,b_2)-f(a_1,a_2)=f'_x(\xi,a_2)(b_1-a_1)+f'_y(b_1,\eta)(b_2-a_2).$$

Důkaz. S využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci jedné proměnné (viz věta 16.2 v SA1) dostaneme

$$\begin{aligned}f(b_1,b_2)-f(a_1,a_2)&=f(b_1,b_2)-f(b_1,a_2)+f(b_1,a_2)-f(a_1,a_2)\\&=f'_y(b_1,\eta)(b_2-a_2)+f'_x(\xi,a_2)(b_1-a_1).\end{aligned}$$

□

Definice 7.5 — druhých parciálních derivací. Nechť funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má obě parciální derivace na otevřené množině $M\subseteq D(f)$ a $[x_0,y_0]\in M$. Existuje-li parciální derivace funkce f'_x podle proměnné x v bodě $[x_0,y_0]$, nazveme tuto derivaci *druhou parciální derivací (nebo parciální derivací 2. řádu) funkce f podle x v bodě $[x_0,y_0]$* a značíme $f''_{xx}(x_0,y_0)$, nebo $f_{xx}(x_0,y_0)$, nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$. Existuje-li parciální derivace funkce f'_x podle y v bodě $[x_0,y_0]$, nazveme tuto derivaci *druhou smíšenou parciální derivací funkce f v bodě $[x_0,y_0]$* a značíme $f''_{xy}(x_0,y_0)$, nebo $f_{xy}(x_0,y_0)$, nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$. Analogicky pro derivace funkce f'_y.

Poznámka 7.6. a) Podobně bychom definovali druhé parciální derivace funkce tří a více proměnných, jejich počet je n^2, kde n je počet proměnných.

b) Parciální derivace m-tého řádu ($m\geq 3$) definujeme jako parciální derivace derivací $(m-1)$-tého řádu. Jejich počet je n^m (variace s opakováním).

Příklad 7.7. Určete všechny druhé parciální derivace funkce $f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$.

Řešení. $f'_x=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}$, $f'_y=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}$, $f''_{xx}=-\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y^2}$, $f''_{xy}=-\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^3}+\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{-1}{y^2}$, $f''_{yx}=-\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^3}+\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{-1}{y^2}$, $f''_{yy}=-\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2}{y^4}+\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{2x}{y^3}$. Vidíme, že smíšené derivace f''_{xx} a f''_{yy} se rovnají, to není náhoda, ale také to nenastane úplně vždy, viz následující věta.

■ **Věta 7.8 — Schwarzova.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na okolí bodu $[x_0, y_0]$, které jsou v bodě $[x_0, y_0]$ spojité. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Poznámka 7.9. Bez předpokladu spojitosti rovnost smíšených derivací obecně neplatí, např. pro funkci f definovanou

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

dostaneme $f''_{xy}(0,0) = -1$ a $f''_{yx}(0,0) = 1$ (smíšené derivace na okolí bodu $[0,0]$ existují, ale nejsou v bodě $[0,0]$ spojité).

■ **Důsledek 7.10.** *Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace až do druhého řádu na otevřené množině $M \subseteq D(f)$, pak jsou zde smíšené derivace záměnné, tj. $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ pro každé $[x,y] \in M$.*

Poznámka 7.11. Tvrzení platí i pro smíšené derivace funkce tří a více proměnných a matematickou indukcí jej můžeme rozšířit i pro derivace vyšších řádů: Má-li funkce f spojité parciální derivace až do řádu m na otevřené množině $M \subseteq D(f)$, pak hodnota parciální derivace řádu m v libovolném bodě z množiny M závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle i-té proměnné ($i = 1, 2, \dots, n$), nikoliv na pořadí, v jakém se derivovalo. Považujeme-li smíšené derivace za totožné, pak se počet parciálních derivací redukuje na $\binom{n+m-1}{m}$ (kombinace s opakováním).

Definice 7.12 — směrové derivace. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce, $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod množiny $D(f)$ a $\vec{s} = (s_1, s_2)$ je vektor v $\mathbb{R}^2$. Položme $\varphi(t) = f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazýváme ji *směrovou derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru vektoru $\vec{s}$* a označujeme $f'_{\vec{s}}(x_0, y_0)$ nebo $f_{\vec{s}}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Poznámka 7.13. a) Analogicky bychom zavedli směrovou derivaci pro funkci tří a více proměnných.

b) Někdy se v definici navíc požaduje, aby směrový vektor $\vec{s}$ byl jednotkový, tj. $|\vec{s}| = 1$. Směrovou derivaci pak lze interpretovat, viz obrázek na přednášce.

c) Jelikož je směrová derivace obyčejnou derivací funkce φ, platí pro počítání tato pravidla: Nechť existují $f'_{\vec{s}}$, $g'_{\vec{s}}$ v bodě $X \in \mathbb{R}^n$. Potom

(i) pro $\forall c \in \mathbb{R}$ existuje $f'_{c\vec{s}}(X)$ a platí $f'_{c\vec{s}}(X) = cf'_{\vec{s}}(X)$,

(ii) $(f \pm g)'_{\vec{s}}(X) = f'_{\vec{s}}(X) \pm g'_{\vec{s}}(X)$,

(iii) $(fg)'_{\vec{s}}(X) = f'_{\vec{s}}(X)g(X) + f(X)g'_{\vec{s}}(X)$,

(iv) je-li $g(X) \neq 0$, pak $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{\vec{s}}(X) = \dfrac{f'_{\vec{s}}(X)g(X) - f(X)g'_{\vec{s}}(X)}{g^2(X)}$.

d) Naopak neplatí aditivita směrových derivací vzhledem ke směrům. Jestliže existují $f'_{\vec{r}}$, $f'_{\vec{s}}$, nemusí existovat $f'_{\vec{r}+\vec{s}}$, a pokud existuje $f'_{\vec{r}+\vec{s}}$, může být $f'_{\vec{r}+\vec{s}} \neq f'_{\vec{r}} + f'_{\vec{s}}$ (tato vlastnost platí v případě, kdy je alespoň jedna z $f'_{\vec{r}}$, $f'_{\vec{s}}$ spojitá na nějakém okolí bodu X).

e) Parciální derivace lze považovat za směrové derivace ve směrech vektorů standardní báze $\mathbb{R}^n$, tj. $f'_{x_i} = f'_{\vec{e}_i}$.

f) Z existence směrové derivace v bodě ve směru libovolného vektoru neplyne spojitost funkce v tomto bodě.

Příklad 7.14. Spočítejte směrovou derivaci $f(x,y,z) = x^2 + yz$ v bodě $[1, 2, -1]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (-1, 1, 2)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(1-t, 2+t, -1+2t) = (1-t)^2 + (2+t)(-1+2t) = 1 - 2t + t^2 - 2 + 4t - t + 2t^2 \\ &= -1 + t + 3t^2 \quad\Longrightarrow\quad \varphi'(t) = 1 + 6t \quad\Longrightarrow\quad \varphi'(0) = 1.\end{aligned}$$

Definice 7.15 — gradientu funkce. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce a $X_0 \in D(f)$. Nechť pro $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ existuje $f'_{x_i}(X_0)$. Pak vektor $\operatorname{grad} f(X_0) = (f'_{x_1}(X_0), f'_{x_2}(X_0), \ldots, f'_{x_n}(X_0))$ se nazývá *gradient funkce f v bodě X_0*. Existují-li parciální derivace na množině $M \subseteq D(f)$, pak vektorovou funkci $\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n})$ nazveme *gradientem funkce f* (jedná se tedy o zobrazení M do $\mathbb{R}^n$).

Poznámka 7.16. a) Namísto $\operatorname{grad} f$ se používá též značení ∇f (operátor „nabla“).

b) Později ukážeme, že pokud všechny parciální derivace funkce f existují na okolí bodu X_0 a jsou spojité v X_0, pak směrová derivace v tomto bodě existuje pro libovolný směrový vektor a platí $f'_{\vec{s}}(X_0) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \vec{s}$ (standardní skalární součin). Platí $\operatorname{grad} f \cdot \vec{s} = |\operatorname{grad} f(X_0)| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$, kde α je úhel, který tyto dva vektory svírají. Odtud plyne, že hodnota směrové derivace bude největší, je-li $\cos\alpha = 1$, tj. $\alpha = 0$, tj. oba vektory mají stejný směr. Geometricky lze tedy gradient interpretovat jako směr, ve kterém je přírůstek funkční hodnoty funkce f největší.

Cvičení

7.1. Spočítejte parciální derivace funkcí v bodě A:

a) $f(x, y) = x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-x^2}, \quad A = [0, 0]$;
b) $f(u, v) = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}, \quad A = [1, 1]$;
c) $f(x, y) = 3x^2y + \mathrm{e}^{xy}, \quad A = [3, 2]$;
d) $f(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\cos\beta - \beta\cos\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\beta}, \quad A = [0, 0]$;
e) $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad A = [0, 0]$.

7.2. Určete parciální derivace funkcí:

a) $f(x, y) = \sin\frac{x^2}{y}$;
b) $f(\gamma, \delta) = \operatorname{arctg}\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$;
c) $f(x, y, z) = \ln(\cos^2(x^2 - z^2y))$.

7.3. Ukažte, že ze stavové rovnice ideálního plynu $pV = nRT$ (p je tlak, V objem, T absolutní teplota a n, R jsou konstanty) vyplývá

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

7.4. Určete všechny druhé parciální derivace funkcí

a) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$;
b) $f(x, y) = \ln\frac{x^2+1}{y^2-1}$.

7.5. Ukažte, že funkce $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ vyhovuje Laplaceově rovnici $\Delta u = 0$, kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (tzv. Laplaceův operátor).

7.6. Ukažte, že funkce $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ $(a, b \in \mathbb{R}, \neq 0)$ splňuje rovnici vedení tepla $u'_t = a^2u''_{xx}$.

7.7. Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ je dostatečně mnohokrát derivovatelná.

a) Jaký je počet derivací čtvrtého řádu?
b) Jaký je počet derivací čtvrtého řádu, považujeme-li příslušné smíšené derivace za jednu?

7.8. Pomocí definice vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = 4(x-1) + 3y^2 + 5z^2$ v bodě $A = [2,-1,3]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (1,4,-2)$. Určete dále gradient funkce v bodě A.

Výsledky. **7.1.** a) $f'_x(A) = 1$, $f'_y(A) = 1$; b) $f'_u(A) = 0$, $f'_v(A) = 0$; c) $f'_x(A) = 36 + 2\,\mathrm{e}^6$, $f'_y(A) = 27 + 3\,\mathrm{e}^6$; d) $f'_\alpha(A) = \frac{1}{2}$, $f'_\beta(A) = -\frac{1}{2}$; e) $f'_x(A) = 0$, $f'_y(A) = 0$. **7.2.** a) $f'_x = \frac{2x}{y}\cos\frac{x^2}{y}$, $f'_y = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x^2}{y}$; b) $f'_\gamma = -\frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2}$, $f'_\delta = \frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2}$; c) $f'_x = -4x\operatorname{tg}(x^2-z^2y)$, $f'_y = 2z^2\operatorname{tg}(x^2-z^2y)$, $f'_z = 4yz\operatorname{tg}(x^2-z^2y)$. **7.4.** a) $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 0$, $f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yz} = f''_{zy} = f''_{xz} = f''_{zx} = 1$; b) $f''_{xx} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$, $f''_{yy} = \frac{2(y^2+1)}{(y^2-1)^2}$. **7.7.** a) 625; b) 70. **7.8.** $f'_{\vec{s}}(A) = -80$, $\nabla f(A) = (4,-6,30)$.

8 Totální diferenciál

Definice 8.1 — totálního diferenciálu. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $ah + bk$ proměnných h, k se nazývá *totální (úplný) diferenciál funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$, případně $\mathrm{d}f(x_0,y_0;h,k)$, případně $\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k)$.

Poznámka 8.2. a) Analogicky bychom definovali totální diferenciál pro funkci tří a více proměnných.

b) Podmínku z definice lze ekvivalentně formulovat: existují $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = ah + bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\tau(h,k), \quad \text{kde} \quad \lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h,k) = 0$$

(srovnejte s definicí diferenciálu funkce jedné proměnné).

c) Jmenovatel limity v definici je vzdálenost bodu $[h,k]$ od počátku v eukleidovské metrice ρ_2. Lze použít i ekvivalentní metriky ρ_1 nebo ρ_∞ (tj. výraz $\sqrt{h^2+k^2}$ nahradit výrazem $|h| + |k|$ nebo $\max\{|h|,|k|\}$).

■ **Věta 8.3.** *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě X_0, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Pro $n = 2$: Protože f je diferencovatelná, platí podle předchozí poznámky b)

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)\big) = \lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(ah + bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\tau(h,k)\big) = 0$$

(protože $\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h,k) = 0$), což znamená, že $\lim_{[h,k]\to[0,0]} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)$, tj. f je spojitá v $[x_0, y_0]$. □

Poznámka 8.4. Obrácené tvrzení neplatí, např. funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá v bodě $[0,0]$, ale není zde diferencovatelná.

■ **Věta 8.5.** *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí $a = f'_x(x_0,y_0)$, $b = f'_y(x_0,y_0)$, tj.*

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,h + f'_y(x_0,y_0)\,k.$$

Důkaz. Položme v definici totálního diferenciálu $k = 0$. Pak

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|} = \begin{cases} f'_x(x_0,y_0) - a \text{ pro } h > 0 \\ a - f'_x(x_0,y_0) \text{ pro } h < 0 \end{cases},$$

tj. $a = f'_x(x_0,y_0)$. Stejným obratem by se dokázala rovnost $b = f'_y(x_0,y_0)$. □

■ **Věta 8.6.** *Má-li funkce f na $O([x_0, y_0])$ parciální derivace f'_x, f'_y, které jsou spojité v $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.*

Důkaz. Protože parciální derivace dle předpokladu existují v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$, s využitím věty o střední hodnotě na tomto okolí platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f'_x(x_0+\xi h, y_0)h + f'_y(x_0+h, y_0+\eta k)k - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(f'_x(x_0+\xi h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\big)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&\quad + \lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(f'_y(x_0+h, y_0+\eta k) - f'_y(x_0, y_0)\big)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne ze spojitosti f'_x, f'_y v $[x_0, y_0]$, ohraničenosti

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1, \qquad \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1$$

a vlastností limity. □

Poznámka 8.7. a) Poslední dvě tvrzení platí analogicky i pro funkce tří a více proměnných.

b) Podobně jako u diferenciálu funkce jedné proměnné lze odůvodnit značení přírůstků h, k jako $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$, resp. přírůstků $h_1, h_2, \dots, h_n$ jako $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n$.

c) Rovina $z = ax + by + c$ v $\mathbb{R}^3$ se nazývá *tečnou rovinou ke grafu funkce* $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, jestliže

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c \qquad \text{a} \qquad \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y) - ax - by - c}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) - ax - by - c}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \\
&= \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}},
\end{aligned}$$

tj. $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$. Podle věty 8.5 platí $a = f'_x(x_0, y_0)$, $b = f'_y(x_0, y_0)$ a tedy $c = f(x_0, y_0) - x_0 f'_x(x_0, y_0) - y_0 f'_y(x_0, y_0)$. Celkově tedy

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

tj.

$$z = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

tj. $z = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0)$. Odtud plyne geometrický význam totálního diferenciálu funkce dvou proměnných, je to přírůstek funkce měřený na tečné rovině.

■ **Věta 8.8.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný. Pak existuje směrová derivace $f'_{\vec{s}}(X_0)$ a platí $f'_{\vec{s}}(X_0) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \vec{s}$.*

Důkaz. Pro $n = 2$: Nechť f je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Potom

$$f'_{\vec{s}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d} f(x_0, y_0; ts_1, ts_2) + \sqrt{t^2(s_1^2+s_2^2)}\,\tau(ts_1, ts_2)}{t} \\
&= \mathrm{d} f(x_0, y_0; s_1, s_2) \pm \lim_{t\to 0} \sqrt{s_1^2+s_2^2}\,\tau(ts_1, ts_2) \\
&= \mathrm{d} f(x_0, y_0; s_1, s_2) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0)\cdot \vec{s}.
\end{aligned}
$$

□

Příklad 8.9. Spočítejte směrovou derivaci $f(x, y, z) = x^2 + yz$ v bodě $[1, 2, -1]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (-1, 1, 2)$.

Řešení. Platí $\operatorname{grad} f = (2x, z, y)$, a tedy $\operatorname{grad} f(1, 2, -1) = (2, -1, 2)$, a tedy

$$f'_{\vec{s}}(1, 2, -1) = (2, -1, 2)\cdot(-1, 1, 2) = 1.$$

Srovnejte s příkladem 7.14.

Definice 8.10 — totálního diferenciálu m-ho řádu. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na $O([x_0, y_0])$ parciální derivace až do řádu m včetně, které jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Pak *totálním diferenciálem m-tého řádu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$* rozumíme funkci

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0; h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}.$$

Poznámka 8.11. a) Totální diferenciál m-tého řádu funkce f je přirozené definovat jako $\mathrm{d}^m f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{m-1} f)$, $m = 2, 3, \ldots$, což, vzhledem k větám 8.5 a 8.6, skutečně vede na vzorec v předchozí definici, např.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f &= \mathrm{d}(\mathrm{d} f) = \mathrm{d}(f'_x h + f'_y k) = (f'_x h + f'_y k)'_x h + (f'_x h + f'_y k)'_y k \\
&= f''_{xx} h^2 + f''_{yx} hk + f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2 = f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2.
\end{aligned}
$$

b) V případě funkce tří a více proměnných se vzorec modifikuje na

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}^m f(X_0; h_1, h_2, \ldots, h_n) \\
&= \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_n!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}(X_0) h_1^{m_1} h_2^{m_2} \ldots h_n^{m_n}.
\end{aligned}
$$

Cvičení

8.1. Určete totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

v bodě $A = [1, 1]$.

8.2. Určete hodnotu totálního diferenciálu funkce

$$f(x, y, z) = 2^x (\sin y) \operatorname{arctg} z$$

v bodě $A = \left[-4, \frac{\pi}{2}, 0\right]$ pro přírůstky $h = 0,05$, $k = 0,06$ a $\ell = 0,08$.

8.3. Pomocí totálního diferenciálu určete přibližně hodnotu

$$\text{a)}\quad \arcsin\frac{0,48}{1,05}; \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98^2 + 1,05^4}}.$$

8.4. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě T:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}, \qquad T=[2,1,?].$$

8.5. Vypočtěte s přesností na dvě desetinná místa objem kužele V a určete odhad absolutní změny objemu, jestliže výška kužele je $h=15\pm 0,3\,\mathrm{cm}$ a poloměr základny je $r=8\pm 0,2\,\mathrm{cm}$. Určete relativní změnu objemu.

8.6. Najděte jednotkový vektor $\vec{s}$, pro nějž je směrová derivace $f'_{\vec{s}}$ funkce $f(x,y)=\operatorname{cotg}(xy)$ v bodě $A=\left[\frac{\pi}{2},1\right]$ maximální a určete její hodnotu.

8.7. Napište totální diferenciál druhého a třetího řádu funkce

$$f(x,y)=\ln(x+y)$$

v bodě $A=[2,1]$.

Výsledky. **8.1.** $\mathrm{d}f(1,1)(h,k)=\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}k$. **8.2.** $\mathrm{d}f\left(-4,\frac{\pi}{2},0\right)(0{,}05;0{,}06;0{,}08)=0{,}005$. **8.3.** a) 0,4716; b) 1. **8.4.** $\tau: 2x-4y+z-3=0$, $n: x=2+2t,\ y=1-4t,\ z=3+t\ (t\in\mathbb{R})$. **8.5.** $V=1005{,}31\pm 70{,}37\,\mathrm{cm}^3$, 7%. **8.7.** $\vec{s}=(-2/\sqrt{\pi^2+4},-\pi/\sqrt{\pi^2+4})$, $\sqrt{\pi^2+4}/2$. **8.7.** $\mathrm{d}^2f(2,1)(h,k)=-\frac{1}{9}h^2-\frac{2}{9}hk-\frac{1}{9}k^2$, $\mathrm{d}^3f(2,1)(h,k)=\frac{2}{27}h^3+\frac{2}{9}h^2k+\frac{2}{9}hk^2+\frac{2}{27}k^3$.

9 Derivace složené funkce, Taylorův polynom

■ **Věta 9.1 — řetězové pravidlo.** *Nechť funkce $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mají parciální derivace v bodě $[x_0,y_0]$ a funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $[u_0,v_0]=[u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)]$. Potom složená funkce $F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ má parciální derivace v bodě $[x_0,y_0]$ a platí*

$$\begin{aligned}F'_x(x_0,y_0)&=f'_u(u_0,v_0)\,u'_x(x_0,y_0)+f'_v(u_0,v_0)\,v'_x(x_0,y_0),\\ F'_y(x_0,y_0)&=f'_u(u_0,v_0)\,u'_y(x_0,y_0)+f'_v(u_0,v_0)\,v'_y(x_0,y_0),\end{aligned}$$

stručně $F'_x=f'_uu'_x+f'_vv'_x$ a $F'_y=f'_uu'_y+f'_vv'_y$.

Poznámka 9.2. a) Analogicky pro funkci tří a více proměnných $f=f(u_1,\dots,u_n)$, kde $u_i=u_i(x_1,\dots,x_n)$, bychom pro složenou funkci

$$F(x_1,\dots,x_n)=f(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_n(x_1,\dots,x_n))$$

dostali

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Princip řetězového pravidla dále zůstává stejný, i když počet proměnných vnitřních funkcí není stejný jako počet proměnných vnější funkce.

b) Pro derivace druhého řádu by se tvrzení modifikovalo: mají-li funkce u a v parciální derivace do druhého řádu v bodě $[x_0,y_0]$ a funkce f má parciální derivace druhého řádu na okolí bodu $[u_0,v_0]=[u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)]$, které jsou v tomto bodě spojité, pak funkce $F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ má druhé parciální derivace v bodě $[x_0,y_0]$ a platí

$$\begin{aligned}F''_{xx}&=f''_{uu}(u'_x)^2+2f''_{uv}u'_xv'_x+f''_{vv}(v'_x)^2+f'_uu''_{xx}+f'_vv''_{xx},\\ F''_{xy}&=f''_{uu}u'_xu'_y+2f''_{uv}u'_xv'_y+f''_{vv}v'_xv'_y+f'_uu''_{xy}+f'_vv''_{xy},\\ F''_{yy}&=f''_{uu}(u'_y)^2+2f''_{uv}u'_yv'_y+f''_{vv}(v'_y)^2+f'_uu''_{yy}+f'_vv''_{yy}.\end{aligned}$$

Skutečně, např. pro F''_{xx} máme

$$F''_{xx}=(f'_uu'_x)'_x+(f'_vv'_x)'_x=(f'_u)'_xu'_x+f'_uu''_{xx}+(f'_v)'_xv'_x+f'_vv''_{xx}$$

$$= (f''_{uu}u'_x + f''_{uv}v'_x)u'_x + f'_u u''_{xx} + (f''_{vu}u'_x + f''_{vv}v'_x)v'_x + f'_v v'_{xx}$$
$$= f'_{uu}(u'_x)^2 + 2f''_{uv}u'_x v'_x + f''_{vv}(v'_x)^2 + f'_u u''_{xx} + f'_v v'_{xx},$$

přičemž jsme využili linearitu operace derivování a rovnost $f''_{uv} = f''_{vu}$.

Věta 9.3 — Taylorova. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě X_0 a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$ včetně. Pak pro libovolné X z tohoto okolí platí*

$$f(X) = T_m(X) + R_m(X),$$

kde

$$T_m(X) = f(X_0) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(X_0; X - X_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(X_0; X - X_0) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(X_0; X - X_0)$$

se nazývá Taylorův polynom (stupně m) a

$$R_m(X) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(X_0 + \vartheta(X - X_0); X - X_0), \quad \vartheta \in (0,1)$$

se nazývá m-tý Taylorův zbytek v Lagrangeově tvaru.

Idea důkazu. Zavede se pomocná funkce $F(t) = f(X_0 + t(X - X_0))$, pro kterou platí $F(1) = f(X)$, a využije se Taylorova věta pro funkci jedné proměnné v bodě $t = 0$, tj.

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\vartheta).$$

Aplikujme-li pro výpočet derivací $F^{(k)}$ pravidlo pro parciální derivace složených funkcí, dostaneme vzorec věty. □

Poznámka 9.4. Nechť všechny parciální derivace řádu $m+1$ funkce f jsou ohraničené stejnou stejnou konstantou c na úsečce $X_0 + tH$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ ($H = [h_1, h_2, \ldots, h_n] \in \mathbb{R}^n$), která leží v uvažovaném okolí. Pak pro odhad zbytku R_m platí:

$$|R_m(X_0 + H)| \le \frac{c}{(m+1)!}\big(|h_1| + |h_2| + \cdots + |h_n|\big)^{m+1}.$$

Příklad 9.5. Určete Taylorův polynom T_2 funkce $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$ v bodě $[0,0]$. Pomocí tohoto polynomu určete přibližně hodnotu $f(1/4, 1/8)$ a proveďte odhad chyby, které se aproximací dopustíme.

Řešení. Máme $f(0,0) = 1$ a postupným napočítáním derivací až do druhého řádu snadno ověříme, že

$$\mathrm{d}f(0,0) = 0, \quad \mathrm{d}^2 f(0,0) = -h^2 - 4k^2.$$

Protože $h = x - 0 = x$, $k = y - 0 = y$, Taylorův polynom má tvar

$$T_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2$$

(tento polynom spolu s původní funkcí jsou znázorněny na obrázku 9.1). Aproximace dané funkční hodnoty potom je

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{14}}{4} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0,9375.$$

Pro odhad zbytku potřebujeme navíc třetí derivace. Platí:

$$f'''_{xxx} = \frac{3x(4y^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}, \qquad f'''_{xxy} = \frac{4y(4y^2 - 2x^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}},$$
$$f'''_{xyy} = \frac{4x(x^2 - 8y^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}, \qquad f'''_{yyy} = \frac{48y(x^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}.$$

Protože nás zajímá ohraničenost derivací na úsečce $x = t/4$, $y = t/8$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, zaveďme funkce

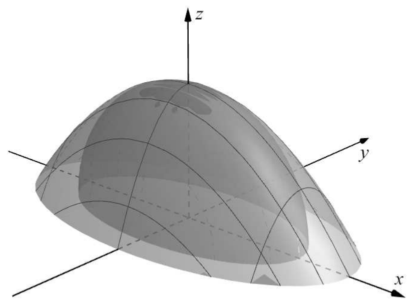
$$\varphi_1(t) = f'''_{xxx}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = \frac{3t^3 - 48t}{64(1 - t^2/8)^{5/2}}, \qquad \varphi_2(t) = f'''_{xxy}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = -\frac{t^3 + 16t}{32(1 - t^2/8)^{5/2}}$$

$$\varphi_3(t) = f'''_{xyy}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = -\frac{t^3 + 16t}{16(1 - t^2/8)^{5/2}}, \qquad \varphi_4(t) = f'''_{yyy}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = \frac{t^3 - 96t}{16(1 - t^2/8)^{5/2}}.$$

Není těžké ověřit, že všechny čtyři funkce jsou v absolutní hodnotě na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ohraničené číslem 8. Podle výše uvedeného vzorce tedy máme

$$\left|R_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)\right| \le \frac{8}{3!}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{9}{128} = 0{,}0703125.$$

Výpočtem na kalkulačce nebo počítači se lze přesvědčit, že skutečná chyba je výrazně menší (cca 0,002), odhad zbytku pomocí uvedeného vzorce bývá obvykle dosti pesimistický.



Obrázek 9.1: Graf funkce f (horní polovina elipsoidu, tmavší šedá) a jejího Taylorova polynomu druhého stupně (eliptický paraboloid, světlejší šedá) z příkladu 9.5

Cvičení

9.1. Transformujte funkci $V(x, y) = x f'_y - y f'_x$ do polárních souřadnic (tj. pomocí řetězového pravidla jej vyjádřete v proměnných ρ a φ). O funkci f předpokládejme, že má spojité parciální derivace. Připomeňme, že vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

9.2. Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce

$$f(x, y) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

v bodě $A = [0, 1]$.

9.3. Určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{2 - 1{,}02 \cdot 0{,}98}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně (vhodné funkce ve vhodném bodě). Určete také odhad chyby, které se tuto aproximací dopustíme.

Výsledky. 9.1. $V^*(\rho, \varphi) = F'_\varphi$, kde $F(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. 9.2. $T_3(x, y) = x - x(y-1) - \frac{1}{3}x^3 + x(y-1)^2$. 9.3. $1{,}0001\overline{3}$, všechny parciální derivace třetího řádu jsou na úsečce $1 + 0{,}02t$, $1 - 0{,}02t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, ohraničené číslem 1 (lze nalézt i o něco lepší konstantu), a tedy $|R_2(1{,}02; 0{,}98)| \le \frac{1}{6}(0{,}02 + 0{,}02)^3 \approx 1{,}07 \cdot 10^{-5}$.

10 Lokální a globální extrémy

Definice 10.1 — lokálních extrémů. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima* (resp. *minima*), jestliže existuje okolí $O(X_0)$ takové, že $O(X_0) \subseteq D(f)$ a pro každé $X \in O(X_0)$ platí $f(X) \leq f(X_0)$ (resp. $f(X) \geq f(X_0)$). Jsou-li tyto nerovnosti pro $X \neq X_0$ ostré, mluvíme o *ostrém* lokálním maximu (resp. minimu). (Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *(ostré) lokální extrémy*.

Příklad 10.2. a) Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má v bodě $[0, 0]$ ostré lokální minimum, protože $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ pro $\forall [x, y] \neq [0, 0]$. b) Funkce $f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pro } [x, y] = [0, 0] \\ 0 \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0] \end{cases}$ má v bodě $[0, 0]$ ostré lokální maximum. Příklad a) ukazuje, že funkce nemusí být v bodě lokálního extrému diferencovatelná, příklad b) ukazuje, že nemusí být ani spojitá.

Definice 10.3 — stacionárního bodu. Řekneme, že bod $S \in \mathbb{R}^n$ je *stacionárním bodem funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jestliže platí $\operatorname{grad} f(S) = \vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

■ **Věta 10.4.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $X^* \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f. Pak X^* je stacionárním bodem funkce f.*

Důkaz. Kdyby $f'_{x_i}(X^*) > 0$, tj.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)}{h} > 0,$$

pak by existovalo $\delta > 0$ takové, že pro každé $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ je také

$$\frac{f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)}{h} > 0,$$

viz vlastnosti limity. To znamená, že pro kladná h z $(-\delta, \delta)$ je

$$f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) > f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*),$$

a pro záporná h je

$$f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) < f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*),$$

což je spor s tím, že bod X^* je bodem lokálního extrému. Analogicky vyloučíme možnost $f'_{x_i}(X^*) < 0$. □

Poznámka 10.5. Podobně jako u funkce jedné proměnné, stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému, např. funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ má v bodě $[0, 0]$ stacionární bod, ale není zde extrém (takovým stacionárním bodům říkáme sedlový bod).

Definice 10.6 — kvadratické formy. Funkce $K(X) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$, kde $b_{ij} \in \mathbb{R}$ a $X \in \mathbb{R}^n$, se nazývá *kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$* (jedná se tedy o polynom druhého stupně n proměnných, ve kterém se nevyskytuje lineární a absolutní člen).

Pokud bod $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ identifikujeme s (vázaným) vektorem $\vec{x} = X - O = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pak každé kvadratické formě lze jednoznačně přiřadit symetrickou matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ tak, že platí $K(X) = \vec{x} A \vec{x}^T$. Prvky matice jsou dány $a_{ii} = b_{ii}$, $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$. Říkáme potom, že *matice A reprezentuje kvadratickou formu K*.

Definice 10.7 — definitnosti kvadratické formy. Nechť A je symetrická matice. Řekneme, že kvadratická forma $\vec{x}A\vec{x}^T$ je

pozitivně definitní, *negativně definitní*, *pozitivně semidefinitní*, *negativně semidefinitní*, jestliže pro každý vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ platí $\vec{x}A\vec{x}^T > 0$, $\vec{x}A\vec{x}^T < 0$, $\vec{x}A\vec{x}^T \geq 0$, $\vec{x}A\vec{x}^T \leq 0$,

indefinitní, existují-li vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ tak, že $\vec{x}_1 A\vec{x}_1^T < 0$ a $\vec{x}_2 A\vec{x}_2^T > 0$ (tj. není-li definitní ani semidefinitní).

Poznámka 10.8. Protože každá kvadratická forma je symetrickou maticí A určena jednoznačně, lze hovořit přímo o definitnosti matice (namísto formy).

Definice 10.9 — hlavních minorů. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je čtvercová matice (ne nutně symetrická). Pak *základními (rohovými) hlavními minory* rozumíme determinanty

$$D_1 = \det(a_{11}), \quad D_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad D_n = \det A.$$

Základní hlavní minory tvoří podmnožinu všech hlavních minorů M_k^ℓ. *Hlavní minory řádu k* jsou determinanty čtvercových matic $k \times k$ ($k = 1, \ldots, n$), které vzniknou z matice A vynecháním $n - k$ řádků a $n - k$ sloupců, přičemž vynecháváme vždy odpovídající si sloupce a řádky (tj. i-tý řádek s i-tým sloupcem). Počet hlavních minorů řádu k je $\binom{n}{k}$, tj. $\ell = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}$. Celkový počet hlavních minorů je pak $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$.

■ Věta 10.10 — Sylvestrovo kritérium, James Joseph Sylvester 1814–1897, Angličan. *Nechť A je reálná symetrická $n \times n$-matice, D_k ($k = 1, \ldots, n$) jsou její základní hlavní minory a M_k^ℓ ($k = 1, \ldots, n$, $\ell = 1, \ldots, \binom{n}{k}$) jsou její hlavní minory. Pak kvadratická forma $\vec{x}A\vec{x}^T$ je:*

(i) *pozitivně definitní $\iff$ všechny základní hlavní minory D_k ($k = 1, \ldots, n$) jsou kladné,*

(ii) *negativně definitní $\iff$ pro všechny základní hlavní minory D_k platí $\operatorname{sgn} D_k = (-1)^k$, tj. $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0, \ldots$,*

(iii) *pozitivně semidefinitní $\iff$ všechny hlavní minory M_k^ℓ jsou nezáporné,*

(iv) *negativně semidefinitní $\iff$ pro všechny hlavní minory M_k^ℓ platí $\operatorname{sgn} M_k^\ell = (-1)^k$ nebo $M_k^\ell = 0$.*

Nenastane-li ani jeden z předchozích případů, pak $\vec{x}A\vec{x}^T$ je indefinitní.

■ Důsledek 10.11. a) *Je-li alespoň jeden základní hlavní minor D_k záporný pro k sudé, pak $\vec{x}A\vec{x}^T$ je indefinitní.*

b) *Jsou-li všechny základní hlavní minory D_k nenulové a nenastává ani jeden z případů (i), (ii) předchozího tvrzení, pak $\vec{x}A\vec{x}^T$ je indefinitní.*

Příklad 10.12. Rozhodněte o typu kvadratických forem:

a) $K(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 2xy + 4xz - 2yz$;

b) $K(x, y, z) = 16yz - 2z^2$.

Řešení. ad a) Kvadratická forma je reprezentována symetrickou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \quad \text{Máme } D_1 = 3,\ D_2 = 8,\ D_3 = 29.$$

Podle Sylvestrova kritéria je kvadratická forma pozitivně definitní.

ad b) V tomto případě kvadratické formě odpovídá matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix},$$

přičemž $M_1^1 = 0$, $M_1^2 = 0$, $M_1^3 = -2$, $M_2^1 = 0$, $M_2^2 = 0$, $M_2^3 = -16$, $M_3^1 = 0$ a podle Sylvestrova kritéria je tedy forma indefinitní. Lze rozhodnout i snadněji, například $K(1,1,1) = 14 > 0$, ale $K(1,1,-1) = -18 < 0$, tj. forma mění znaménko, což znamená indefinitnost.

Druhý totální diferenciál $d^2 f(X)$ je kvadratická forma reprezentovaná Hessovou[1] maticí druhých parciálních derivací

$$H_f(X) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}(X),$$

tj. platí $d^2 f(X) = (h_1, h_2, \ldots, h_n) H_f(X) (h_1, h_2, \ldots, h_n)^T$.

Věta 10.13. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce, S její stacionární bod a nechť Hessova matice H_f je spojitá na nějakém okolí bodu S. Je-li $d^2 f(S)$*

(i) *pozitivně definitní, pak f má v bodě S ostré lokální minimum,*
(ii) *negativně definitní, pak f má v bodě S ostré lokální maximum,*
(iii) *indefinitní, pak f nemá v bodě S lokální extrém.*

Důkaz. (i) Z předpokladu spojitosti Hessovy matice na nějakém okolí bodu S plyne podle vět 8.3 a 8.6 spojitost parciálních derivací prvního řádu a funkce samotné na tomto okolí. Podle Taylorovy věty pak platí

$$f(X) = f(S) + d f(S; X - S) + \frac{1}{2} d^2 f(S + \vartheta(X - S); X - S), \quad \vartheta \in (0, 1).$$

Protože S je stacionární bod, platí $d f(S) = 0$, a tedy

$$f(X) - f(S) = \frac{1}{2} d^2 f(S + \vartheta(X - S); X - S).$$

Je-li $d^2 f(S)$ pozitivně definitní (tj. $d^2 f(S; X - S) > 0$ pro libovolný bod $X \neq S$), pak (z důvodu spojitosti) existuje okolí $O(S)$, na kterém je pozitivně definitní i $d^2 f(X)$ pro každý bod $X \in O(S)$. Uvažujeme-li eukleidovskou metriku, tak do tohoto okolí náleží i bod $S + \vartheta(X - S)$, protože $\vartheta \in (0, 1)$. To znamená, že na $O(S)$ je $d^2 f(S + \vartheta(X - S); X - S) > 0$, a tedy $f(X) - f(S) > 0$, tj. $f(X) > f(S)$, tj. v S je ostré lokální minimum.

Důkaz (ii) by se provedl stejně, důkaz (iii) je mírně technicky náročnější. □

Poznámka 10.14. Je-li $d^2 f(S)$ pozitivně nebo negativně semidefinitní, nelze o extrému rozhodnout.

Příklad 10.15. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$.

Řešení. Položíme-li gradient funkce roven nulovému vektoru, dostaneme soustavu tří rovnic

$$2y^2 - 4y + 2x = 0, \quad 4xy - 4x = 0, \quad 2z - 2 = 0,$$

ze které obdržíme tři stacionární body $S_1 = [1, 1, 1]$, $S_2 = [0, 0, 1]$ a $S_3 = [0, 2, 1]$. Hessova matice zadané funkce má tvar

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 4y - 4 & 0 \\ 4y - 4 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[1]Ludwig Otto Hesse 1811–1874, Němec

a po dosazení stacionárních bodů máme

$$H_f(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(S_2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(S_3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Sylvestrova kritéria snadno určíme, že $d^2 f(S_1)$ je pozitivně definitní kvadratická forma ($D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 8 > 0$, $D_3 = 16 > 0$), $d^2 f(S_2)$ je indefinitní kvadratická forma ($D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -16 < 0$, $D_3 = -32 < 0$) a $d^2 f(S_3)$ je také indefinitní ($D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -16 < 0$, $D_3 = -32 < 0$). Lokální extrém tedy nastává pouze ve stacionárním bodě S_1 (a to ostré lokální minimum).

Příklad 10.16. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$.

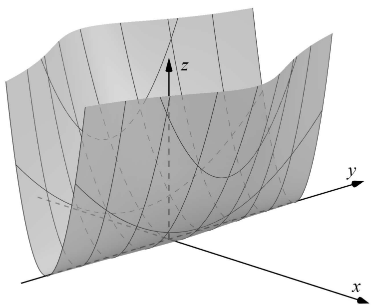
Řešení. Podmínka grad $f = \vec{o}$ vede na soustavu

$$2x(1 + y^2) = 0, \quad 2x^2 y = 0,$$

která má nekonečně mnoho řešení $S = [0, y]$, $y \in \mathbb{R}$ (stacionárním bodem je tedy každý bod ležící na ose y). Hessova matice má potom tvar

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(1 + y^2) & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{vyčísleno v bodech } S: \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(1 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože $M_1^1 = 2(1 + y^2) > 0$, $M_1^2 = 0$, $M_2^1 = 0$, $d^2 f(S)$ je pozitivně semidefinitní kvadratickou formou a podle poznámky výše nelze na základě věty 10.13 o extrému rozhodnout. Uvážíme-li však, že $f(S) = 0$ a $f(x, y) > 0$ $\forall [x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo osu y, je zřejmé, že f má v každém bodě S lokální minimum, které však není ostré (graf funkce je na obrázku).



Obrázek 10.1: Graf funkce $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$. Každý bod osy y je bodem (neostrého) lokálního minima

Definice 10.17. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že f nabývá na množině M v bodě $X_0 \in M$ *globálního minima* (resp. *maxima*), jestliže $f(X_0) \leq f(X)$ (resp. $f(X_0) \geq f(X)$) pro $\forall X \in M$. Jsou-li nerovnosti ostré pro každé $X \neq X_0$, mluvíme o *ostrých globálních minimech* (resp. *maximech*) na M. (Ostrá) globální maxima a minima nazýváme souhrnně *(ostré) globální extrémy funkce* f na množině M.

Poznámka 10.18. Je-li bod globálního extrému X_0 na množině M vnitřním bodem této množiny, pak je X_0 bodem lokálního extrému. Funkce f tedy může mít globální extrém na množině M v bodě lokálního extrému nebo v hraničním bodě množiny M, pokud tento bod do množiny M patří. Např. funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má na uzavřeném jednotkovém kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$ (ostré) globální minimum 0 v bodě $[0, 0]$ a (neostré) globální maximum 1 v každém bodě hranice kruhu (tj. kružnice $x^2 + y^2 = 1$). Kdybychom uvažovali otevřený kruh, tak funkce má stále (ostré) globální minimum 0 v bodě $[0, 0]$, ale globální maximum nemá (ostré ani neostré).

Praktický postup při výpočtu globálních extrémů na kompaktní množině (tj. ohraničené a uzavřené) bude ukázán později v kapitole o vázaných extrémech.

Cvičení

Vyšetřete body lokálních extrémů níže uvedených funkcí (ve výsledcích $X^{\min}$, resp. $X^{\max}$, značí bod lokálního minima, resp. maxima) a S stacionární bod, ve kterém nenastává extrém):

10.1.

$$f(x, y) = x(x-1) + y(y-1) - xy + 2.$$

10.2.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2.$$

10.3.

$$f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}.$$

10.4.

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \qquad x, y, z > 0.$$

10.5.

$$f(x, y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}.$$

10.6.

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2 y + 3y - y^3.$$

10.7.

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy}, \qquad x, y, z > 0.$$

Výsledky. **10.1.** $X^{\min} = [1, 1]$. **10.2.** $X_1^{\min} = [-2, 0]$, $X_2^{\min} = [0, 2]$, $S = [-1, 1]$. **10.3.** $X^{\min} = [2, 2]$. **10.4.** $X^{\min} = [1/2, 1, 1]$. **10.5.** $X^{\min} = [-2/3, -2/3]$. **10.6.** $X^{\min} = [0, -1]$, $X^{\max} = [0, 1]$, $S_{3,4} = [\pm\sqrt{3}/2, 1/2]$. **10.7.** $X^{\min} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = t, z = t, t > 0\}$.

11 Implicitní funkce, diferencovatelná zobrazení mezi prostory vyšší dimenze

Definice 11.1 — implicitní funkce. Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce a $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je takový bod, že $F(x_0, y_0) = 0$. Řekneme, že *funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána implicitně rovnicí* $F(x, y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové že, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $F(x, f(x)) = 0$ a graf funkce f prochází bodem $[x_0, y_0]$ (tj. $y_0 = f(x_0)$).

Příklad 11.2. a) Rovnice $3x - y + 2 = 0$ představuje implicitní vyjádření jediné funkce $y = 3x + 2$; b) rovnice $x^2 + y^2 = 1$ představuje dvojici funkcí $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; c) rovnice $xy - |xy| = 0$ určuje nekonečně mnoho funkcí $y = f(x)$ s grafem ležícím v prvním nebo třetím kvadrantu.

■ **Věta 11.3 — o existenci implicitní funkce.** *Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na otevřeném čtverci*

$$R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a)$$

pro nějaké $a > 0$ (tj. na okolí $O_a([x_0, y_0])$ v metrice ρ_∞) a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že F má na tomto čtverci parciální derivaci F'_y, která je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna spojitá funkce $y = f(x)$ procházející bodem $[x_0, y_0]$.

Poznámka 11.4. a) Vedle spojité funkce může existovat i další nespojitá funkce, např. rovnice $y(y-1)=0$ určuje na okolí bodu $[0,0]$ spojitou funkci $y(x)=0$, ale kromě ní také např. nespojitou funkci

$$y_1(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\le 0\\ 1 & \text{pro } x>0\end{cases} \qquad \text{nebo funkci} \quad y_2(x)=\chi(x).$$

b) Podmínka $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$ je postačující pro existenci implicitní funkce, nikoliv nutnou, např. rovnice $x-y^3=0$ určuje v okolí bodu $[0,0]$ funkci $y=\sqrt[3]{x}$, ale přitom $F'_y(0,0)=0$.

■ **Věta 11.5 — o derivaci implicitní funkce.** *Nechť jsou splněny předpoklady věty 11.3 a F má na čtverci R spojité parciální derivace. Pak má funkce $y=f(x)$, která je implicitně určena v okolí bodu $[x_0,y_0]$ rovnicí $F(x,y)=0$, derivaci v bodě x_0 a platí*

$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Poznámka 11.6. a) Samotný vzorec pro výpočet derivace si není potřeba pamatovat, lze jej snadno formálně odvodit z pravidla pro derivování složené funkce:

$$F(x,f(x))=0\ /'_x \ \Rightarrow\ F'_x(x,f(x))\cdot 1+F'_y(x,f(x))f'(x)=0\ \Rightarrow\ f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}.$$

Dosadíme-li $x=x_0$, tak s využitím $y_0=f(x_0)$ dostaneme vzorec tvrzení.

b) Z důkazu je zřejmé, že derivace existuje nejenom v bodě $[x_0,y_0]$, ale na celém $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ a je zde spojitá.

Příklad 11.7. Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^3+y^3-2xy=0$ v bodě $[1,1]$.

Řešení. Funkce $F(x,y)=x^3+y^3-2xy$ je má parciální derivace $F'_x(x,y)=3x^2-2y$, $F'_y(x,y)=3y^2-2x$, které jsou spojité na libovolném (čtvercovém) okolí bodu $[1,1]$ (sama funkce F tedy musí být také spojitá v každém bodě uvažovaného okolí, protože je zde diferencovatelná). Protože navíc $F'_y(1,1)=1\ne 0$, jsou splněny všechny předpoklady věty 11.3, a tedy v okolí bodu $[1,1]$ existuje implicitní funkce $y=f(x)$, která má v bodě $x_0=1$ derivaci, přičemž

$$f'(1)=-\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1^2-2\cdot 1}=-1.$$

Rovnice tečny funkce f v bodě x_0 je dána vzorcem $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$, viz SA1. Po dosazení tedy dostáváme $y=1-(x-1)$, tj. hledaná tečna má rovnici $x+y-2=0$. Normála je potom kolmá na tečnu, snadno napíšeme její parametrické vyjádření $x=1+t$, $y=1+t$, $t\in\mathbb{R}$. Eliminací parametru t pak dostaneme rovnici normály $x-y=0$.

Poznámka 11.8. a) Z příkladu je zřejmé, že rovnice tečny v bodě $[x_0,y_0]$ ke grafu funkce $y=f(x)$ určené implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ má tvar $F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$.

b) Jsou-li splněny předpoklady věty 11.3 a F má navíc na R spojité druhé parciální derivace, pak funkce $y=f(x)$, která je v okolí bodu $[x_0,y_0]$ dána implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ má v bodě x_0 druhou derivaci a platí

$$y''(x_0)$$
$$=-\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)(F'_y(x_0,y_0))^2-2F''_{xy}(x_0,y_0)F'_x(x_0,y_0)F'_y(x_0,y_0)+F''_{yy}(x_0,y_0)(F'_x(x_0,y_0))^2}{(F'_y(x_0,y_0))^3}.$$

Jak je to ve vyšší dimenzi?

Definice 11.9 — implicitní funkce dvou proměnných. Nechť $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je funkce, $[x_0,y_0,z_0]\in\mathbb{R}^3$ je takový bod, že $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Řekneme, že *funkce $z=f(x,y)$ je v okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]$ zadána* *implicitně rovnicí* $F(x,y,z) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové že pro $[x,y] \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ je $F(x,y,f(x,y)) = 0$ a graf funkce f prochází bodem $[x_0, y_0, z_0]$.

Věta 11.10 — o implicitní funkci dvou proměnných a jejích parciálních derivacích. *Nechť* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *je funkce spojitá na krychli* $K = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a) \times (z_0 - a, z_0 + a)$ *pro nějaké* $a > 0$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ *a má zde derivaci* F'_z, *která je spojitá v bodě* $[x_0, y_0, z_0]$, *přičemž* $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. *Pak existuje číslo* $\delta > 0$ *a jediná spojitá funkce* $z = f(x,y)$, *která je na* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ *dána implicitně rovnicí* $F(x,y,z) = 0$. *Jsou-li navíc na krychli* K *spojité parciální derivace* F'_x, F'_y *a* F'_z, *pak funkce* $z = f(x,y)$ *má parciální derivace v bodě* $[x_0, y_0]$ *a platí*

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \qquad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Poznámka 11.11. Z předchozí definice a věty je již zřejmé, jak by vypadalo rozšíření na případ implicitní funkce tří a více proměnných.

Definice 11.12 — m-funkce. Nechť $f_1, f_2, \dots, f_m$ jsou funkce n proměnných takové, že $D(f_1) \cap D(f_2) \cap \dots \cap D(f_m) \neq \emptyset$. Pak zobrazení $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} [f_1(x_1, x_2 \dots, x_n), f_2(x_1, x_2 \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2 \dots, x_n)]$$

nazveme *m-funkcí n proměnných*. Funkce $f_1, f_2, \dots, f_m$ nazýváme *složky* $\mathscr{F}$, množina $D(\mathscr{F}) := \bigcap_{i=1}^m D(f_i)$ se nazývá *definiční obor* m-funkce $\mathscr{F}$.

Poznámka 11.13. a) Interpretujeme-li obraz bodu $X \in \mathbb{R}^n$ jako vektor v $\mathbb{R}^m$, pak m-funkci nazýváme také *vektorovou funkcí* a je-li $m = n$, tak *vektorovým polem*.

b) Lze snadno ukázat, že $\mathscr{F}$ je spojitá v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n \iff$ všechny funkce $f_1, \dots, f_m$ jsou v tomto bodě spojité.

Definice 11.14 — diferencovatelnosti m-funkce. Řekneme, že m-funkce $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže každá z funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$ je diferencovatelná v tomto bodě. Zobrazení $\mathrm{d}\mathscr{F}(X_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$[h_1, h_2, \dots, h_n] \longmapsto [\mathrm{d} f_1(X_0), \mathrm{d} f_2(X_0), \dots, \mathrm{d} f_m(X_0)]$$

se nazývá *totální diferenciál m-funkce $\mathscr{F}$ v bodě X_0*. m-funkce $\mathscr{F}$ se nazývá *diferencovatelná na* $M \subseteq D(\mathscr{F})$, je-li diferencovatelná v každém bodě z M.

Poznámka 11.15. Totální diferenciál $\mathrm{d}\mathscr{F}(X_0)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ určené maticí

$$\mathscr{F}'(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (X_0),$$

tj. platí

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d} f_1(X_0) \\ \mathrm{d} f_2(X_0) \\ \vdots \\ \mathrm{d} f_m(X_0) \end{pmatrix} = \mathscr{F}'(X_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathscr{F}'(X_0)$ se nazývá *Jacobiova*[2] *matice m-funkce $\mathscr{F}$ v bodě X_0*. Je-li $n = m$, pak se determinant Jacobiovy matice m-funkce $\mathscr{F}$ v bodě X_0 nazývá *Jacobián*, budeme značit $J_{\mathscr{F}}(X_0)$ nebo stručně $J(X_0)$.

■ Věta 11.16 — o Jacobiově matici složeného zobrazení. *Nechť $\mathscr{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je m-funkce diferencovatelná v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\mathscr{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ je p-funkce diferencovatelná v bodě $Y_0 = \mathscr{G}(X_0) \in \mathbb{R}^m$. Pak složené zobrazení $\mathscr{H} = \mathscr{F} \circ \mathscr{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ je p-funkce diferencovatelná v bodě X_0 a pro její Jacobiovu matici platí*

$$\underbrace{\mathscr{H}'(X_0)}_{p\times n} = \underbrace{\mathscr{F}'(Y_0)}_{p\times m}\underbrace{\mathscr{G}'(X_0)}_{m\times n}.$$

■ Věta 11.17 — o lokální inverzi. *Nechť $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná n-funkce na nějaké otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ obsahující bod X_0 a $\mathscr{F}'(X_0)$ je regulární (tj. $\det(\mathscr{F}'(X_0)) \neq 0$). Pak existuje okolí $O(X_0)$, v němž je $\mathscr{F}$ prostá, a tedy existuje inverzní n-funkce $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{F}(O(X_0)) \to \mathbb{R}^n$. Tato inverze je spojitě diferencovatelná na $\mathscr{F}(O(X_0))$ a v bodě $Y_0 = \mathscr{F}(X_0)$ pro její Jacobiovu matici platí*

$$(\mathscr{F}^{-1})'(Y_0) = (\mathscr{F}'(X_0))^{-1} \quad \textit{a odtud} \quad J_{\mathscr{F}^{-1}}(Y_0) = \frac{1}{J_{\mathscr{F}}(X_0)}.$$

Poznámka 11.18. a) Předpoklady a závěry věty lze mírně modifikovat. Je známo vícero důkazů (jsou poměrně náročné), obvykle jsou založeny na Banachově větě o pevném bodu (případně její modifikaci). Intuitivně, pokud $\mathscr{F}(X_0) = Y_0$, tak podle Taylorovy věty na $O(X_0)$ platí

$$\mathscr{F}(X) \approx Y_0 + \mathrm{d}\mathscr{F}(X_0; X - X_0).$$

Lineární zobrazení na pravé straně přibližné rovnosti je prosté, právě když je Jacobiova matice $\mathscr{F}'(X_0)$ regulární. Lze se domnívat, že prostá bude na daném okolí i samotná n-funkce $\mathscr{F}$.

Jacobiova matice identického zobrazení $\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jednotková matice E. Podle věty 11.16 pak platí $E = (\mathscr{F}^{-1})'(\mathscr{F}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)) \cdot \mathscr{F}'(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Odtud dostaneme vzorec pro Jacobiovu matice inverze.

b) Věta vlastně říká, za jakých okolností lze ze soustavy $\mathscr{F}(X) = Y$ získat jednoznačné řešení X v závislosti na Y, musíme se ovšem pohybovat „blízko“ bodů X_0 a Y_0.

Uvažujme nyní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0,\\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0,\\ &\vdots\\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \end{aligned} \tag{$*$}$$

m-funkci

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),\\ &\vdots\\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{$**$}$$

bod $[X_0, Y_0] = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0] \in \mathbb{R}^{n+m}$, který vyhovuje soustavě $(*)$ a nechť $\delta > 0$. Řekneme, že m-funkce $(**)$ je dána na okolí $O_\delta(X_0)$ implicitně soustavou $(*)$, jestliže pro každé $X \in O_\delta(X_0)$ platí

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= 0,\\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= 0, \end{aligned}$$

[2] Carl Gustav Jacob Jacobi 1804–1851, Němec

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0.$$

■ Věta 11.19 — o existenci implicitní m-funkce a její Jacobiově matici. *Nechť* $\mathscr{G} = [g_1, g_2, \dots, g_m] : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ *je spojitá m-funkce v okolí* $O_a([X_0, Y_0])$ *pro nějaké* $a > 0$ *(okolí bereme opět v metrice* ρ_∞*), přičemž bod* $[X_0, Y_0]$ *vyhovuje soustavě* $\mathscr{G}(X, Y) = O = [0, 0, \dots, 0]$ *(tj. soustavě* $(*)$*), a nechť všechny prvky matice*

$$\mathscr{G}'_Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

existují v $O_a([X_0, Y_0])$*, jsou spojité v bodě* $[X_0, Y_0]$ *a platí* $\det(\mathscr{G}'_Y(X_0, Y_0)) \neq 0$. *Pak existuje okolí* $O_\delta(X_0) \subseteq \mathbb{R}^n$*, na kterém je soustavou* $\mathscr{G}(X, Y) = O$ *implicitně dána jediná spojitá m-funkce*

$$Y = \mathscr{F}(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)]$$

(tj. m-funkce ve tvaru $(**)$*). Jsou-li navíc spojité všechny prvky matice*

$$\mathscr{G}'_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

a všechny prvky matice $\mathscr{G}'_Y$ *v* $O_a([X_0, Y_0])$*, pak* $\mathscr{F}$ *je diferencovatelná v* X_0 *a pro její Jacobiovu matici platí*

$$\mathscr{F}'(X_0) = -(\mathscr{G}'_Y(X_0, Y_0))^{-1} \mathscr{G}'_X(X_0, Y_0).$$

Idea důkazu. Označíme-li $d = \det(\mathscr{G}'_y(X_0, Y_0))$ a budeme-li s maticemi $\mathscr{G}'_y$ a $\mathscr{G}'_x$ manipulovat stejně jako s derivacemi F'_y a F'_x v důkazu věty 11.3, tak zjistíme, že tento důkaz lze přepsat i pro maticový případ. □

Poznámka 11.20. První část věty vlastně říká, za jakých podmínek lze ze soustavy $(*)$ vyjádřit m-tici $(**)$ (pokud to jde, tak to ještě neznamená, že je to početně jednoduché).

Příklad 11.21. Najděte bod, v jehož okolí vyjadřuje soustava $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 2$, $xu + yv + e^{uv} = 0$ implicitně 2-funkci $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ a určete její Jacobiovu matici v tomto bodě.

Řešení. Dosazením ověříme, že soustavě vyhovuje např. bod $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [-1, 0, 1, 0]$. Dále máme

$$\mathscr{G}'_{[x,y]} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \mathscr{G}'_{[u,v]} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ x + v\,e^{uv} & y + u\,e^{uv} \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathscr{G}'_{[u,v]}) = 2uy + 2u^2\,e^{uv} - 2xv - 2v^2\,e^{uv}.$$

Odtud

$$(\mathscr{G}'_{[u,v]})^{-1} = \frac{1}{2uy + 2u^2\,e^{uv} - 2xv - 2v^2\,e^{uv}} \begin{pmatrix} y + u\,e^{uv} & -2v \\ -x - v\,e^{uv} & 2u \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{F}' = \frac{-1}{2uy + 2u^2\,e^{uv} - 2xv - 2v^2\,e^{uv}} \begin{pmatrix} 2xy + 2xu\,e^{uv} - 2uv & 2y^2 + 2yu\,e^{uv} - 2v^2 \\ -2x^2 - 2xv\,e^{uv} + 2u^2 & -2xy - 2yv\,e^{uv} + 2uv \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\mathscr{F}'(-1, 0) = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení

11.1. Ověřte, že daná rovnice zadává v okolí bodu A implicitně jedinou spojitou funkci $y = f(x)$. Vypočtěte její derivaci a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě A:

$$x \sin y + e^x \cos y + \cos x = 1, \qquad A = [0, \pi/2].$$

11.2. Najděte body, v nichž pro následující rovnice nejsou splněny předpoklady věty o existenci implicitní funkce $z = f(x, y)$:

$$\text{a)}\quad z^2 - 2px = 0, \quad p > 0, \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0.$$

11.3. Uvažujte funkci $y = f(x)$, která je implicitně určena rovnicí

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y = 3 \qquad \text{a bodem} \qquad A = [1, 1].$$

Napište Taylorův polynom druhého stupně této funkce v bodě $x_0 = 1$.

11.4. Na soustavu dvou rovnic $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ lze geometricky nahlížet jako na křivku v prostoru, která vznikne jako průnik ploch (ty jsou určeny právě zadanými rovnicemi). Rozhodněte, zda lze tuto křivku v okolí bodu $X_0 = [\sqrt{3/2}, \sqrt{3}, 3/\sqrt{2}]$ parametrizovat a) pomocí parametru y, b) pomocí parametru z (jinak řečeno, zda lze ze soustavy vyjádřit 2-funkci proměnné y, resp. proměnné z). Je-li některá varianta možná, určete tečný vektor křivky v bodě X_0.

11.5. Nalezněte druhé derivace funkcí $x = \varphi_1(z)$, $y = \varphi_2(z)$, které jsou dány implicitně soustavu rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

v okolí bodu $[-1, 1, 1]$. Vypočtěte jejich hodnoty v bodě $z = 1$.

Výsledky. 11.1. $t:\ x - y + \pi/2 = 0$, $n:\ x + y - \pi/2 = 0$. 11.2. a) Body osy y, b) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ z = 0\}$. 11.3. $T_2(x) = 1 - (x - 1)^2$. 11.4. a) Lze to, $\vec{t} = (-2, 1, 0)$, b) větu o existenci implicitní m-funkce nelze použít, ale pokud si uvědomíme, že křivka je kružnicí rovnoběžnou se souřadnou rovinou xy ve výšce $z = 3/\sqrt{2}$, lehko zjistíme, že případ b) nelze provést. 11.5. $\varphi_1''(1) = -1$, $\varphi_2''(1) = -3$.

12 Vázané extrémy

Definice 12.1 — lokálního extrému vzhledem k množině. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce a $M \subseteq D(f)$ je nějaká neprázdná množina. Řekneme, že funkce f má v bodě $X_0 \in M$ *lokální minimum* (resp. *maximum*) *vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí $O(X_0)$ takové, že pro $X \in M \cap O(X_0)$ platí $f(X_0) \le f(X)$ (resp. $f(X_0) \ge f(X)$). Jsou-li nerovnosti pro $X \ne X_0$ ostré, mluvíme o *ostrých lokálních extrémech vzhledem k* M.

V této kapitole budeme uvažovat případ, kdy množina M je zadána soustavou

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\ &\ \vdots\\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \qquad \text{kde } 1 \le m < n. \end{aligned} \tag{$\triangle$}$$

V tomto případě se místo termínu lokální extrém vzhledem k M používá termínu *lokální extrém vázaný podmínkami* $(\triangle)$ nebo stručně *vázaný lokální extrém*.

■ **Věta 12.2 — metoda Lagrangeových multiplikátorů, nutná podmínka pro existenci vázaného lokálního extrému.** *Nechť funkce $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \le m < n)$ mají spojité parciální derivace v otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny U má Jacobiova matice $\mathscr{G}'$ m-funkce $\mathscr{G} = [g_1, g_2, \dots, g_m]$ hodnost m. Dále, nechť $M \subseteq U$ je množina všech bodů $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, které vyhovují rovnicím $(\triangle)$. Má-li f v bodě $X_0 \in M$ vázaný lokální extrém, pak existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (Lagrangeovy multiplikátory) tak, že jsou splněny rovnosti*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(X_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\heartsuit)$$

Důkaz. Větu lze dokázat vícero způsoby, jeden z nich využívá větu o lokální inverzi (viz věta 11.17). Zde si pro jednoduchost ukážeme důkaz pro $n = 2$ a $m = 1$ (tj. uvažujeme funkci $f = f(x, y)$ dvou proměnných s jednou vazebnou podmínkou $g(x, y) = 0$).

Nechť jsou tedy splněny předpoklady věty a f má v bodě $[x_0, y_0]$ vázaný lokální extrém. Pak $g(x_0, y_0) = 0$. Protože hodnost $h(g'_x, g'_y) = 1$ (matice je zde typu 1×2, tj. řádkový vektor) na nějaké množině U obsahující bod $[x_0, y_0]$, nemůže být zároveň $g'_x(x_0, y_0) = 0$ a $g'_y(x_0, y_0) = 0$. Nechť např. $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak jsou splněny předpoklady vět o existenci implicitní funkce a o její derivaci, tj. existuje funkce $y = \varphi(x)$ taková, že $y_0 = \varphi(x_0)$ a

$$\varphi'(x_0) = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}.$$

Úlohu o vázaném extrému převedeme na na úlohu o (volném) lokálním extrému funkce $h(x) = f(x, \varphi(x))$. Podle věty o derivování složené funkce platí

$$h'(x_0) = f'_x(x_0, \varphi(x_0)) \cdot 1 + f'_y(x_0, \varphi(x_0))\, \varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\, \frac{-g'_x(x, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)} = 0.$$

Pro $[x, y] \in U$ splňující $g(x, y) = 0$ je $\mathrm{d}g = g'_x h + g'_y k = 0$, a tedy i $g'_x(x_0, y_0)h + g'_y(x_0, y_0)k = 0$. Odtud pro $h \neq 0$

$$-\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)} = \frac{k}{h}.$$

Po dosazení této rovnosti do vyjádření pro $h'(x_0)$ dostaneme vynásobením h rovnost

$$f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = 0$$

K této rovnici nyní přičtěme výše uvedenou rovnost $g'_x(x_0, y_0)h + g'_y(x_0, y_0)k = 0$ vynásobenou parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$. Tím dostáváme novou rovnost ve tvaru

$$\left(f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0)\right) h + \left(f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0)\right) k = 0.$$

Zvolme λ tak, aby $f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0$ (to jistě lze, neboť jsme předpokládali, že $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$). Pak ale také musí být $f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0$, protože h je libovolné. Jinak řečeno, existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$, což jsme chtěli ukázat. □

Definice 12.3 — stacionárního bodu funkce na M. Bod $X_0 \in M$, pro který existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tak, že platí $(\heartsuit)$, se nazývá *stacionární bod funkce f na M*.

Poznámka 12.4. Věta 12.2 vlastně dává návod, jak stacionární body nalézt. Sestrojí se Lagrangeova funkce

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Položíme-li její gradient roven nulovému vektoru, dostaneme právě vztahy $(\heartsuit)$.

■ Věta 12.5 — postačující podmínky pro existenci vázaného lokálního extrému. *Nechť S je stacionární bod funkce f na M, $\Lambda_S = [\lambda_1^S, \lambda_2^S, \dots, \lambda_m^S]$ jsou Lagrangeovy multiplikátory příslušné bodu S, funkce $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ mají spojité druhé parciální derivace v bodě S a nějakém jeho okolí a Jacobiova matice $\mathcal{G}'(S)$ má hodnost m. Je-li $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$*

(i) *pozitivně definitní, pak v S je ostré vázané lokální minimum.*
(ii) *negativně definitní, pak v S je ostré vázané lokální maximum.*

Poznámka 12.6. a) Protože diferenciál součtu je součet diferenciálů, platí $\mathrm{d}^2 L = \mathrm{d}^2 f + \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathrm{d}^2 g_k$. Stejně tak pro Hessovu matici diferenciálu $\mathrm{d}^2 L$ platí $H_L = H_f + \sum_{k=1}^m \lambda_k H_{g_k}$.

b) Pozor, je-li $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ indefinitní, tak to (na rozdíl od volných lokálních extrémů) neznamená, že v S není vázaný lokální extrém. Pro existenci vázaných lokálních extrémů stačí, když $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ je kladná (resp. záporná) pro všechny nenulové vektory $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ kolmé k vektorům $\nabla g_k(S)$, $k = 1, 2, \dots, m$). Je-li tedy $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ indefinitní, lze dále postupovat takto: Ze soustavy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_1(S) &= 0, \\ \mathrm{d}g_2(S) &= 0, \\ &\vdots \\ \mathrm{d}g_m(S) &= 0, \end{aligned}$$

tj. ze soustavy

$$\mathcal{G}'(S) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

lze jednoznačně vyjádřit m přírůstků h_i (protože $\mathcal{G}'(S)$ má hodnost m) jako lineární formy zbývajících přírůstků (lineární forma n-proměnných je funkce typu $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$). Dosazením takto vyjádřených přírůstků do $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ dostaneme novou kvadratickou formu $n - m$ proměnných, označme ji např. Φ. Potom platí: Je-li Φ

a) pozitivně definitní, pak v S je ostré vázané lokální minimum,
b) negativně definitní, pak v S je ostré vázané lokální maximum,
c) indefinitní, pak v S nenastává vázaný lokální extrém.

Příklad 12.7. Vyšetřete vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ vzhledem k množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

Řešení. 1. způsob: Vazebnou podmínku pišme ve tvaru $x + y - 1 = 0$ (máme tedy $g(x, y) = x + y - 1$). Lagrangeova funkce má tvar $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Položíme-li parciální derivace podle všech proměnných rovny nule, dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} L'_x &= y + \lambda = 0, \\ L'_y &= x + \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= x + y - 1 = 0, \end{aligned}$$

jejímž jediným řešením je $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ a $\lambda = -\frac{1}{2}$ (z první rovnice se vyjádří y, z druhé x a dosadí se do třetí). Máme tedy jeden stacionární bod $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a k němu příslušný multiplikátor $\lambda_S = -\frac{1}{2}$.

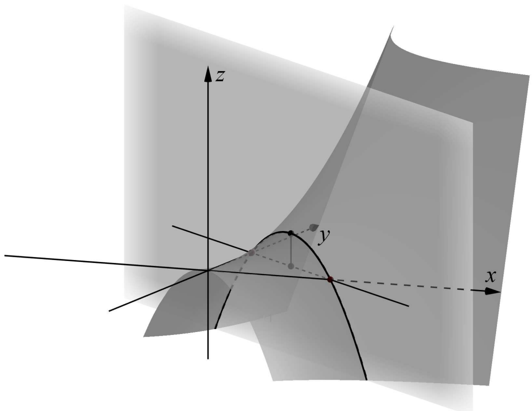
Dále, $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 0$, $g''_{xx} = g''_{xy} = g''_{yy} = 0$, což dává Hessovu matici

$$H_L(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria je $\mathrm{d}^2 L(S)$ indefinitní kvadratická forma, což podle poznámky nad příkladem znamená, že zatím nelze rozhodnout. Vyjádřeme tedy z rovnice $\mathrm{d}g(S) = h + k = 0$ např. proměnnou k, tj.

$k = -h$. Dosadíme-li toto vyjádření do $\mathrm{d}^2L(S)$, dostáváme novou formu $\Phi(h) = -2h^2$ (s přihlédnutím k $H_L(S)$ je $\mathrm{d}^2L(S) = 2hk$). Platí $\Phi(h) < 0$ pro každé $h \neq 0$, tj. forma Φ je negativně definitní a v S je ostré vázané lokální maximum, viz obrázek 12.1.

2. způsob: Příklad lze vyřešit podstatně jednodušeji převodem na lokální extrém funkce jedné proměnné. Z vazebné podmínky vyjádříme jednu z proměnných, např. $y = 1-x$ a zavedeme novou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem $\varphi(x) = f(x, 1-x)$ (jedná se o stejný obrat, který jsme používali již u vyšetřování limit funkce dvou proměnných nad svazkem přímek). Platí $\varphi(x) = x(1-x) = x - x^2$ a z rovnice $\varphi'(x) = 1-2x = 0$ dostaneme jediný stacionární bod $x_s = \frac{1}{2}$. Zřejmě je $\varphi''(x_s) = -2 < 0$, a proto má funkce φ v bodě x_s ostré lokální maximum. To znamená, že funkce f má v bodě $[x_s, y_s] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (druhou složku dostaneme z vazebné podmínky, tj. $y_s = 1 - x_1 = \frac{1}{2}$) ostré vázané maximum.



Obrázek 12.1: Ostré vázané lokální maximum funkce $f(x, y)$ nad přímkou $x + y = 1$ nastává v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

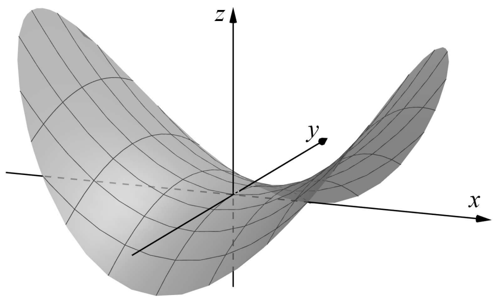
Poznámka 12.8. Druhý způsob v předchozím příkladě skutečně vede výrazně rychleji k cíli, je ale potřeba si uvědomit, že jej lze použít pouze v případě, kdy můžeme snadno vyjádřit z vazebných podmínek m-tici proměnných v závislosti na zbývajících. To nemusí být vůbec jednoduché, metoda se tedy uplatňuje spíše v případě funkce dvou proměnných s jednou vazebnou podmínkou.

Příklad 12.9. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Řešení. Předně si uvědomme, že M je kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$ (tj. ohraničená a uzavřená), a protože f je na M spojitá, podle věty 5.5 (která je jinou formulací Weierstrassových vět) musí globální maximum i minimum na M existovat. Podle poznámky na konci kapitoly 10 pak globální extrém nastane buď v bodě lokálního extrému, nebo na hranici (v případě kompaktní množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hranice do této množiny patří). Stačí tedy vyšetřit stacionární ležící uvnitř M (jinde lokální extrém nastat nemůže, protože f má na M obě parciální derivace) a stacionární body na hranici ∂M (zde se jedná o problém vázaných extrémů funkce f vzhledem k hraniční množině). Není přitom ani potřeba zjišťovat, zda lokální (vázaný lokální) extrém ve stacionárním bodě nastává, stačí si poznamenat funkční hodnotu funkce f v takovém bodě a nakonec se podívat, ve kterém bodě je funkční hodnota největší, resp. nejmenší.

Ze soustavy $f'_x = 6x = 0$, $f'_y = -2y = 0$ dostáváme stacionární bod $[0, 0]$ (ten leží uvnitř zadané množiny), přičemž $f(0, 0) = 0$. Podívejme se dále na situaci na hranici. Kružnici $x^2 + y^2 = 4$ lze vyjádřit parametricky jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Úlohu o vázaném extrému převedeme na úlohu o volném lokálním extrému funkce $\varphi(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 12\cos^2 t - 4\sin^2 t$. Máme $\varphi'(t) = -24\cos t \sin t - 8\sin t \cos t = -32\sin t \cos t = -16\sin 2t$. Stacionární body tedy obdržíme z rovnice $-16\sin 2t = 0$, neboli $\sin 2t = 0$. Řešením uvnitř intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ jsou body $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$. Tyto hodnoty parametru t odpovídají postupně bodům $S_1 = [0, 2]$, $S_2 = [-2, 0]$, $S_3 = [0, -2]$ a krajní body intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ pak odpovídají bodu $S_4 = [2, 0]$. Odpovídající funkční hodnoty jsou

$f(0,2) = f(0,-2) = -9$, $f(2,0) = f(-2,0) = 12$. Na základě úvahy na začátku příkladu tedy lze usoudit, že globální maximum nastává nad osou x v bodech $[-2,0]$ a $[2,0]$ (jeho hodnota je 12) a globální minimum nad osou y v bodech $[0,-2]$ a $[0,2]$ (jeho hodnota je -9). Tyto extrémy nejsou ostré. Graf funkce nad kruhem M je na obrázku 12.2.



Obrázek 12.2: Graf funkce $f(x,y) = 3x^2 - y^2$ nad uzavřeným kruhem $x^2 + y^2 \leq 4$. Globální maxima jsou ve dvou bodech nad osou x a globální minima ve dvou bodech nad osou y

Cvičení

12.1. Nalezněte vázané lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+2y^2$ za podmínky $x^2-2x+2y^2+4y = 0$.

12.2. Nalezněte největší a nejmenší vzdálenost (v metrice ρ_2) počátku od množiny bodů dané rovnicí $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0$.

12.3. Určete lokální a globální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ na množině M bodů vyhovujících rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12.4. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x - 2y - 3$ na trojúhelníku

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

12.5. Mezi všemi pravoúhlými trojúhelníky, mající obsah S, najděte ten, který má nejmenší obvod.

12.6. Určete tři reálná čísla x, y, z tak, aby jejich součin byl maximální, víte-li, že jejich součet je 12.

Výsledky. **12.1.** Ostré vázané lokální minimum v $[0,0]$, $f(0,0) = 0$, ostré vázané lokální maximum v $[2,-2]$, $f(2,-2) = 12$. **12.2.** Nejmenší vzdálenost 1 nastane 1 v bodech $\left[\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2\right]$ a největší vzdálenost 2 nastane v bodech $\left[\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right]$. **12.3.** globální minimum v $[0,0,\pm1]$, $f(0,0,\pm1) = -1$, globální maximum na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ v rovině $z = 0$ (funkční hodnota v těchto bodech je 1). **12.4.** $\max_{[x,y]\in M} f(x,y) = -2$, $\min_{[x,y]\in M} f(x,y) = -5$. **12.5.** Rovnoramenný trojúhelník. **12.6.** $x = y = z = 4$.

Kapitola 3

Integrální počet funkce více proměnných

13 Dvojný integrál

Motivace: Riemannův integrál byl zaveden tak, aby pro kladnou spojitou funkci na $\langle a, b\rangle$ odpovídal obsahu obrazce ohraničeného grafem funkce, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Dvojný integrál zavedeme analogicky, tj. tak, aby v případě kladné spojité funkce na dvourozměrném intervalu $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ odpovídal objemu tělesa ohraničeného grafem funkce a rovinami $z = 0, x = a, x = b, y = c$ a $y = d$. Vycházíme z funkce ohraničené na dvojrozměrném uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ (tj. na uzavřeném obdélníku), kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

Pro libovolné dělení $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a libovolné dělení $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ intervalu $\langle c, d\rangle$ definujeme dělení $D = (D_x, D_y)$ obdélníku I jakožto systém uzavřených obdélníků $I_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$ (kde $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$) a jejich obsah označme

$$\lambda(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Symbolem $\mathscr{D}(I)$ označíme množinu všech dělení D obdélníku I. Nyní pro každé $D \in \mathscr{D}(I)$ položme $m_{ij} := \inf\{f(x, y) : [x, y] \in I_{ij}\}$ a $M_{ij} := \sup\{f(x, y) : [x, y] \in I_{ij}\}$ a definujme dolní a horní součet příslušný funkci f a dělení D jako

$$s(D, f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\lambda(I_{ij}) \quad \text{a} \quad S(D, f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\lambda(I_{ij}),$$

a dolní a horní integrál funkce f na intervalu I jako

$$\underline{\iint_{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sup\{s(D, f) : D \in \mathscr{D}(I)\} \quad \text{a} \quad \overline{\iint_{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \inf\{S(D, f) : D \in \mathscr{D}(I)\}.$$

Definice 13.1 — dvojného Riemannova integrálu na obdélníku. Řekneme, že funkce f je *na intervalu I (riemannovsky) integrovatelná*, platí-li

$$\underline{\iint_{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tuto společnou hodnotu nazveme *dvojným (Riemannovým) integrálem funkce f na intervalu I*.

Poznámka 13.2. a) V souladu s výkladem Riemannova integrálu funkce jedné proměnné, výše uvedený přístup je Darbouxův (originální Riemannova definice pracuje opět s integrálními součty příslušnými k funkci f, dělení D a výběrem reprezentantů Ξ).

b) Protože je dvojný integrál zaveden analogicky jako u funkce jedné proměnné, lze očekávat, že i základní vlastnosti zůstanou zachovány. Zejména platí: jsou-li f, g integrovatelné na obdélníku I, pak

1. cf je integrovatelná na I a platí $\iint_I cf(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

2. $|f|$ je integrovatelná na I a platí $\left|\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \iint_I |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
3. $f+g$ je integrovatelná na I a platí $\iint_I [f(x,y)+g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_I g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
4. je-li $I = I_1 \cup I_2$, kde I_1, I_2 jsou obdélníky s $I_1^\circ \cap I_2^\circ = \emptyset$, pak $\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{I_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Příklad 13.3. Přímo z definice lze spočítat, že a) $\iint_I 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda(I) = (b-a)(d-c)$, b) $\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $f(x,y) = \chi(x)$, neexistuje, neboť

$$\iint_{\underline{I}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad \text{a} \quad \iint_{\overline{I}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

■ Věta 13.4 — postačující podmínka pro existenci integrálu na obdélníku. *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na uzavřeném obdélníku I, pak je na I integrovatelná.*

Důkaz. Uzavřený obdélník I je kompaktní množinou v $\mathbb{R}^2$, a protože f je podle předpokladu spojitá funkce na I, tak podle věty 5.5 je $f(I)$ kompaktní množina v $\mathbb{R}$, tj. uzavřený interval v $\mathbb{R}$. Funkce f je tedy na I ohraničená, a tudíž má horní a dolní integrál. Je potřeba ukázat, že se rovnají.

Podle Heineho–Cantorovy věty (viz věta 5.9) je spojitá funkce na uzavřeném obdélníku stejnoměrně spojitá. To znamená, že vezmeme-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak k $\varepsilon/\lambda(I)$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné body $[x_1, y_2]$, $[x_2, y_2]$ z obdélníku I splňující $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta$, platí $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon/\lambda(I)$.

Buď nyní $D = (D_x, D_y) = \{I_{ij} : i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m\}$ nějaké dělení, jehož norma je menší než δ, tj. délka uhlopříčky libovolného obdélníku I_{ij} v dělení je menší než δ. Protože také všechny I_{ij} jsou kompaktní a f je na nich spojitá, nabývá na každém I_{ij} svého (globálního) minima a maxima, tj. existují body $[\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*] \in I_{ij}$ a $[\xi_{ij}^{**}, \eta_{ij}^{**}] \in I_{ij}$ takové, že

$$\begin{aligned} u_{ij} &:= f(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*) \leq f(x,y) \quad \forall [x,y] \in I_{ij}, \\ U_{ij} &:= f(\xi_{ij}^{**}, \eta_{ij}^{**}) \geq f(x,y) \quad \forall [x,y] \in I_{ij}. \end{aligned}$$

Zároveň platí

$$0 \leq U_{ij} - u_{ij} < \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}, \quad \text{protože} \quad \sqrt{(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}^{**})^2 + (\eta_{ij}^* - \eta_{ij}^{**})^2} < \delta.$$

Odtud máme

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U_{ij}\lambda(I_{ij}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\lambda(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (U_{ij} - u_{ij})\lambda(I_{ij}) \\ &< \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}\lambda(I_{ij}) = \frac{\varepsilon}{\lambda(I)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda(I_{ij}) = \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}\lambda(I) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že rozdíl horního a dolního součtu lze při vhodném dělení D udělat libovolně malý (menší než ε), což je nutnou a postačující podmínkou pro integrovatelnost funkce na obdélníku I (jedná se o analogii věty 21.10 z SA1). Tím je důkaz hotov. □

Praktický výpočet dvojného integrálu nám umožňuje následující tvrzení.

■ Věta 13.5 — Fubiniova na obdélníku, Guido Fubini 1879–1943, Ital. *Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce integrovatelná na uzavřeném dvojrozměrném intervalu $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Je-li pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ funkce $y \mapsto f(x,y)$ integrovatelná na $\langle c,d\rangle$, pak je na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná funkce $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ a platí*

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Je-li naopak pro každé $y \in \langle c,d\rangle$ na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná funkce $x \mapsto f(x,y)$, pak je na $\langle c,d\rangle$ integrovatelná funkce $h(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Pro libovolné dělení $D = (D_x, D_y)$ obdélníku I máme

$$m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij} \qquad \forall [x,y] \in I_{ij}, \quad i = 1,2,\dots,n, \ j = 1,2,\dots,m$$

(m_{ij} a M_{ij} mají stejný význam jako v úvodu této kapitoly). Protože dle předpokladu je $y \mapsto f(x,y)$ integrovatelná na $\langle c,d\rangle$, je integrovatelná i na $\langle y_{i-1}, y_i\rangle$ (monotonie vzhledem k integračnímu oboru, viz věta 22.14 v SA1), a tedy musí platit

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y \le M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \qquad \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle, \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

(viz věta 22.4 v SA1). Sečtením přes $j = 1,2,\dots,m$ dostaneme

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

tj.

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \quad \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle, \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}. \tag{$\spadesuit$}$$

kde na prostřední člen jsme aplikovali větu 22.13 z SA1 (aditivitu vzhledem k integračnímu oboru). Označme

$$g(x) := \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

a ukažme, že tato funkce je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$, tj. že $\int_{\overline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$. Předně si všimněme, že g je ohraničená na $\langle a,b\rangle$. To plyne ihned z faktu, že f je integrovatelná na I, tj. musí zde být ohraničená, tj. platí

$$\underbrace{\inf_{[x,y]\in I} f(x,y) \int_c^d \mathrm{d}y}_{konst.} \le \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y}_{g(x)} \le \underbrace{\sup_{[x,y]\in I} f(x,y) \int_c^d \mathrm{d}y}_{KONST.} \qquad \forall x \in \langle a,b\rangle$$

Z ohraničenosti g pak plyne, že výše uvedený spodní a horní integrál na $\langle a,b\rangle$ existují. Z nerovností ($\spadesuit$) dále plyne, že

$$\begin{aligned}\int_a^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{\underline{x_i}} g(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{\underline{x_i}} \Big(\sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1})\Big)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \int_{x_{i-1}}^{\underline{x_i}} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}\lambda(I_{ij}) = S(D,f)\end{aligned}$$

(první rovnost plyne opět z věty 22.13 v SA1). Analogicky bychom ukázali, že

$$s(D,f) \le \int_{\overline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože poslední dvě nerovnosti platí pro libovolné dělení $D \in \mathscr{D}(I)$, dostáváme odtud (spolu s vlastností suprema a infima)

$$\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Protože podle předpokladu je f integrovatelná, v posledním vztahu nastanou rovnosti, a tedy g je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ přičemž

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro funkci h by se ukázalo analogicky. □

Poznámka 13.6. a) Za předpokladů věty tedy nezáleží na pořadí integrace, v případě spojité funkce na I jsou tyto předpoklady splněny automaticky. Může se však stát, že pořadí není rovnocenné z hlediska obtížnosti integrace, viz následující příklad.

b) Je-li $f(x,y) = g(x)h(y)$, kde g, h jsou spojité, pak lze psát $\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$.

Příklad 13.7. Vypočítejte $\iint_I x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

Řešení. *Řešení.* Integrovaná funkce je na I spojitá, a tedy podle Fubiniovy věty integrovatelná, přičemž

$$\iint_I x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Problém nyní je, že poslední integrál neumíme vyčíslit, neboť nelze určit primitivní k funkci integrované. Zkusme tedy opačný postup, kdy nejprve budeme integrovat vzhledem k y:

$$\iint_I x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1-0}{y+1}\,\mathrm{d}y$$
$$= \left[\ln(y+1)\right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

Definice 13.8 — normální množiny. Nechť φ_1, φ_2 jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$ takové, že $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Množinu

$$M_1 := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

nazveme *normální množinou vzhledem k ose x*.
Podobně, jsou-li ψ_1, ψ_2 spojité funkce na $\langle c,d\rangle$ takové, že $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pro $\forall y \in (c,d)$, pak množinu

$$M_2 := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

nazveme *normální množinou vzhledem k ose y*.
Množinu M nazveme *normální*, je-li normální k alespoň jedné z os x, y.

Definice 13.9 — dvojného integrálu na normální množině. Nechť M je normální množina, např. vzhledem k ose x, a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná a omezená na M. Zvolme $c, d \in \mathbb{R}$ tak, že $c \le \min\{\varphi_1(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $d \ge \max\{\varphi_2(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$. Rozšiřme definiční obor funkce f na obdélník $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ tak, že položíme $f(x,y) = 0$ pro $\forall [x,y] \in I \setminus M$. Řekneme, že funkce f je *(riemannovsky) integrovatelná* na M, jestliže je integrovatelná na I. V tomto případě klademe

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka 13.10. a) Uvedená definice zřejmě nezávisí na volbě konstant c, d (změnou těchto čísel se pouze zmenší nebo zvětší obdélník přes který integrujeme, ale pouze tam, kde je f nulová). Lze tedy vždy volit $c = \min\{\varphi_1(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $d = \max\{\varphi_2(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$.

■ **Věta 13.11 — postačující podmínka pro existenci integrálu na normální množině.** *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na normální množině M. Pak je na M integrovatelná.*

Idea důkazu. Základní myšlenka je stejná jako ve větě 13.4 (využíváme vlastnosti, kdy funkce spojitá na kompaktní množině je zároveň stejnoměrně spojitá), důkaz je pouze o něco technicky náročnější. □

■ **Věta 13.12 — Fubiniova na normální množině vzhledem k ose x.** *Nechť M je normální množina vzhledem k ose x a nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na M. Je-li pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ integrovatelná funkce $x \mapsto f(x, y)$ na $\langle\varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle$, pak platí*

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť c, d jsou takové, že $c \le \min\{\varphi(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $d \ge \max\{\psi(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$ a $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Podle definice a Fubiniovy věty na obdélníku máme

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$ je však $\langle c, d\rangle = \langle c, \varphi_1(x)) \cup \langle\varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle \cup \langle\varphi_2(x), d\rangle$ a tedy

$$\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{\varphi_2(x)}^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

protože pro $y \in \langle c, \varphi_1(x))$ i pro $y \in (\varphi_2(x), d\rangle$ je $f(x, y) = 0$. Dosazením vyjde tvrzení. □

Poznámka 13.13. Pro normální množinu vzhledem k ose y by se vzorec modifikoval

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.$$

Příklad 13.14. Vypočtěte $\displaystyle\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je vymezena křivkami $y = 4x$, $x = 2$, $y = \dfrac{1}{x}$.

Řešení. Množina M je normální množinou vzhledem k oběma osám, její vyjádření vzhledem k ose x je $\frac{1}{2} \le x \le 2$, $\frac{1}{x} \le y \le 4x$. Integrand je spojitou funkcí na M, je zde tedy integrovatelný a podle Fubiniovy věty pak platí

$$\begin{aligned}\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{1/2}^2 \Big(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \left[\frac{-x^2}{y}\right]_{1/x}^{4x} \mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^2 \Big(-\frac{x}{4} + x^3\Big)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{4}\right]_{1/2}^2 = -\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{225}{64}.\end{aligned}$$

Příklad 13.15. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\iint_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, M je trojúhelník o vrcholech $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[2, 0]$.

Řešení. Množina M je opět normální množinou vzhledem k oběma osám, nyní je ale výhodnější ji vyjádřit vzhledem k ose y, což vede na nerovnosti $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2 - y$. Podle Fubiniovy věty tedy platí

$$\begin{aligned}\iint_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \Big(\int_y^{2-y} xy\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2 y\right]_y^{2-y} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 ((2-y)^2 y - y^3)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (2y - 2y^2)\,\mathrm{d}y = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Poznámka 13.16. Definici dvojného integrálu je dále možné rozšířit na případ tzv. regulární množiny, což je množina, kterou lze rozložit na konečný počet normálních množin, tj. platí $M = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$, $M_i^\circ \cap M_j^\circ = \emptyset$, $\forall i, j,\ i \neq j$, kde M_i jsou normální. Příkladem regulární množiny je množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Potom klademe

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sum_{i=1}^{m} \iint_{M_i} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cvičení

13.1. Vypočítejte následující integrály:

$$\text{a)} \quad \iint_M \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle\,;$$

$$\text{b)} \quad \iint_M \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad M = \langle 0, 1\rangle^2 .$$

13.2. Vypočítejte následující integrály přes normální množiny:

$$\text{a)} \quad \iint_M x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad M \text{ je vymezena přímkami } y = x,\ y = x - 1,\ y = 0,\ y = 2;$$

$$\text{b)} \quad \iint_M \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad M \text{ je vymezena křivkami } y^2 = 2x,\ y = x.$$

Výsledky. **13.1.** a) $\frac{1}{2}\ln 2$; b) $2/3$. **13.2.** a) $16/3$; b) $\ln 2$.

14 Alternativní přístup k definování dvojného integrálu

Nejprve se vybuduje teorie míry na vhodných podmnožinách množiny $\mathbb{R}^2$. Pojem míry zobecňuje pojem obsahu rovinného obrazce. Označíme-li $\lambda(A)$ míru množiny $A \subseteq \mathbb{R}^2$, pak λ lze chápat jako zobrazení z množiny podmnožin $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}_0^+$. Míra by měla splňovat následující přirozené podmínky:

(i) Je-li $A \subseteq B$, pak $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ (z této vlastnosti také ihned plyne, že totožné množiny mají stejnou míru).

(ii) Je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Obecnou míru v prostoru $\mathbb{R}^2$ (resp. v $\mathbb{R}^n$) jako první zkonstruoval Camille Jordan (1838–1922, Francouz). Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $j, k \in \mathbb{Z}$. *Čtverec řádu n* definujeme jako množinu

$$Q_{j,k}^n := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n},\ \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n}\right\}.$$

Není-li podstatné umístění čtverce, píšeme stručně Q^n. Množinu všech čtverců řádu n nazveme *síť řádu n* a síť řádu 0 nazveme *základní síť*. Reálné číslo

$$\lambda(Q_{j,k}^n) := \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$$

nazveme *mírou čtverce řádu n*. Dále klademe $\lambda(\emptyset) = 0$. Konečné sjednocení čtverců řádu n nazveme *elementární množinou řádu n*. Je-li $M = \bigcup_{j,k \in \mathcal{I}} Q_{j,k}^n$ ($\mathcal{I}$ značí nějakou množinu indexů j, k) elementární množina řádu n, pak klademe

$$\lambda(M) := \lambda\left(\bigcup_{j,k \in \mathcal{I}} Q_{j,k}^n\right) = \sum_{j,k \in \mathcal{I}} \lambda\left(Q_{j,k}^n\right).$$

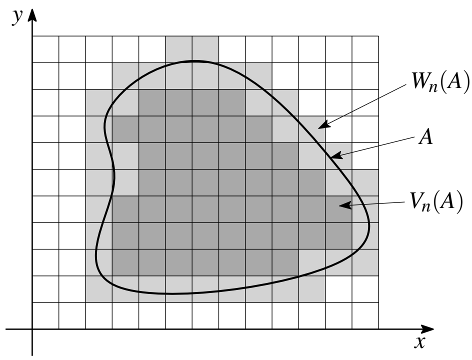
Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je libovolná ohraničená množina. *Jádro řádu n množiny A* definujeme jako největší (vzhledem k množinové inkluzi) elementární množinu, která je obsažena ve vnitřku A, budeme značit $V_n(A)$. Platí tedy

$$V_n(A) = \bigcup_{j,k} \{Q^n_{j,k} : Q^n_{j,k} \subseteq A^\circ\}.$$

Obal řádu n množiny A (budeme značit $W_n(A)$) definujeme jako nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi) elementární množinu řádu n, jejíž vnitřek obsahuje uzávěr množiny A, tj.

$$W_n(A) = \bigcup_{j,k} \{Q^n_{j,k} : \overline{A} \cap Q^n_{j,k} \neq \emptyset\},$$

viz obrázek 14.1. Neexistuje-li čtverec řádu n, který by byl částí A°, klademe $V_n(A) = \emptyset$. Je-li $A = \emptyset$, klademe $W_n(A) = \emptyset$.



Obrázek 14.1: Jádro řádu n (tmavší šedá) a obal řádu n (světlejší šedá) množiny A (čtverce jádra jsou zároveň čtverci obalu)

Vlastnosti:

(i) $V_n \subseteq A \subseteq W_n$,

(ii) $\lambda(W_n(\partial A)) = \lambda(W_n(A)) - \lambda(V_n(A))$,

(iii) $\lambda(V_n(A)) \leq \lambda(V_{n+1}(A))$, $\lambda(W_n(A)) \geq \lambda(W_{n+1}(A))$ pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

(iv) posloupnosti měr $\{\lambda(V_n(A))\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\lambda(W_n(A))\}_{n=0}^{\infty}$ mají vlastní limitu.

Poslední vlastnost nás opravňuje k následující definici.

Definice 14.1 — vnější a vnitřní Jordanovy míry. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je ohraničená množina. Číslo

$$\lambda_*(A) := \lim_{n\to\infty} \lambda(V_n(A))$$

se nazývá *vnitřní Jordanova míra množiny* A a číslo

$$\lambda^*(A) := \lim_{n\to\infty} \lambda(W_n(A))$$

se nazývá *vnější Jordanova míra množiny* A. Jestliže $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$, pak řekneme, že *množina A je (jordanovsky) měřitelná* a číslo $\lambda(A) = \lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ se nazývá *(Jordanova) míra množiny A*.

Poznamenejme, že vždy platí $0 \leq \lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$.

Příklad 14.2. Zjistěte, zda je měřitelná množina $A = \{[x, y] \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Řešení. Platí $A^\circ = \emptyset$ a tedy také $V_n(A) = \emptyset$ pro libovolné n. To znamená, že $\lambda_*(A) = 0$. Dále $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle = Q^0_{0,0}$ a tedy

$$\lambda(W_0(A)) = 1 + 8 \cdot 1 = 1 + \frac{2 \cdot 4}{2^0},$$

$$\begin{aligned}
\lambda(W_1(A)) &= 1 + 12 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 4}{2^2}, \\
\lambda(W_2(A)) &= 1 + 20 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{5 \cdot 4}{2^4}, \\
&\vdots \\
\lambda(W_n(A)) &= 1 + (4 \cdot 2^n + 4) \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = 1 + \frac{(2^n + 1)4}{2^{2n}} = 1 + 4\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\lambda^*(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 4\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right)\right) = 1$. Protože $0 = \lambda_*(A) < \lambda^*(A) = 1$, není A jordanovsky měřitelná.

Vlastnosti:

1. Je-li $\lambda^*(A) = 0$, pak A je měřitelná a platí $\lambda(A) = 0$.
2. Jsou-li $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničené množiny, pak platí:
   (i) je-li $A \subseteq B$, pak $\lambda_*(A) \le \lambda_*(B)$, $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$,
   (ii) $\lambda^*(A \cup B) \le \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$,
   (iii) je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\lambda_*(A) + \lambda_*(B) \le \lambda_*(A \cup B)$.
3. Jsou-li $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelné množiny, pak platí:
   (i) Je-li $A \subseteq B$, pak $\lambda(A) \le \lambda(B)$,
   (ii) Je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B)$.
   Jordanova míra tedy splňuje motivační vlastnosti z úvodu odstavce.
4. Každá konečná množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná a platí $\lambda(A) = 0$. Dále mají míru nula křivky tvořené grafy spojitých funkcí $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$ na uzavřených intervalech nebo obecněji (definice uvedeme později) tzv. jednoduché hladké (rovinné) křivky jako je např. kružnice nebo její část či tzv. jednoduché po částech hladké (rovinné) křivky jako je křivka složená z hranice ∂I obdélníka I, která má čtyři hladké části, jimiž jsou strany obdélníka. Obecně můžeme uvažovat i množiny tvořené konečně mnoha křivkami v $\mathbb{R}^2$ (tj. rovinnými) všech zmíněných typů.
5. Ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná $\iff \lambda(\partial A) = 0$. Vzhledem k předchozímu bodu jsou měřitelné všechny normální množiny (protože hranice má míru nula, vnitřek takové množiny má stejnou míru jako celá množina). Speciálně, obdélník $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je měřitelná množina a má míru $\lambda(I) = (b - a)(d - c)$.
6. Jsou-li množiny A, B měřitelné, pak také množiny $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ jsou měřitelné. Odtud plyne, že regulární množiny jsou měřitelné.

Nyní můžeme přistoupit k (alternativní) definici Riemannova integrálu na měřitelné množině. Množinu

$$C^n = C^n_{j,k} := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \le x < \frac{j+1}{2^n},\ \frac{k}{2^n} \le y < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ j, k \in \mathbb{Z}$$

nazveme čtvercovou množinou řádu n (od čtverce řádu n se liší tím, že není uzavřená). Čtvercové množiny pokrývají celý prostor $\mathbb{R}^2$ a jsou po dvou disjunktní, tj. každý bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ je prvkem právě jedné z nich. Každá čtvercová množina řádu n je měřitelná a její míra je $\lambda(C^n) = \frac{1}{4^n}$

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná množina a buďte $C^n_1, C^n_2, \ldots, C^n_m$ všechny čtvercové množiny řádu n takové, že $P^n_1 := C^n_1 \cap M \ne \emptyset, \ldots, P^n_m := C^n_m \cap M \ne \emptyset$. Systém množin $\mathscr{P}_n := \{P^n_1, \ldots, P^n_m\}$ nazveme *pokrytím řádu n množiny M*. Každá z množin P^n_i je měřitelná, protože je průnikem dvou měřitelných množin. Míra množiny M je pak rovna

$$\lambda(M) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(P^n_i).$$

Dále, nechť f je funkce ohraničená na M. Pro pokrytí $\mathscr{P}_n$ množiny M položme

$$h_i := \inf\{f(x, y) : [x, y] \in P^n_i\}, \quad H_i := \sup\{f(x, y) : [x, y] \in P^n_i\}.$$

Pak čísla

$$s_n(M,f) := \sum_{i=1}^{m} h_i \lambda(P_i^n) \quad \text{a} \quad S_n(M,f) := \sum_{i=1}^{m} H_i \lambda(P_i^n)$$

nazveme *dolní a horní součet řádu n příslušný množině M a funkci f*. Lze ukázat, že posloupnost $\{s_n(M,f)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a posloupnost $\{S_n(M,f)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, přičemž obě jsou ohraničené. To nás (spolu s větou o monotónních posloupnostech) opravňuje k následující definici.

Definice 14.3 — dvojného (Riemannova) integrálu na měřitelné množině. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce na M. Definujme *dolní a horní integrál z funkce f přes množinu M* jako

$$\iint_{\underline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \lim_{n\to\infty} s_n(M,f) \quad \text{a} \quad \iint_{\overline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \lim_{n\to\infty} S_n(M,f).$$

Je-li

$$\iint_{\underline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\overline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

řekneme, že *funkce f je na množině M (riemannovsky) integrovatelná* a tuto společnou hodnotu nazveme *dvojným (Riemannovým) integrálem z funkce f přes množinu M*.

Poznámka 14.4. Je-li M uzavřený obdélník, resp. normální množina, pak definice 14.3 je ekvivalentní definici 13.1, resp. definici 13.9, tj. je-li funkce integrovatelná podle jedné definice, je integrovatelná i podle druhé a naopak, přičemž hodnoty integrálů jsou stejné.

Vlastnosti:

1. Jsou-li f, g integrovatelné na měřitelné množině M a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g$ je integrovatelná na M a platí
$$\iint_M \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
2. Jsou-li f, g integrovatelné na měřitelné množině M a $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall [x,y] \in M$, pak
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. Je-li f integrovatelná na měřitelné množině M, pak je i $|f|$ integrovatelná na M a platí
$$\left|\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \iint_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
4. Jsou-li f, g integrovatelné na měřitelné množině M takové, že $\alpha \le f(x,y) \le \beta$, $0 \le g(x,y)$ $\forall [x,y] \in M$, pak existuje konstanta μ ($\alpha \le \mu \le \beta$) taková, že
$$\iint_M f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{(integrální věta o střední hodnotě).}$$
5. Je-li f integrovatelná na měřitelné množině M, pak je integrovatelná na každé měřitelné podmnožině $A \subseteq M$.
6. Jsou-li M_1, M_2 dvě disjunktní měřitelné množiny, na kterých je f integrovatelná, pak je integrovatelná také na $M_1 \cup M_2$ a platí
$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
7. Je-li f ohraničená na množině M míry nula, pak je f na M integrovatelná a platí
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

8. Jsou-li M_1, M_2 měřitelné množiny takové, že jejich průnik je měřitelný a platí $\lambda(M_1 \cap M_2) = 0$ a je-li f integrovatelná na M_1 i M_2, pak je integrovatelná také na $M_1 \cup M_2$ a platí

$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9. Platí

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda(M) \qquad \text{pro libovolnou měřitelnou množinu } M.$$

Definice 14.5 — vlastnosti „skoro všude“. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějaké množině A má *skoro všude vlastnost* $\mathcal{V}$, jestliže existuje podmnožina $B \subseteq A$ taková, že $\lambda(B) = 0$ a f má vlastnost $\mathcal{V}$ ve všech bodech množiny $A \setminus B$.

■ **Věta 14.6.** *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrovatelná na měřitelné množině M a funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená na M, přičemž skoro všude na M platí $f = g$. Pak funkce g je integrovatelná na M a platí*

$$\iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka 14.7. Jinými slovy, změníme-li u integrovatelné funkce hodnoty na množině míry nula, tak hodnota integrálu se nezmění. Vzhledem k této vlastnosti pak taková funkce na množině míry nula nemusí být vůbec definována.

■ **Věta 14.8 — postačující podmínka pro integrovatelnost na měřitelné množině.** *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohraničená na měřitelné množině M a skoro všude na M spojitá, pak je f na M integrovatelná.*

Cvičení

14.1. Pomocí definice určete Jordanovu míru množiny $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ y = x\}$ (tj. úsečky spojující počátek s bodem $[1,1]$).

Výsledky. 14.1. 0.

15 Trojný integrál

V případě trojného integrálu je možné postupovat analogicky jako v předchozích dvou kapitolách.

1. Začali bychom s definicí trojného integrálu ohraničené funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na uzavřeném kvádru

$$I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle\,.$$

   Ten „rozřežeme“ na systém menších kvádrů I_{ijk}, na každém kvádru vezmeme infimum a supremum funkce f a definujeme dolní a horní součet příslušný funkci f a dělení D. Supremum dolních součtů a infimum horních součtů přes všechna možná dělení kvádru bychom nazvali *dolním* a *horním integrálem na kvádru I*; pokud tyto dvě hodnoty jsou stejné, tak řekneme, že *f je (riemannovsky) integrovatelná na kvádru I* a společnou hodnotu nazveme *trojným (Riemannovým) integrálem funkce u na kvádru I*.
2. Nejjednodušší postačující podmínkou pro integrovatelnost funkce na I je její spojitost na I.
3. Fubiniova věta potom říká, že je-li f integrovatelná na I a pro všechna $[x,y] \in I_{xy} = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ je integrovatelná funkce $z \mapsto f(x,y,z)$ na $\langle a_3, b_3 \rangle$, pak platí

$$\iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{I_{xy}} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

analogicky pro integrovatelnost funkcí $y \mapsto f(x,y,z)$ a $z \mapsto f(x,y,z)$. Speciálně, je-li f spojitá na I, pak platí

$$\iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\Big(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_3}^{b_3}\Big(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}x = \dots = \int_{a_3}^{b_3}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z.$$

Je-li navíc $f(x,y,z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$, pak lze psát

$$\iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y)\,\mathrm{d}y \cdot \int_{a_3}^{b_3} f_3(z)\,\mathrm{d}z.$$

4. Dále bychom rozšířili pojem trojného integrálu na normální množiny. Buď M_{xy} normální množina v $\mathbb{R}^2$ a ψ_1, ψ_2 spojité funkce na M_{xy} takové, že $\psi_1(x,y) < \psi_2(x,y)\ \forall [x,y] \in M_{xy}^{\circ}$. *Normální množinou vzhledem k rovině xy* nazveme množinu $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in M_{xy}$ a $\psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$. Analogicky bychom definovali normální množinu vzhledem k rovinám xz a yz. Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *normální*, je-li normální k alespoň jedné ze souřadných rovin xy, xz, yz. Trojný integrál na normální množině pak definujeme tak, že tuto normální množinu „vnoříme" do nějakého uzavřeného kvádru I a funkci f na I mimo množinu M dodefinujeme nulou. Řekneme potom, že funkce f je integrovatelná na normální množině M, je-li dodefinovaná funkce integrovatelná na I.
5. Buď M normální např. vzhledem k souřadné rovině xy. Potom se vzorec z Fubiniovy věty modifikuje

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{M_{xy}}\Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   Pojem trojného integrálu by dále bylo možno rozšířit na případ konečného sjednocení normálních množin (s disjunktními průniky).
6. Konečně, alternativní přístup k definování trojného integrálu je možné založit na pojmu Jordanovy míry v $\mathbb{R}^3$. V příslušných definicích by nyní namísto čtverců vystupovaly krychle. Zjednodušeně lze říci, že v případě „rozumných" těles Jordanova míra odpovídá objemu tělesa, přičemž hranice tělesa má nulovou míru.
7. Zejména platí analogie věty 14.8 – je-li f ohraničená na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$ a spojitá skoro všude na M, pak je zde integrovatelná.

Příklad 15.1. Určete hodnotu integrálu $\iiint_M (x+2y-3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $M = \langle 1,3\rangle \times \langle -1,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Řešení. Funkce je spojitá na daném kvádru M a tedy integrovatelná. Podle Fubiniovy věty pak platí

$$\iiint_M (x+2y-3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^3\Big(\int_{-1}^1\Big(\int_0^2 (x+2y-3z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^3\Big(\int_{-1}^1\Big[xz+2yz-\frac{3}{2}z^2\Big]_0^2\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_1^3\Big(\int_{-1}^1 (2x+4y-6)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^3\Big[2xy+2y^2-6y\Big]_{-1}^1\mathrm{d}x = \int_1^3 (2x+2-6+2x-2-6)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (4x-12)\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[2x^2-12x\Big]_1^3 = -8.$$

Příklad 15.2. Určete hodnotu integrálu $\iiint_M y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde M je množina vymezená plochami $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\pi/2$.

Řešení. Funkce $f(x,y,z) = y\cos(x+z)$ je spojitá v celém prostoru $\mathbb{R}^3$, a tedy i na zadané množině M, což znamená, že je zde integrovatelná. Vyjádřeme M jako normální množinu vzhledem k rovině xy, tj.

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{(body)},$$

$$0 \le y \le \sqrt{x}, \qquad \text{(křivky)},$$
$$0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x \qquad \text{(plochy)}.$$

Podle Fubiniovy věty pak máme

$$\iiint_M y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}\Big(\int_0^{\pi/2-x} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}} y\big[\sin(x+z)\big]_0^{\pi/2-x}\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}} y\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{y^2}{2}\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\Big)\right]_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(1-\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = 1-\sin x \\ u' = 1 & v = x + \cos x \end{array}\right| = \frac{1}{2}\big[x^2 + x\cos x\big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(x+\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + 1\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \doteq 0{,}11685.$$

Cvičení

15.1. Vypočtěte následující trojné integrály:

a) $\displaystyle\iiint_M \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1,\ x+y+z \le 1\},$

b) $\displaystyle\iiint_M xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad M$ je osmina koule o poloměru 1 se středem v počátku ležící v I. oktantu.

Výsledky. **15.1.** a) $\frac{3}{2} - 2\ln 2$, b) $1/48$.

16 Substituce (transformace) ve dvojném a trojném integrálu

Připomeňme nejprve, jak vypadá věta o substituci v případě funkce jedné proměnné: Je-li f spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a φ je rostoucí (a tedy prostá) funkce na $\langle \alpha, \beta\rangle$, která zde má spojitou derivaci, přičemž $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Je-li naopak φ klesající na $\langle \alpha, \beta\rangle$, přičemž nyní $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, pak se vzorec modifikuje

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zaměníme-li předpoklad ryzí monotonie funkce φ předpokladem $\varphi'(t) \ne 0$ pro každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ (to nám zaručí, že φ je zde rostoucí, nebo je klesající), pak lze oba vzorce psát v jednom jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Definice 16.1 — regulární 2-funkce. Nechť $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je 2-funkce, která je spojitě diferencovatelná na otevřené množině M. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je *regulární na M*, jestliže $J_{\mathcal{F}} \ne 0$ v každém bodě množiny M.

■ **Věta 16.2 — o substituci ve dvojném integrálu.** *Nechť $M^* \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a nechť $M^* \subseteq \Omega$. Nechť dále $\mathscr{F}(u,v) = [g(u,v), h(u,v)]$ je prostá a regulární 2-funkce na Ω a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na $M = \mathscr{F}(M^*)$. Pak platí*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M^*} \underbrace{f(\mathscr{F}(u,v))}_{f(g(u,v),h(u,v))} \,|J_{\mathscr{F}}(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Poznámka 16.3. a) Vzorec věty formálně odpovídá vzorci $(*)$.

b) Ve větě vystupuje předpoklad, že 2-funkce $\mathscr{F}$ je prostá a regulární na otevřené oblasti Ω. Potom, je-li M omezená množina taková, že $\overline{M} \subseteq \Omega$, tak platí, že M je měřitelná, právě když $\mathscr{F}(M)$ je měřitelná.

c) Vysvětleme si význam jakobiánu na pravé straně rovnosti. Zvolme $f(x,y) = 1$ a předpokládejme pro jednoduchost, že jakobián $J_{\mathscr{F}} \neq 0$ je konstantní. Potom podle předchozí věty je

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J_{\mathscr{F}}| \iint_{M^*} \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \text{tj.} \quad \lambda(M) = |J_{\mathscr{F}}|\lambda(M^*).$$

Jako příklad uvažujme čtverec $M^* = \langle 0,1\rangle^2$ a lineární 2-funkci $\mathscr{F}(u,v) = [au+bv, cu+dv]$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Protože $J_{\mathscr{F}}(u,v) = ad - bc$, je třeba požadovat $ad - bc \neq 0$. Dosazením do výše uvedeného vzorce tedy máme $\lambda(M) = |ad - bc|$, kde $M = \mathscr{F}(M^*)$ je rovnoběžník s vrcholy $[0,0]$, $[a,c]$, $[b,d]$ a $[a+b, c+d]$. To odpovídá známému faktu z analytické geometrie, kdy obsah rovnoběžníku určeného vektory (a,c) a (b,d) je roven absolutní hodnotě determinantu

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pokud jakobián $J_{\mathscr{F}}$ není konstantní, pak na základě integrální věty o střední hodnotě lze psát $\lambda(M) = |J_{\mathscr{F}}(u_0,v_0)|\lambda(M^*)$, kde $[u_0,v_0] \in M^*$. V jakobiánu je tedy „schován“ poměr obsahů množin M^* a M.

Příklad 16.4. Určete míru (obsah) množiny M, která je vymezena křivkami $xy = a$, $xy = b$ $(0 < a < b)$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$ $(0 < c < d)$.

Řešení. Označíme-li $xy = u$, $\frac{y^2}{x} = v$, pak M^* je vymezena nerovnostmi $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ a 2-funkce $x = u^{2/3}v^{-1/3}$, $y = u^{1/3}v^{1/3}$ je prostá uvnitř I. kvadrantu (každému bodu $[u_0,v_0]$ odpovídá jediný bod $[x_0,y_0]$, který leží na hyperbole $xy = u_0$ a parabole $y^2/x = v_0$). Platí

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3v} \neq 0 \quad \text{ve vnitřku I. kvadrantu.}$$

Protože Jacobiova matice je spojitá ve vnitřku I. oktantu, naše 2-funkce je regulární a podle věty 16.2 platí

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M^*} |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_a^b \Big(\int_c^d \frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{d}{c}.$$

Poznámka 16.5. Požadavek věty 16.2, aby bylo možné 2-funkci $\mathscr{F}$ prostě rozšířit na otevřenou nadmnožinu integračního oboru M^* při zachování regularity, je často nesplnitelný (i v případě poměrně jednoduchých transformací). Tento požadavek lze oslabit, byť za cenu komplikovanější formulace tvrzení. Zhruba řečeno, substituční vzorec zůstane v platnosti, pokud předpoklady věty 16.2 nejsou splněny na množinách míry nula, viz následující tvrzení.

■ **Věta 16.6 — o substituci ve dvojném integrálu za slabších předpokladů.** *Nechť $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $M^* \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a platí $\Omega^* \subseteq M^*$, $\lambda(M^* \setminus \Omega^*) = 0$. Dále, nechť 2-funkce $\mathscr{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daná jako $\mathscr{F}(u,v) = [g(u,v), h(u,v)]$ je spojitě diferencovatelná na M^*, přičemž je prostá a regulární v Ω^*. Označme $\Omega = \mathscr{F}(\Omega^*)$, $M = \mathscr{F}(M^*)$ a předpokládejme, že M je měřitelná s $\lambda(M \setminus \Omega) = 0$. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na M, spojitá na Ω a nechť funkce $f(g(u,v), h(u,v))|J_{\mathscr{F}}(u,v)|$ je ohraničená na Ω^*. Pak platí*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M^*} \underbrace{f(\mathscr{F}(u,v))}_{f(g(u,v),h(u,v))} \,|J_{\mathscr{F}}(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Poznámka 16.7. Důkazy vět 16.2 a 16.6 jsou dosti náročné (využívá se zde některých speciálních vlastností regulárních zobrazení).

Běžně používané transformace

1. Posunutí (translace): $x = u + a$, $y = v + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$,
$$J(u, v) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$
2. Dilatace (změna měřítka): $x = au$, $y = bv$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$,
$$J(u, v) = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab.$$
3. Transformace do polárních souřadnic: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, kde $\rho \geq 0$ a φ nabývá obvykle hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ (může být ale i delší),
$$J(\rho, \varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$
4. Transformace do zobecněných polárních souřadnic: $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $a, b \in \mathbb{R}^+$,
$$J(\rho, \varphi) = \det\begin{pmatrix} a\cos\varphi & b\rho\sin\varphi \\ a\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{pmatrix} = ab\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ab\rho.$$

Příklad 16.8. Určete hodnotu dvojného integrálu $\displaystyle\iint_M x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina vymezená nerovností $x^2 + y^2 \leq 4$.

Řešení. Množina M je uzavřený kruh se středem v počátku o poloměru 2. Tomu odpovídá množina $M^* = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, tj. uzavřený obdélník. V tomto případě nelze splnit předpoklady věty 16.2, protože 2-funkce $\mathscr{F}(\rho, \varphi) = [\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]$ není prostá na M^*. To je způsobeno tím, že všechny body ležící na levé hraniční úsečce obdélníka se zobrazí na počátek $[0, 0]$ a pro každé $c \in \langle 0, 2\rangle$ se body $[c, 0]$ a $[c, 2\pi]$ zobrazí na bod $[c, 0] \in M$. Prostá by byla, kdybychom uvažovali např. $M^* = (0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi)$, ale pak by M^* nebyla uzavřená, což je též ve větě požadováno.

Lze však použít větu 16.6. Za množinu Ω^* vezmeme vnitřek obdélníka $M^* = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Množina $M^* \setminus \Omega^*$ představuje hranici obdélníka M^* a tedy $\lambda(M^* \setminus \Omega^*) = 0$. Množina $M \setminus \Omega$ se skládá z kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a úsečky spojující body $[0, 0]$ a $[2, 0]$, což je množina míry nula. Zobrazení $\mathscr{F}$ je na Ω^* prostou a regulární 2-funkcí ($J(\rho, \varphi) = \rho \neq 0$ pro $\forall[\rho, \varphi] \in \Omega^*$). Integrovaná funkce je spojitá na M (a tedy ohraničená na M a spojitá na Ω) a funkce $\rho^3\cos^2\varphi$ je spojitá na M^* (a tedy ohraničená na Ω^*). Podle věty 16.6 tedy máme
$$\iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \rho^3\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Příklad 16.9. Určete obsah množiny vymezené Bernoulliovou lemniskátou, což je křivka určená jako množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovující rovnici $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$.

Řešení. Pomocí substituce do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ přejde rovnice na tvar $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$. Uvědomíme-li si, křivka musí být symetrická vzhledem k ose x i y (změna $x \mapsto -x$ i $y \mapsto -y$ rovnici nezmění), stačí uvažovat obrazec, jehož míru máme spočítat, např. jenom v I. kvadrantu. Výsledná míra pak bude čtyřnásobek této části. Prvnímu kvadrantu odpovídá úhel z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Protože levá strana rovnice $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ je nezáporná, musí být nezáporná také pravá strana, což v uvažovaném intervalu nastane, je-li $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Čtvrtina množiny M^* je tedy vymezena nerovnostmi $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ a platí
$$\lambda(M) = 4\iint_{M^*} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\pi/4}\Big(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\,\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\pi/4}\Big[\rho^2\Big]_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$
$$= 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2[\sin 2\varphi]_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

V případě substituce ve trojném integrálu by za analogických předpokladů vět 16.2 a 16.6 příslušný vzorec vypadal

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{M^*} f(\mathscr{F}(u,v,w))|J_{\mathscr{F}}(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Vedle translace a dilatace jsou běžně používanými transformacemi transformace do cylindrických (válcových) souřadnic a do sférických souřadnic.

1. Transformace do cylindrických souřadnic: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, kde $\rho \geq 0$ a φ nabývá obvykle hodnot z intervalu délky 2π,

$$J(\rho,\varphi,z) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

2. Transformace do sférických souřadnic: I. zp. $x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = \rho\sin\vartheta$, kde $\rho \geq 0$, φ je obvykle z intervalu délky 2π a omezení na úhel ϑ je $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$,

$$J(\rho,\varphi,\vartheta) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\cos\vartheta & -\rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} = \rho^2\cos\vartheta.$$

II. zp. $x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\vartheta$, kde $\rho \geq 0$, φ je obvykle z intervalu délky 2π a omezení na úhel ϑ je $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

$$J(\rho,\varphi,\vartheta) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & \rho\sin\vartheta \end{pmatrix} = \rho^2\sin\vartheta.$$

Příklad 16.10. Odvoďte známý vzorec pro objem kužele o poloměru podstavy r a výšce h.

Řešení. Použijeme transformace do cylindrických souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Kužel umístěme např. tak, že jeho podstava leží v rovině xy a má střed v počátku. Pak průmětem kužele do roviny xy je kruh o poloměru r, který je v polárních souřadnicích vyjádřen nerovnostmi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq r$. Samotná kuželová plocha má rovnici

$$z = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2},$$

a v cylindrických souřadnicích (toto vyjádření dostaneme po dosazení za x a y) $z = h - \frac{h}{r}\rho$. Množina M^*, přes kterou budeme integrovat, je tedy vyjádřena nerovnostmi

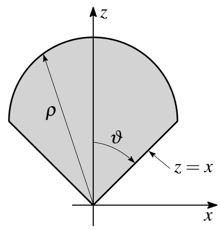
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq z \leq h - \frac{h}{r}\rho$$

a objem tělesa je dán integrálem

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \iiint_{M^*} \rho\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r\left(\int_0^{h-h\rho/r}\rho\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r [\rho z]_0^{h-h\rho/r}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int_0^r\left(h\rho - \frac{h\rho^2}{r}\right)\mathrm{d}\rho = \left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{h\rho^3}{3r}\right]_0^r = 2\pi\left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^2}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2. \end{aligned}$$

Příklad 16.11. Určete objem tělesa vymezeného nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ a kuželem $x^2 + y^2 \leq z^2$.

Řešení. Použijeme substituce do sférických souřadnic. Hraniční plochy tělesa se skládají z části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ o poloměru 1 se středem v bodě $[0,0,1]$ (rovnice psána ve středovém tvaru totiž je $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$) a částí kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$. Po dosazení výrazů $x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\vartheta$ má kulová plocha ve sférických souřadnicích vyjádření $\rho = 2\cos\vartheta$. Z geometrického náhledu (viz obrázek 16.1) vidíme, že množina M^*, přes kterou integrujeme,



Obrázek 16.1: Řez tělesem rovinou xz (z obrázku je patrno, že průvodič ρ se skutečně mění s úhlem ϑ)

je vymezena nerovnostmi $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le 2\cos\vartheta$ (platí $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$). Objem tělesa je pak dán integrálem

$$\begin{aligned}
\lambda(M) &= \iiint_{M^*} \rho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^2 \sin\vartheta \right) \mathrm{d}\rho \Big) \mathrm{d}\vartheta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \left[\rho^3 \sin\vartheta \right]_0^{2\cos\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\vartheta \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \left| \begin{array}{c} \cos\vartheta = t \\ \mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{d}t / \sin\vartheta \\ 0 \to 1, \pi/4 \to \sqrt{2}/2 \end{array} \right| = \frac{16\pi}{3} \int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^3 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{16\pi}{3} \left[\frac{t^4}{4} \right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \pi.
\end{aligned}$$

Poznámka 16.12. Transformaci do cylindrických i sférických souřadnic lze zobecnit podobně jako v případě polárních souřadnic, tj. $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $z = z$, $J(\rho, \varphi, z) = ab\rho$, resp. $x = a\rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = b\rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = c\rho\sin\vartheta$, $J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc\,\rho^2\cos\vartheta$.

Cvičení

16.1. Určete hodnotu integrálu

$$\iint_M \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le ax\} \qquad (a > 0).$$

Výsledky. **16.1.** $\frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

17 Aplikace dvojného a trojného integrálu v mechanice

Již víme, že integrál

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

představuje rovinný obsah množiny M, integrál

$$\iiint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

představuje objem tělesa M a integrál

$$\iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $f(x, y) \ge 0$, představuje objem tělesa pod plochu $f(x, y)$. Označme

$$\mathrm{d}m = \rho(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{d}m = \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde funkce $\rho(x,y)$, resp. $\rho(x,y,z)$ je hustota v bodě $[x,y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2$, resp. $[x,y,z] \in M \subseteq \mathbb{R}^3$ (veličině $\mathrm{d}m$ se říká hmotnostní element). Pak (zejména v mechanice) jsou užitečné následující integrály:

1. hmotnost desky M, resp. tělesa M
$$m(M) = \iint_M \mathrm{d}m, \qquad \text{resp.} \qquad m(M) = \iiint_M \mathrm{d}m,$$
2. statické momenty desky M vzhledem k osám x a y
$$S_x(M) = \iint_M y \,\mathrm{d}m, \qquad S_y(M) = \iint_M x \,\mathrm{d}m,$$
3. statické momenty tělesa M vzhledem k souřadným rovinám xy, xz a yz
$$S_{xy}(M) = \iiint_M z \,\mathrm{d}m, \qquad S_{xz}(M) = \iiint_M x \,\mathrm{d}m, \qquad S_{yz}(M) = \iiint_M x \,\mathrm{d}m,$$
4. momenty setrvačnosti desky M vzhledem k osám x a y, a polární moment setrvačnosti
$$I_x(M) = \iint_M y^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_y(M) = \iint_M x^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_p(M) = \iint_M (x^2+y^2) \,\mathrm{d}m,$$
5. souřadnice těžiště desky M
$$x_T = \frac{S_y(M)}{m(M)}, \qquad y_T = \frac{S_x(M)}{m(M)},$$
6. souřadnice těžiště tělesa M
$$x_T = \frac{S_{yz}(M)}{m(M)}, \qquad y_T = \frac{S_{xz}(M)}{m(M)}, \qquad z_T = \frac{S_{xy}(M)}{m(M)},$$
7. momenty setrvačnosti tělesa M vzhledem k osám x, y a z
$$I_x(M) = \iiint_M (y^2+z^2) \,\mathrm{d}m, \qquad I_y(M) = \iiint_M (x^2+z^2) \,\mathrm{d}m, \qquad I_z(M) = \iiint_M (x^2+y^2) \,\mathrm{d}m,$$
8. polární moment setrvačnosti tělesa M
$$\iiint_M (x^2+y^2+z^2) \,\mathrm{d}m,$$
9. plošné momenty setrvačnosti tělesa M vzhledem k souřadným rovinám xy, xz a yz
$$I_{xy}(M) = \iiint_M z^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_{xz}(M) = \iiint_M y^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_{yz}(M) = \iiint_M x^2 \,\mathrm{d}m,$$
10. deviační momenty tělesa M vzhledem k souřadným rovinám xy, xz a yz
$$D_{xy}(M) = \iiint_M xy \,\mathrm{d}m, \qquad D_{xz}(M) = \iiint_M xz \,\mathrm{d}m, \qquad D_{yz}(M) = \iiint_M yz \,\mathrm{d}m.$$

Momenty setrvačnosti lze uspořádat do tzv. *tenzoru setrvačnosti*
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$

Cvičení

17.1. Určete míru (objem) tělesa vymezeného průnikem tří válcových ploch o poloměru $r > 0$, které mají vzájemně kolmé osy rotace protínající se v jednom bodě (toto těleso se nazývá Steinmetzovo).

17.2. Určete souřadnice těžiště osminy koule o poloměru r ležící v I. oktantu.

17.3. Vypočítejte míru (objem) tělesa vymezeného nerovnostmi $\sqrt{x^2 + y^2} \le z$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$.

17.4. Vypočítejte statický moment vzhledem k rovině xy tělesa o jednotkové hustotě, které je vymezeno nerovnostmi $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$.

Výsledky. 17.1. $8(2 - \sqrt{2})r^3$. 17.2. $x_T = y_T = z_T = 3r/4$. 17.3. π. 17.4. $32\pi/3$.

Kapitola 4

Křivkové a plošné integrály

18 Křivky v rovině a prostoru

Definice 18.1 — rovinné křivky. Nechť $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$ je 2-funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$. *Rovinnou křivkou* nazveme množinu $\Gamma := \{\mathscr{F}(t) : t \in \langle a, b\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^2$, přičemž 2-funkce $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$ se nazývá *parametrizace křivky* Γ. Body $A := [\varphi(a), \psi(a)]$, $B := [\varphi(b), \psi(b)]$ nazýváme *koncové body křivky* Γ. Křivka Γ se nazývá *uzavřená*, je-li $A = B$.

Poznámka 18.2. a) Všimněme si, že křivkou zde nenazýváme samotnou 2-funkci $\mathscr{F}$, ale její obraz v $\mathbb{R}^2$ (takové množině se říká také *hodograf*). V tomto i dalších pojmech týkajících se křivek nepanuje v literatuře jednotnost, někdy se křivkou myslí zobrazení $\mathscr{F}$ a množině Γ se říká (vedle již zmíněného pojmu hodograf) *geometrický obraz křivky*.

b) Na křivku lze nahlížet jako na pohyb hmotného bodu v rovině (řídícího se 2-funkcí $\mathscr{F}$) v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$.

c) Definice připouští i množiny Γ, které příliš neodpovídají intuitivní představě o křivce. Např., známá Peanova křivka vyplňuje čtverec v rovině, má tedy nenulovou Jordanovu míru. Níže proto požadavky na křivku postupně zpřísníme tak, abychom se v další kapitole (kde se budeme věnovat křivkovým integrálům) nedostali nikde do problémů.

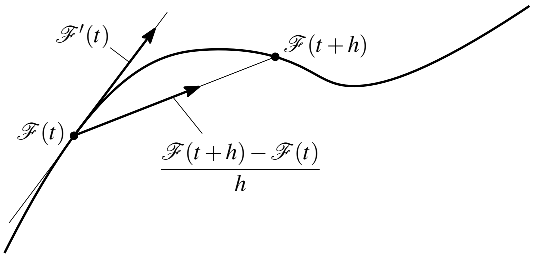
Definice 18.3 — křivek se speciálními vlastnostmi.

1. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá*, je-li $\mathscr{F}$ prostá na $\langle a, b\rangle$. Geometricky to znamená, že křivka se nikde neprotíná (postačující podmínkou pro to, aby $\mathscr{F}$ byla prostá, je ryzí monotonie alespoň jedné z funkcí φ, ψ na $\langle a, b\rangle$).
2. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá uzavřená* (neboli *jordanovská*), je-li uzavřená a $\mathscr{F}$ je prostá na (a, b).
3. Křivka Γ se nazývá *třídy* C^1, jestliže její parametrizace $\mathscr{F}$ má spojitou Jacobiovu matici na $\langle a, b\rangle$ (tj. funkce φ a ψ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$).
4. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá hladká*, je-li jednoduchá, je třídy C^1 a navíc $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$ (jinak řečeno, hodnoty $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nejsou v žádném bodě intervalu současně nulové).
5. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá uzavřená hladká*, je-li jednoduchá uzavřená, je třídy C^1, platí $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$, a navíc $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(b)$, $\psi'_+(a) = \psi'_-(b)$.
6. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá po částech hladká*, je-li spojením konečně mnoha jednoduchých hladkých křivek, přičemž toto spojení je pouze skrz koncové body. Přesněji, existuje parametrizace $\mathscr{F}$, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, a existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že na každém dílčím intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$ představuje $\mathscr{F}$ jednoduchou hladkou křivku. Zde již nebudeme rozlišovat, zda výsledná křivka je nebo není uzavřená.

Poznámka 18.4. a) Každá jednoduchá (a jednoduchá uzavřená křivka) má nekonečně mnoho parametrizací, např. jednotková kružnice se středem v počátku má parametrizaci $[\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, nebo $[\cos 2t, \sin 2t]$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, nebo $[\sin t, \cos t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

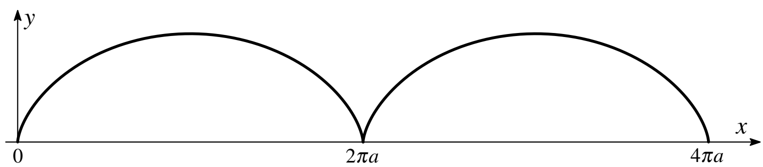
b) Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak její graf je křivka s parametrizací $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$.

c) Je-li Γ křivka třídy C^1 a pro nějaké $t_0 \in \langle a, b\rangle$ je $\mathscr{F}'(t_0) = [0, 0]$, pak bod $P = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ nazveme singulárním bodem křivky, v opačném případě jej nazveme regulárním bodem. Máme-li dvě různé parametrizace téže křivky, může se stát, že některý bod je regulární v jedné parametrizaci a singulární v druhé. Např úsečka spojující body $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ má při parametrizaci $[t, t]$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ všechny body regulární, ale při parametrizaci $[t^3, t^3]$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ je počátek singulárním bodem. Jednoduchá (resp. jednoduchá uzavřená) hladká křivka má tedy všechny body regulární. Není težké si rozmyslet, že $\mathscr{F}'(t)$ představuje tečný vektor ke křivce Γ v bodě $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$ (viz obrázek 18.1). Tento tečný



Obrázek 18.1: Jacobiova matice $\mathscr{F}'(t)$ je v případě 2-funkce $\mathscr{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vektorem v rovině, který představuje tečný vektor ke křivce v bodě $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$

vektor lze také interpretovat jako vektor okamžité rychlosti, kterou má hmotný bod při pohybu po křivce v čase t. Když je tento vektor v každém čase $t \in \langle a, b\rangle$ nenulový a mění se spojitě, nemůže hmotný bod najednou prudce změnit směr, nemůže zastavit a pak se vydat opačným směrem, atp. Jeho pohyb je skutečně „hladký“. Příkladem křivky, kdy hmotný bod zastaví (v singulárním bodě) a vydá se jiným směrem, je např. část cykloidy o parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$ $(a > 0)$, viz obrázek 18.2. Na tomto příkladu vidíme, že samotná spojitost Jacobiovy matice parametrizace $\mathscr{F}$ hladkost, jak ji i intuitivně chápeme, nezaručí.



Obrázek 18.2: Dva oblouky cykloidy při parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $0 \le t \le 4\pi$ ($a > 0$ je parametr). Tato křivka má tři singulární body (počátek a body $[2\pi a, 0]$, $[4\pi a, 0]$)

Pro případ křivkového integrálu II. druhu je navíc potřeba zavést pojem orientace křivky. Orientovat křivku znamená určit směr, ve kterém jsou body křivky procházeny (to lze dvěma způsoby).

Definice 18.5 — souhlasné a nesouhlasné orientace jednoduché (uzavřené) křivky.
1. Buď $\Gamma = \{[\varphi(t), \psi(t)] : t \in \langle a, b\rangle\}$ jednoduchá křivka a zvolme na ní dva různé body $P_1 = [\varphi(t_1), \psi(t_1)]$ a $P_2 = [\varphi(t_2), \psi(t_2)]$. Orientujme křivku tak, že se pohybujeme od bodu P_1 směrem k bodu P_2 (říkáme také, že bod P_1 je před bodem P_2, zapisujeme $P_1 \prec P_2$). Je-li $t_1 < t_2$, řekneme, že *křivka Γ je orientována souhlasně s parametrizací* $[\varphi, \psi]$. Je-li naopak $t_1 > t_2$, řekneme, že *křivka Γ je orientována nesouhlasně s parametrizací* $[\varphi, \psi]$.
2. V případě jednoduché uzavřené křivky Γ ji orientujme pomocí tří bodů P_1, P_2 a P_3 tak, že se po křivce pohybujeme z bodu P_1 do P_2 a z P_2 do P_3 (bodu P_i odpovídá parametr t_i, $i = 1, 2, 3$). Je-li $t_1 < t_2 < t_3$ nebo $t_3 < t_1 < t_2$ nebo $t_2 < t_3 < t_1$, pak řekneme, že *křivka Γ je orientována souhlasně s parametrizací $[\varphi, \psi]$* a je-li $t_1 > t_2 > t_3$ nebo $t_2 > t_3 > t_1$ nebo $t_3 > t_1 > t_2$, pak řekneme, že

křivka Γ je orientována nesouhlasně s parametrizací $[\varphi, \psi]$.

Příklad 18.6. Jednotková kružnice se středem v počátku orientovaná proti oběhu hodinových ručiček je orientována souhlasně vzhledem k parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [\cos t, \sin t]$, ale nesouhlasně vzhledem k parametrizaci $\mathscr{G}(t) = [\sin t, \cos t]$.

Prostorovou křivku bychom definovali jako množinu

$$\Gamma = \{[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] : t \in \langle a, b\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

kde 3-funkce $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi]$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Ostatní pojmy jako jednoduchá nebo hladká křivka by se zavedly analogicky. Pozor, křivku v prostoru nelze zadat explicitně pomocí funkce!

Cvičení

18.1. Ověřte, že existují parametrizace, vzhledem ke kterým je úsečka (spojující libovolné dva body v rovině) jednoduchá hladká křivka, a elipsa je jednoduchá uzavřená hladká křivka.

18.2. Napište rovnice tečny ke křivce Γ o parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [t\cos t, t\sin t, t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, v bodě $T = [0, 0, 0]$.

Výsledky. **18.2.** $x = t$, $y = 0$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

19 Křivkový integrál

Definice 19.1 — křivkového integrálu I. druhu ze spojité funkce. Nechť Γ je jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) hladká křivka s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na nějaké otevřené množině obsahující křivku Γ. Potom definujeme křivkový integrál I. druhu jako

$$\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

Ukažme, co nás vedlo ke vzorci v předchozí definici. Jako motivaci uvažujme úlohu určit obsah plochy

$$\tau = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Gamma,\ 0 \le z \le f(x, y)\}.$$

Proveďme nějaké dělení intervalu $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Tímto dělením je určeno také dělení $A = P_0 \prec P_1 \prec P_2 \prec \cdots \prec P_n = B$ křivky Γ ($P_k = [\varphi(t_k), \psi(t_k)]$, $k = 0, 1, \ldots, n$). Potom je přirozené aproximovat hledaný obsah číslem

$$S_n := \sum_{k=1}^n f(\varphi(t_k), \psi(t_k))\sqrt{([\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}.$$

Potřebujeme ukázat, že S_n konverguje k hodnotě na pravé straně $(*)$ pro každou nulovou posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ (připomeňme, že se jedná o posloupnost dělení, ve které norma dělení $\max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} |t_k - t_{k-1}|$ jde s rostoucím n k nule). Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz věta 16.2 v SA1) existují čísla ξ_k, $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$ taková, že $\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ a $\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$. Hodnotu S_n tedy můžeme přepsat

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\varphi(t_k), \psi(t_k))\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\eta_k)]^2}\,(t_k - t_{k-1}).$$

Kdyby pod odmocninou byly hodnoty derivací v bodě t_k (namísto ξ_k a η_k), pak by S_n představoval přímo integrální součet (s výběrem reprezentantů $\Xi = \{t_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$) a v limitě bychom ihned dostali požadovaný integrál (protože f je spojitá nad křivkou Γ a výraz $\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$ je také spojitá funkce díky předpokladu hladkosti Γ). Jako poslední krok je tedy potřeba ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \sqrt{[\varphi'(t_k)]^2 + [\psi'(t_k)]^2}\,(t_k - t_{k-1}).$$

Důkaz tohoto kroku využívá Heineho–Cantorovy věty (viz věta 13.14 v SA1), která říká, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu je již stejnoměrně spojitá.

Poznámka 19.2. a) Předpoklad hladkosti křivky lze v definici křivkového integrálu oslabit, zejména lze připustit jednoduché C^1 křivky, které mají konečný počet singulárních bodů, případně lze porušit „jednoduchost" křivky ve smyslu, že dovolíme konečný počet protnutí.

b) Je-li křivka třídy C^1, pak je tzv. *rektifikovatelná*. To znamená, že délka lomené čáry při zjemňování dělení neroste nade všechny meze, a tedy křivka má konečnou délku (délka křivky je právě takto definována, tj. jako supremum délek lomených čar přes všechna možná dělení). Příkladem nerektifikovatelné křivky je křivka o parametrizaci $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$, kde

$$\varphi(t) = t, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = 0 \\ t \sin\frac{1}{t} & \text{pro } t > 0. \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 1\rangle, \quad \psi' \text{ není spojitá v bodě } 0.$$

Pro délku rektifikovatelné křivky platí

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Veličině $\mathrm{d}s = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$ se říká *diferenciál oblouku*, přičemž výraz $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ představuje velikost tečného vektoru ke křivce (vektoru rychlosti hmotného bodu) v bodě $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$.

c) Lze ukázat, že za předpokladů kladených na křivku a integrovanou funkci hodnota integrálu nezávisí na zvolené parametrizaci dané křivky.

d) Křivkový integrál je možné definovat obecněji než v definici 19.1, kdy vycházíme z ohraničené funkce na oblasti obsahující křivku a zavedeme podobně jako u standardního Riemannova integrálu horní a dolní součty funkce nad křivkou, případně integrální součty.

e) Křivkový integrál přes jednoduchou po částech hladkou křivku bychom definovali jako součet integrálů přes jednotlivé části.

f) V případě uzavřené křivky se někdy znak integrálu píše jako $\oint$.

Příklad 19.3. Určete hodnotu integrálu

$$\int_\Gamma (x + y)\,\mathrm{d}s,$$

kde Γ je obvod trojúhelníka ABC, $A = [0, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [1, 0]$.

Řešení. Jedná se o po částech hladkou křivku, pokud budeme strany trojúhelníka parametrizovat např. takto: stranu $\overline{AB}$ je nejjednodušší parametrizovat 2-funkcí $\mathscr{F}_1(t) = [0, t]$, $t \in \langle 0, 2\rangle$, stranu $\overline{BC}$ 2-funkcí $\mathscr{F}_2(t) = [t, 2 - 2t]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a stranu $\overline{AC}$ 2-funkcí $\mathscr{F}_3(t) = [t, 0]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Protože $\mathscr{F}_1'(t) = [0, 1]$, $\mathscr{F}_2'(t) = [1, -2]$ a $\mathscr{F}_3'(t) = [1, 0]$, jednotlivé křivkové integrály jsou dány

$$\int_{\overline{AB}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^2 (0 + t)\sqrt{0^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2,$$

$$\int_{\overline{BC}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t + 2 - 2t)\sqrt{1^2 + (-2)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\int_{\overline{AC}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t + 0)\sqrt{1^2 + 0^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Celkově tedy

$$\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{\overline{AB}} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{\overline{BC}} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{\overline{AC}} (x+y)\,\mathrm{d}s = 2 + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\big(5+3\sqrt{5}\big).$$

Příklad 19.4. Určete hodnotu integrálu

$$\int_\Gamma \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}s,$$

kde Γ je část Archimédovy spirály $\rho = \varphi$ ležící v kruhu se středem v počátku o poloměru $\pi/2$.

Řešení. Archimédova spirála začíná v počátku (pro $\varphi = 0$) a s rostoucím úhlem roste (lineárně) vzdálenost ρ bodu křivky od počátku. Bodu na kružnici o poloměru $\pi/2$ tedy dosáhne, je-li $\rho = \varphi = \frac{\pi}{2}$. Odvoďme nejprve, jak vypadá diferenciál oblouku ds, je-li křivka vyjádřena v polárních souřadnicích. Vzhledem k transformačním rovnicím mezi kartézskými a polárními souřadnicemi $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$ a $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = (\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi^2 + (\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi^2\\
&= \big((\rho'(\varphi))^2\cos^2\varphi - 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi\\
&\quad + (\rho'(\varphi))^2\sin^2\varphi + 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2(\varphi)\cos^2\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi^2 = \big((\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi^2.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nyní již stačí dosadit do zadaného integrálu (nyní máme $\rho'(\varphi) = 1$), což vede na

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}\frac{\varphi\sin\varphi}{\varphi\cos\varphi}\sqrt{1^2+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \left|\begin{array}{l} 1+\varphi^2 = t^2,\ \mathrm{d}\varphi = t\,\mathrm{d}t/\varphi\\ 0\to 1, \pi/2 \to \sqrt{1+\pi^2/4}\end{array}\right|\\
&= \int_1^{\sqrt{1+\pi^2/4}} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\Big[t^3\Big]_1^{\sqrt{1+\pi^2/4}} = \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Poznámka 19.5. V případě prostorové křivky Γ by se za analogických předpokladů vzorec definice 19.1 modifikoval na

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 19.6. Určete hodnotu integrálu

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s, \quad \text{kde} \quad \Gamma = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ x = y,\ x\le 0, z\ge 0\}.$$

Řešení. Prostorová křivka Γ je průnikem kulové plochy (sféry) $x^2+y^2+z^2 = 4$ s rovinou $y = x$ (procházející osou z), což je kružnice o poloměru 2. Omezení $x\le 0$, $z\ge 0$ pak dává čtvrtkružnici (ležící ve III. oktantu). Tuto křivku lze snadno parametrizovat pomocí úhlů φ, ϑ, které vystupují v substituci do sférických souřadnic:

$$x = 2\cos\frac{5\pi}{4}\cos\vartheta = -\sqrt{2}\cos\vartheta, \quad y = 2\sin\frac{5\pi}{4}\cos\vartheta = -\sqrt{2}\cos\vartheta, \quad z = 2\sin\vartheta, \quad 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}.$$

Pro diferenciál oblouku ještě potřebujeme derivace parametrických rovnic:

$$x' = \sqrt{2}\sin\vartheta, \qquad y' = \sqrt{2}\sin\vartheta, \qquad z' = 2\cos\vartheta.$$

Podle výše uvedeného vzorce pak platí

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2\vartheta + 4\sin^2\vartheta}\sqrt{2\sin^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta = 4[\vartheta]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu přes rovinnou křivku budeme hodnoty 2-funkce dvou proměnných interpretovat jako vektory, budeme tedy hovořit o vektorovém poli a značit ho $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

Definice 19.7 — křivkového integrálu II. druhu ze spojitého vektorového pole. Nechť Γ je orientovaná jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) hladká křivka s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$ a $\vec{f}$ je vektorové pole spojité na nějaké otevřené množině obsahující křivku Γ. Pak definujeme křivkový integrál II. druhu

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \vec{f}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_\Gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \\ &:= \pm \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{$**$}$$

kde znaménko „+“ bereme v případě souhlasné orientace křivky s parametrizací $\mathscr{F}$ a znaménko „–“ v případě nesouhlasné.

Motivace pro vzorec $(**)$ je následující. Buď $\overline{AB}$ orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Uvažujeme-li konstantní silové pole $\vec{f}$, pak z fyziky je známo, že práce, kterou vykoná silové pole $\vec{f}$ po úsečce $\overline{AB}$, je dána skalárním součinem $\vec{f} \cdot (B - A)$. Je-li tento skalární součin kladný, jedná se o vykonanou práci, je-li záporný, jedná se o spotřebovanou práci. Opačná orientace úsečky by znamenala práci s opačným znaménkem.

Jaká bude práce, kterou vykoná/spotřebuje silové pole $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$ po orientované křivce Γ? Uvažujme opět nějaké dělení $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$ (to opět určí dělení $A = P_0 \prec P_1 \prec \cdots \prec P_n = B$ křivky Γ). Nahradíme-li orientované křivky $\Gamma_k := \{[\varphi(t), \psi(t)] : t \in \langle t_{k-1}, t_k\rangle\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ orientovanými úsečkami $\overline{P_{k-1}P_k}$ a na každé z nich silové pole $\vec{f}$ konstantním silovým polem s hodnotou $\vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1}))$, pak získáme aproximaci vykonané práce

$$\begin{aligned} W_n &:= \sum_{k=1}^n \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (P_k - P_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}), \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})). \end{aligned}$$

Přepíšeme-li rozdíly $\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$ a $\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$ pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě, dostaneme

$$W_n := \sum_{k=1}^n \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (\varphi'(\xi_k), \psi'(\eta_k))(t_k - t_{k-1}).$$

Pomocí Heineho–Cantorovy věty lze opět ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (\varphi'(t_{k-1}), \psi'(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}).$$

Suma za znakem limity na pravé straně předchozího vztahu představuje integrální součet spojité funkce, takže v limitě (pro $n \to \infty$) W_n dává pravou stranu vzorce $(**)$ pro libovolnou nulovou posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Příklad 19.8. Určete $\displaystyle\int_\Gamma (xy, 0) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je část paraboly $x = y^2$ jdoucí z bodu $[1, 1]$ do počátku $[0, 0]$.

Řešení. Vzhledem k parametrizaci $x = t^2,\ y = t,\ 0 \le t \le 1$ je křivka Γ orientována nesouhlasně. Dosazením do vzorce $(**)$ pak máme

$$\int_\Gamma (xy, 0) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_0^1 (t^3, 0) \cdot (2t, 1)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 2t^4 \mathrm{d}t = -\left[\frac{2t^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{2}{5}.$$

Poznámka 19.9. Vztah mezi křivkovým integrálem I. a II. druhu je následující. Je-li Γ jednoduchá (resp. jednoduchá uzavřená) hladká křivka s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$, tak tečný vektor $\mathscr{F}'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ je nenulový v každém $\forall t \in \langle a, b\rangle$. Potom vektor $\mathscr{F}_1'(t) = \mathscr{F}'(t)/|\mathscr{F}'(t)|$ je jednotkový ($|\cdot|$ je eukleidovská velikost vektoru). Uvažujeme-li spojité vektorové pole $\vec{f}$ v nějaké oblasti obsahující křivku Γ, pak platí

$$\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \pm \int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathscr{F}_1' \,\mathrm{d}s$$

(„+“ v případě souhlasné orientace křivky Γ s parametrizací $\mathscr{F}$ a „−“ v případě nesouhlasné).

Následující tvrzení dává do souvislosti dvojný integrál přes množinu M s křivkovým integrálem II. druhu přes hranici množiny M. Řekneme, že *hranice ∂M množiny M je orientována kladně*, jestliže množina při pohybu po ∂M zůstává po levé ruce.

■ **Věta 19.10 — Greenova[1] přes normální množinu vzhledem k ose x.** *Nechť M je normální množina vzhledem k ose x (tj. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ a její hranice ∂M je kladně orientovaná křivka, přičemž předpokládáme, že funkce φ, ψ mají spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$. Nechť dále vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je spojité na M a má zde spojité parciální derivace P_y' a Q_x'. Pak platí*

$$\iint_M (Q_x' - P_y')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial M} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Důkaz. Protože M je normální vzhledem k ose x, její hranici ∂M lze složit ze čtyř částí $\Gamma_\ell : x = a, y \in \langle\varphi(a), \psi(a)\rangle$, $\Gamma_d : y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$, $\Gamma_p : x = b, y \in \langle\varphi(b), \psi(b)\rangle$ a $\Gamma_h : y = \psi(x), x \in \langle a, b\rangle$. Části hranice Γ_ℓ a Γ_p jsou zřejmě (vzhledem ke vhodné parametrizaci) jednoduché hladké křivky a díky předpokladu spojitosti derivací funkcí φ, ψ jsou i části hranice Γ_d a Γ_h jednoduché hladké křivky (např. vzhledem k parametrizaci $[t, \varphi(t)]$, resp. $[t, \psi(t)]$). Platnost tvrzení bude prokázána, pokud ukážeme, že

$$-\iint_M P_y'(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} P(x, y)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \iint_M Q_x'(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Platí

$$\int_{\partial M} P(x, y)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\Gamma_\ell} P(x, y)\,\mathrm{d}x}_{=0,\text{ protože } \varphi'(t)=0} + \int_{\Gamma_d} P(x, y)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\Gamma_p} P(x, y)\,\mathrm{d}x}_{=0,\text{ protože } \varphi'(t)=0} + \int_{\Gamma_h} P(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

tj.

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} P(x, y)\,\mathrm{d}x &= \int_{\Gamma_d} P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_h} P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x, \varphi(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x, \psi(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Na druhou stranu, podle Fubiniovy věty

$$-\iint_M P_y'(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P_y'(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = -\int_a^b [P(x, y)]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\mathrm{d}x$$

[1] George Green 1793–1841, Angličan

$$= \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))] \mathrm{d}x,$$

tj. platí $-\iint_M P(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} P(x,y)\mathrm{d}x$.

Důkaz druhé rovnosti $\iint_M Q(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} Q(x,y)\,\mathrm{d}x$ je trochu obtížnější, opírá se o následující vlastnost integrálu závislého na parametru:

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na nějaké otevřené množině Ω obsahující normální množinu $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$. Potom integrál $F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$. Má-li navíc f spojitou parciální derivaci f'_x na Ω a φ', ψ' jsou spojité na $\langle a,b\rangle$, pak F má derivaci na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x). \qquad (\triangle)$$

Rovnost $(\triangle)$ využijeme při výpočtu $\iint_M Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Fubiniova věta dává

$$\iint_M Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Položíme-li $f = Q$ v rovnosti $(\triangle)$, pak

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}y = F'(x) - Q(x,\psi(x))\psi'(x) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

a tedy

$$\iint_M Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = [F(x)]_a^b - \int_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zároveň však platí

$$\int_{\partial M} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_p} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_\ell} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_h} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_d} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. $\displaystyle\iint_M Q(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} Q(x,y)\,\mathrm{d}x.$ □

Poznámka 19.11. a) Analogicky by se tvrzení dokázalo pro normální množinu vzhledem k ose y.

b) Tvrzení zůstane v platnosti, i když části hranice Γ_d a Γ_h budou po částech hladké křivky.

c) Tvrzení dále bude platit i v případě, kdy M je regulární množina (připomeňme, že to je množina, kterou lze „rozřezat“ na konečný počet normálních množin).

d) Platnost tvrzení lze rozšířit i na případ ještě komplikovanějších množin než jsou regulární množiny (např. typu „řez ementálem s nepříliš pěknými oky“). Zejména lze (za určitých dalších předpokladů) připustit hranice, které obsahují konečný počet singulárních bodů.

e) Obsah (míru) ohraničené množiny M lze pomocí Greenovy věty počítat jako

$$\lambda(M) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 19.12. Určete obsah eliptické výseče mezi body $A = [\varphi(t_1), \psi(t_1)]$ a $B = [\varphi(t_1), \psi(t_2)]$, kde $[\varphi(t), \psi(t)] = [a\cos t, b\sin t]$, $\ a,b > 0,\ \ 0 \le t_1 < t_2 \le \pi/2$.

Řešení. Budeme integrovat přes hranici eliptické úseče, která se skládá ze tří hladkých částí: úsečky $\overline{OA}$, oblouku elipsy $\widehat{AB}$ a úsečky $\overline{BO}$ (O značí počátek). Aby platil vzorec nad příkladem, je potřeba hranici úseče orientovat kladně, tj. ve směru $O \to A \to B \to O$. Úsečku OA parametrizujme např. rovnicemi $x = at\cos t_1$, $y = bt\sin t_1$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, vůči této parametrizaci je orientace úsečky souhlasná. Příslušný křivkový integrál je potom vyjádřen

$$\int_{\overline{OA}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 (-bt\sin t_1, at\cos t_1) \cdot (a\cos t_1, b\sin t_1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Oblouk $\widehat{AB}$ je vůči parametrizaci $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ (viz zadání) orientován souhlasně, platí tedy

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_{t_1}^{t_2} (-b\sin t, a\cos t) \cdot (-a\sin t, b\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= ab\int_{t_1}^{t_2} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = ab\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = ab(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Integrál přes úsečku $\overline{BO}$ bude, podobně jako integrál přes úsečku $\overline{OA}$, nulový. Celkově tedy

$$\begin{aligned}\lambda(\text{úseče}) &= \frac{1}{2}\int_{\overline{OA}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \frac{1}{2}\int_{\overline{BO}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\ &= 0 + \frac{1}{2}ab(t_2 - t_1) + 0 = \frac{1}{2}ab(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Poznamenejme, že pro $t_1 = 0$ a $t_2 = 2\pi$ dostáváme celou elipsu, vzorec tedy souhlasí se známým vzorcem pro obsah množiny ohraničené elipsou $S = \pi ab$ (ten se redukuje na vzorec pro obsah kruhu, je-li $a = b$).

Poznámka 19.13. To, že v předchozím příkladu byly integrály přes obě úsečky vycházející z počátku nulové, není náhoda. Plyne to z faktu, že práci přes úsečku spojující počátek s nějakým bodem roviny koná silové pole $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$. V každém bodě $[x, y]$ úsečky je tento vektor kolmý k úsečce, což znamená, že žádnou práci nevykoná. Obecně tedy, při výpočtu obsahu pomocí Greenovy věty, integrály přes úsečky vycházející z počátku není potřeba počítat.

Cvičení

19.1. Určete hodnotu křivkového intgerálu

$$\int_{\Gamma} \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}s, \quad \Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = x^2,\ 0 \le x \le 3/2\}.$$

19.2. Napište vzorce pro statický moment S_{xy} (vzhledem k rovině xy), prostorové křivky Γ o jednotkové délkové hustotě, která vznikne průnikem válcové plochy $x^2 + y^2 = 4$ a parabolického válce $z = x^2$.

19.3. Určete hodnotu křivkového integrálu

$$\int_{\Gamma} (y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

kde Γ je čtvrtina elipsy $x^2/4 + y^2/9 = 1$, ležící v I. kvadrantu orientovaná proti smyslu oběhu hodinových ručiček.

19.4. Uvažujte v $\mathbb{R}^3$ silové pole $\vec{f} = -x\vec{i} - y\vec{j}/2 - 2z\vec{k}$. V tomto poli se bod o jednotkové hmotnosti vzdálený 2 m od osy z kolem ní otáčí konstantní úhlovou rychlostí $\pi/2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a současně se pohybuje konstantní rychlostí 3/2 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ v kladném směru osy z (pohyb je tedy realizován po šroubovici). Vypočtěte práci, kterou vykoná silové pole za dobu $t = 4\,\mathrm{s}$, je-li na počátku bod v poloze $[2, 0, 0]$.

19.5. Pomocí Greenovy věty odvoďte, že pro dostatečně rozumné množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ platí následující vzorec pro výpočet obsahu (míry) této množiny:

$$\lambda(M) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

kde ∂M je kladně orientovaná hranice množiny M.

19.6. Pomocí předchozího vzorce odvoďte vzorec pro obsah kruhu o poloměru r.

Výsledky. 19.1. 6. 19.2. $S_{xy} = 8\int_0^{2\pi} (\cos^2 t)\sqrt{1 + 4\sin^2 2t}\,\mathrm{d}t$. 19.3. 0. 19.4. -36 (práce se tedy spotřebovala). 19.6. πr^2.

20 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

Definice 20.1 — nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě. Nechť Ω je oblast (tj. souvislá a otevřená množina) v $\mathbb{R}^2$, $\vec{f} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je spojité vektorové pole na Ω, $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$ jsou body v Ω a Γ je jednoduchá po částech hladká křivka ležící v Ω jdoucí z bodu A do bodu B. Pokud hodnota integrálu $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ zůstává stejná pro každou křivku Γ, říkáme, že *integrál nezávisí na integrační cestě mezi body A, B* a píšeme

$$\int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Jestliže uvedený integrál nezávisí na integrační cestě mezi libovolnými body A, B (zvolenými kdekoliv v oblasti Ω), říkáme, že *integrál nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω*.

■ **Věta 20.2.** *Nechť $\int_\Gamma (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω. Potom výraz*

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

(Pfaffova[2] forma) je totálním diferenciálem kmenové funkce (potenciálu)

$$\Phi(x, y) = \int_{[x_A, y_A]}^{[x,y]} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

(zápis chápeme tak, že integrujeme po libovolné křivce ležící v oblasti Ω spojující libovolný, ale pevně zvolený bod $A = [x_A, y_A]$ s „proměnlivým" bodem $B = [x, y]$).

Důkaz. Nechť integrál z $\vec{f} = (P, Q)$ nezávisí v Ω na integrační cestě. Potřebujeme ukázat, že funkce Φ vystupující ve větě je v Ω diferencovatelná a platí $\mathrm{d}\Phi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ (tj. $\Phi'_x = P$, $\Phi'_y = Q$). Buď $B = [x, y] \in \Omega$ nějaký bod. Protože Ω je otevřená množina, existuje okolí bodu B takové, že je celé obsaženo v Ω. Vezměme v tomto okolí libovolný bod $B_1 = [x_1, y]$, $x_1 < x$ (druhou souřadnici má tedy bod B_1 stejnou jako bod B). Protože hodnota integrálu $\int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ je pro každou po částech hladkou křivku stejná, můžeme jednu konkrétní vybrat. Uvažujme křivku, která se skládá z libovolné jednoduché hladké křivky Γ_1 jdoucí z bodu A do bodu B_1 a úsečky Γ_2 jdoucí z bodu B_1 do bodu B o parametrizaci $[t, y]$, $x_1 \le t \le x$ (vzhledem k této parametrizaci je úsečka Γ_2 souhlasně orientovanou jednoduchou hladkou křivkou). Máme tedy

$$\Phi(x, y) = \int_{\Gamma_1} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\Gamma_2} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Hodnota prvního integrálu je nějaké reálné číslo, a tudíž parciální derivace tohoto člene podle x je nulová. Máme tedy

$$\Phi'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\Gamma_2} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t = P(x, y),$$

[2] Johann Friedrich Pfaff 1765–1825, Němec

kde v poslední rovnosti jsme využili větu 23.3 z SA1 (resp. jejího důsledku 23.4), která říká, že integrál jako funkce horní meze ze spojité funkce má derivaci rovnu původní funkci. Analogicky bychom ukázali platnost $Q'_y = Q$ (za křivku Γ_2 bychom nyní uvažovali úsečku vedoucí do bodu B rovnoběžnou s osou y). Protože funkce P, Q jsou v Ω spojité (to je v předpokladu definice nezávislosti integrálu na integrační cestě), je Φ na Ω (spojitě) diferencovatelná. Celkově tedy $\mathrm{d}\Phi = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. □

Poznámka 20.3. a) Vektorové pole $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojité na nějaké oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *potenciálové v Ω*, jestliže existuje funkce $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že $\vec{f} = \operatorname{grad} \Phi$ v každém bodě oblasti Ω. Protože pro totální diferenciál diferencovatelné funkce F platí

$$\mathrm{d}F = F'_{x_1}\mathrm{d}x_1 + F'_{x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + F'_{x_n}\mathrm{d}x_n = \operatorname{grad} F \cdot (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \ldots, \mathrm{d}x_n),$$

lze předchozí větu formulovat takto: Pokud křivkový integrál II. druhu vektorového pole $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω, pak je toto pole potenciálové v Ω.

b) Potenciál se v literatuře někdy uvažuje s opačným znaménkem, tj. je li Φ kmenová funkce, pak funkce $\Psi = -\Phi$ se nazývá potenciál.

■ **Věta 20.4.** *Nechť P, Q jsou spojité funkce v rovinné oblasti Ω a nechť Pfaffova forma $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ je v Ω totálním diferenciálem nějaké funkce Φ (tj. pole $\vec{f} = (P, Q)$ je zde potenciálové). Potom integrál $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě v Ω a platí*

$$\int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_A^B P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Důkaz. Nechť je splněn předpoklad věty, tj. vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je potenciálové v Ω. Existuje tedy funkce $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že $(P, Q) = \operatorname{grad} \Phi$ v Ω. Nechť dále $\Gamma \subseteq \Omega$ je libovolná jednoduchá hladká křivka spojující body $A, B \in \Omega$, která je orientovaná souhlasně se svou parametrizací $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in \langle a, b\rangle$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_\Gamma (P(x,y), Q(x,y)) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma \operatorname{grad} \Phi(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_a^b \big(\Phi'_x\big(\varphi(t), \psi(t)\big), \Phi'_y\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\big) \cdot \big(\varphi'(t), \psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \big(\Phi'_x\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + \Phi'_y\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(\Phi\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\Big)'\,\mathrm{d}t \\
&= \big[\Phi\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\big]_a^b = \Phi\big(\varphi(b), \psi(b)\big) - \Phi\big(\varphi(a), \psi(a)\big) = \Phi(B) - \Phi(A),
\end{aligned}$$

kde první rovnost v posledním řádku plyne z pravidla pro derivaci složené funkce a druhá plyne z Newtonovy–Leibnizovy formule. Protože křivka mezi body A a B byla libovolná, integrál nezávisí na integrační cestě (přesněji, důkaz jsme provedli pouze pro jednoduchou hladkou křivku, pro po částech hladkou křivku by se důkaz modifikoval snadno, viz první poznámka e) v kapitole 19). □

Poznámka 20.5. a) Předchozí dvě věty tedy říkají, že pro nezávislost integrálu na integrační cestě v oblasti Ω je nutné a stačí, aby existovala funkce $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, pro kterou platí, že $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ je v Ω jejím totálním diferenciálem.

b) Na větu lze nahlížet jako na zobecnění tvrzení o Newtonově–Leibnizově formuli. To ve své základní verzi říká, že pro spojitou funkci f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, která zde má primitivní funkci F (tu lze chápat jako jednorozměrný potenciál), platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

c) Věta umožňuje snazší výpočet práce potenciálového (konzervativního) silového pole, kdy je tato práce dána rozdílem potenciálních energií v koncovém a počátečním bodě křivky. V případě uzavřené křivky je

$$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(A) - \Phi(A) = 0,$$

a tedy potenciálové silové pole žádnou práci nevykoná. Podmínka

$$\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

přes libovolnou uzavřenou po částech hladkou křivku Γ je zároveň postačující podmínkou pro nezávislost na integrační cestě (potenciálovost pole $\vec{f}$). To plyne z jednoduché úvahy. Označme A společný počáteční a koncový uvažované křivky Γ a zvolme na křivce bod B. Tento bod rozdělí křivku na dvě části. Označme Γ_1 část jdoucí z bodu A do bodu B a Γ_2 část jdoucí z bodu B do bodu A. Pak platí

$$0 = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Pokud symbolem Γ_2^* nyní označíme opačně orientovanou křivku Γ_2 (ta nyní jde z bodu A do bodu B), tak vidíme, že

$$\int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\Gamma_2^*} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

a protože Γ byla libovolná uzavřená po částech hladká křivka, plyne z poslední rovnosti nezávislost integrálu na integrační cestě (což je ekvivalentní s potenciálovostí integrovaného vektorového pole).

Z praktického hlediska je podstatná následující věta, která dává postačující podmínku pro nezávislost na integrační cestě. Oblast Ω se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže každou uzavřenou křivku ležící v Ω lze „stáhnout“ v bod, aniž bychom oblast opustili. Jednoduše souvislá oblast tedy nemá žádné „díry“.

■ Věta 20.6 — postačující podmínka pro nezávislost integrálu na integrační cestě. *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{R}^2$, P, Q jsou spojité spolu s parciálními derivacemi P'_y, Q'_x na Ω a platí*

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y) \quad \forall [x, y] \in \Omega.$$

Potom $\displaystyle\int_{\Gamma} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$ *nezávisí na integrační cestě v Ω.*

Důkaz. Z poznámky c) pod větou 20.4 již víme, že nezávislost integrálu na integrační cestě je ekvivalentní tomu, že integrál po libovolné po částech hladké uzavřené křivce ležící v oblasti Ω je nulový. Dále, v duchu poznámky pod větou 19.10 lze dokázat, že Greenova věta platí, pokud budeme uvažovat kompaktní množinu v rovině, jejíž hranice je po částech hladká uzavřená křivka. Vezměme tedy v jednoduše souvislé oblasti Ω libovolnou po částech hladkou uzavřenou křivku Γ a uzavřenou množinu $M \subseteq \Omega$ takovou, že $\partial M = \Gamma$. Protože vektorové pole $\vec{f}$ je spojité spolu s parciálními derivacemi P'_y, Q'_x na Ω, a tedy i na M, podle Greenovy věty platí

$$\iint_M (Q'_x - P'_y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Dvojný integrál na levé straně je však nulový díky rovnosti $P'_y = Q'_x$, tedy je nulový také křivkový integrál na pravé straně, a protože po částech hladká uzavřená křivka Γ byla volena libovolně, integrál ve větě nezávisí na integrační cestě. □

Poznámka 20.7. a) Má-li pole $\vec{f} = (P, Q)$ uvedené parciální derivace spojité, podmínka $P'_y = Q'_x$ v Ω je zároveň nutnou podmínkou pro nezávislost integrálu na integrační cestě, resp. existenci potenciálu (i v případě oblasti, která není jednoduše souvislá). To plyne ihned ze Schwarzovy věty: $P'_y = (\Phi'_x)'_y = \Phi''_{xy} = \Phi''_{yx} = (\Phi'_y)'_x = Q'_x$.

b) Předpoklad jednoduše souvislé oblasti obecně nelze vynechat. Pokud oblast není jednoduše souvislá, tak vektorové pole $\vec{f}$ může, ale také nemusí mít potenciál. Např. pole

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

je spojité na $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ a není těžké nalézt potenciál (lze i uhodnout) $\Phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$. Podle věty 20.4 tedy integrál $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě.

Uvažujme nyní např. vektorové pole

$$\vec{g}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right),$$

které je spojité opět na oblasti $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$. Spočítejme integrál $\int_\Gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ přes jednotkovou kružnici se středem v počátku:

$$\int_\Gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi,$$

což znamená, že integrál závisí na integrační cestě (podle věty 20.4 tedy $\vec{g}$ nemůže mít v $\mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$ potenciál).

c) V případě integrálu vektorového pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ přes prostorovou křivku Γ bychom nezávislost na integrační cestě definovali analogicky. Obsah vět 20.2, 20.4 a 20.6 zůstává v platnosti, přičemž podmínka z věty 20.6 se modifikuje na

$$\operatorname{rot} \vec{f} := \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \vec{o}.$$

To znamená, že postačující podmínkou pro nezávislost integrálu na integrační cestě v jednoduše souvislé prostorové oblasti Ω jsou rovnosti $R'_y = Q'_z$, $P'_z = R'_x$, $Q'_x = P'_y$ v Ω. Důkaz nyní využívá Stokesovu větu, viz kapitola 22.

Příklad 20.8. Rozhodněte, zda vektorové pole $\vec{f} = (xy^2 - 2, x^2y + 5y^2)$ je potenciálové (konzervativní), pokud ano, nalezněte příslušný potenciál.

Řešení. Platí $P'_y = 2xy = Q'_x$ v každém bodě roviny, a tedy vektorové pole $\vec{f}$ je potenciálové v celé rovině $\mathbb{R}^2$ (množina $\mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislou oblastí). Protože $P = \Phi'_x$, $Q = \Phi'_y$, musí naopak být

$$\Phi = \int P\, \mathrm{d}x \quad \text{nebo} \quad \Phi = \int Q\, \mathrm{d}y.$$

Uvažujeme-li např. první variantu, pak

$$\Phi(x,y) = \int (xy^2 - 2)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2y^2 - 2x + c(y)$$

a zbývá určit funkci c. Tu získáme tak, že předchozí rovnost derivujeme podle opačné proměnné, než jsme integrovali (v našem případě podle y); získaná rovnost se pak musí rovnat složce Q. Máme tedy

$$\Phi'_y(x,y) = x^2y + c'(y) = x^2y + 5y^2. \quad \text{Odtud} \quad c'(y) = 5y^2 \Longrightarrow c(y) = 5\int y^2 \mathrm{d}y = \frac{5}{3}y^3 + C.$$

Celkově

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - 2x + \frac{5}{3}y^3 + C.$$

Tuto funkci by také bylo možné získat z křivkového integrálu zadaného vektorového pole po libovolné křivce spojující body $[x_A, y_A]$ a $[x, y]$ (nejjednodušeji po úsečce).

Poznámka 20.9. Kmenová funkce (potenciál) je, podobně jako primitivní funkce k funkci jedné proměnné, určena jednoznačně až na aditivní konstantu $C \in \mathbb{R}$.

Příklad 20.10. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_{[1,0,0]}^{[2,-1,3]} (2xy, x^2 - z, 1 - y) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Řešení. Ověřme, že vektorové pole je skutečně potenciálové. Platí

$$R'_y = -1 = Q'_z, \qquad P'_z = 0 = R'_x, \qquad Q'_x = 2x = P'_y \qquad \forall [x,y,z] \in \mathbb{R}^3.$$

To znamená, že rot $\vec{f} = \vec{o}$ v $\mathbb{R}^3$, a tedy $\vec{f}$ je v celém prostoru potenciálové. Potenciál můžeme vypočítat stejnou technikou jako v předchozím příkladě, tj. vyjdeme z faktu $\Phi'_x = P$, $\Phi'_y = Q$, $\Phi'_z = R$. Odtud např.

$$\Phi(x,y,z) = \int R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int (1-y)\,\mathrm{d}z = z - yz + c(x,y).$$

Funkci c určíme tak, že předchozí rovnost parciálně zderivujeme (postupně podle x a y) a využijeme, že $\Phi'_x = P$, $\Phi'_y = Q$. Máme tedy

$$\Phi'_x(x,y,z) = c'_x(x,y) = 2xy \quad \text{a} \quad \Phi'_y(x,y,z) = -z + c'_y(x,y) = x^2 - z,$$

tj.

$$c'_x(x,y) = 2xy \quad \text{a} \quad c'_y(x,y) = x^2.$$

Integrací druhé rovnosti vzhledem k y pak máme $c(x,y) = x^2y + k(x)$. Zbývá určit funkci k. Derivujme poslední rovnost podle x, což vede na $c'_x(x,y) = 2xy + k'(x)$ a díky výše uvedené rovnosti $c'_x(x,y) = 2xy$ platí $c'_x(x,y) = 2xy + k'(x) = 2xy$, neboli $k'(x) = 0$. To znamená, že $k(x) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Kmenová funkce má tedy tvar

$$\Phi(x,y,z) = z - yz + x^2y + C$$

a hodnota integrálu je

$$\int_{[1,0,0]}^{[2,-1,3]} (2xy, x^2 - z, 1 - y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \Phi(2,-1,3) - \Phi(1,0,0) = 2 + C - C = 2.$$

Cvičení

20.1. Rozhodněte, zda dané vektorové pole je potenciálové v oblasti Ω a v kladném případě určete potenciál:

a) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}, \dfrac{y}{(x+y)^2} \right), \quad \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

b) $\vec{f}(x,y) = \left(-\dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x^2z}, -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{3}{y^2z}, \dfrac{1}{xz^2} - \dfrac{3}{yz^2} \right), \quad \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$

20.2. Rozhodněte, zda silové pole $\vec{f} = (-y, x)$ je konzervativní a určete práci, kterou vykoná po úsečce z bodu $[0,0]$ do bodu $[3,2]$.

20.3. Vypočtěte práci W, kterou vykoná tíhové pole $\vec{f} = -mg\vec{k}$ z bodu $A = [x_A, y_A, z_A]$ do bodu $B = [x_B, y_B, z_B]$.

20.4. Určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f}(x,y) = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ (tj. integrál $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$) po uzavřené křivce Γ, která se skládá z části kružnice $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ a úseček spojujících konce části kružnice s počátkem. Takto křivka je orientována kladně. Úlohu řešte dvěma způsoby: a) spočítejte křivkový integrál, b) využijte poznatků o nezávislosti integrálu na integrační cestě.

20.5. Vypočtěte integrál

$$\int_{[0,0,0]}^{[1,0,0]} (2x + 3y + \sin z^2, 2x, 2xz\cos z^2) \cdot \vec{ds}.$$

Výsledky. **20.1.** a) $\Phi(x,y) = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C$, b) $\Phi(x,y,z) = -\frac{1}{xy} - \frac{1}{xz} + \frac{3}{yz} + C$. **20.2.** Není a práce je nulová. **20.3.** $W = mg(z_A - z_B)$. **20.4.** 0. **20.5.** Nelze (pole není potenciálové).

21 Plochy v prostoru

Definice 21.1 — prostorové plochy a souvisejících pojmů. 1. Nechť S_{uv} je kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$ taková, že existuje oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ splňující $\Omega \subseteq S_{uv}$ (S_{uv} tedy nemůže být bod nebo křivka) a nechť $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je 3-funkce spojitá na S_{uv}. *Plochou v $\mathbb{R}^3$ (prostorovou plochou)* nazveme množinu

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v),\ [u, v] \in S_{uv}\}$$

a 3-funkci $\mathscr{F}$ nazveme *parametrizací plochy S*.

2. Nechť množina S_{uv} z předchozího bodu má po částech hladkou hranici ∂S_{uv}, $\mathscr{F}$ je prostá na S_{uv}, Jacobiova matice $\mathscr{F}'$ je spojitá na S_{uv} a tečné vektory

$$\vec{t}_u(u, v) = (\varphi'_u(u, v), \psi'_u(u, v), \chi'_u(u, v)), \qquad \vec{t}_v(u, v) = (\varphi'_v(u, v), \psi'_v(u, v), \chi'_v(u, v))$$

jsou lineárně nezávislé v každém bodě $[u, v] \in S_{uv}$. Pak plochu S nazveme *jednoduchou hladkou plochou*. Obraz $\mathscr{F}(\partial S_{uv})$ křivky ∂S_{uv} nazveme *okrajem plochy S* a budeme značit ∂S (s vědomím, že jsme v kolizi se značením, neboť symbol ∂S jsme používali také pro hranici množiny, což je v našem případě opět S). Z uvedených předpokladů je zřejmé, že hladké plochy se nikde neprotínají, nemají žádné „ostré" hrany ani vrcholy, a v každém bodě plochy lze sestrojit tečnou rovinu.

3. Plochu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *po částech hladkou plochou*, existují-li jednoduché hladké plochy $S_1, S_2, \dots, S_n$ takové, že platí:
   (i) $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$;
   (ii) $S_i \cap S_j \subseteq \partial S_i \cap \partial S_j$ pro každé $i \neq j$, přičemž $S_i \cap S_j$ je buď jednoduchá hladká křivka, nebo po částech hladká křivka (může být i uzavřená) – v tomto případě říkáme, že S_i a S_j jsou *přilehlé plochy*, nebo bod, nebo prázdná množina;
   (iii) Pro $i \neq j \neq k$ je $S_i \cap S_j \cap S_k$ jednobodová nebo prázdná množina;
   (iv) Pro každé $i = 2, 3, \dots, n$ je plocha S_i přilehlá k některé z ploch $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$.

4. Křivku Γ nazveme *částí okraje* po částech hladké plochy S (která se skládá z n jednoduchých hladkých ploch), jestliže existuje právě jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tak, že $\emptyset \neq \Gamma \cap \partial S_i \subseteq \partial S_i$. *Okraj ∂S po částech hladké plochy S* pak definujeme jako sjednocení všech částí hranice této plochy.

5. Po částech hladká plocha S se nazývá *uzavřená*, jestliže $\partial S = \emptyset$. Příkladem uzavřené plochy je kulová plocha, povrch kvádru, válce, kužele, atp.

Poznámka 21.2. a) V dalším uvidíme, že důležitou roli bude hrát normálový vektor v bodech plochy. Protože $\vec{t}_u$, $\vec{t}_v$ jsou tečné vektory, normálový vektor je dán vektorovým součinem $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$. V případě jednoduché hladké plochy lineární nezávislost vektorů $\vec{t}_u$ a $\vec{t}_v$ na celé množině S_{uv} zaručuje, že vektorový součin je nenulový, a tedy normálový vektor v každém bodě hladké plochy existuje. Navíc se spojitě mění díky předpokladu spojitosti $\mathscr{F}'$.

b) Graf funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, kde $[x, y] \in S_{xy}$ představuje plochu. Lze ji vždy parametrizovat nekonečně mnoha způsoby, např. $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, kde $[u, v] \in S_{xy}$. Analogicky pro graf funkcí $y = g(x, z)$ a $z = h(y, z)$.

c) Jednoduché hladké plochy mají dvě „strany". Nepatří mezi ně např. známý Möbiův list (August Ferdinand Möbius 1790–1868, Johann Benedikt Listing 1808–1882, Němci), který lze popsat parametricky $x = \cos t + p \cos t/2 \cos t$, $x = \sin t + p \cos t/2 \sin t$, $z = p \sin t/2$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $p \in \langle p_{\min}, p_{\max}\rangle$ (takto popsaný list by měl jednotkovou délku). Druhým nejznámějším příkladem plochy, která nemá dvě strany, je Kleinova nádoba (Felix Christian Klein 1849–1925, Němec). Tu si lze zjednodušeně představit jako uzavřenou nádobu, která nemá vnitřek ani vnějšek. Podobných ploch je známo více, nazýváme je *jednostrannými plochami*.

d) Pro potřeby plošného integrálu II. druhu je třeba plochu orientovat. Plochu orientujeme tak, že vybereme směr vektoru normály. Jednostranné plochy nelze orientovat.

Cvičení

21.1. Parametrizujte množinu S, je-li

$$\text{a)}\quad S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 100,\ -8 \le z \le 6\},$$
$$\text{b)}\quad S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 \le 2x,\ z \ge 0\}.$$

Výsledky. **21.1.** a) $x = \sqrt{100-u^2}\cos v$, $y = \sqrt{100-u^2}\sin v$, $z = u$, $S_{uv} = \langle -8,6\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, b) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \sqrt{4-u^2}$, $S_{uv} = \{[u,v] \in \mathbb{R}^2 : -\pi \le v \le \pi,\ 0 \le u \le 2\cos v\}$.

22 Plošný integrál

Definice 22.1 — plošného integrálu I. druhu přes hladkou plochu. Nechť S je jednoduchá hladká plocha s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na nějaké prostorové oblasti obsahující plochu S. Potom definujeme *plošný integrál I. druhu* vztahem

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S := \iint_{S_{uv}} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))\,|\vec{t}_u(u,v) \times \vec{t}_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

Poznámka 22.2. a) Za uvedených předpokladů je funkce $f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))|\vec{t}_u(u,v) \times \vec{t}_v(u,v)|$ spojitá na S_{uv}, tudíž je integrovatelná a definice má smysl.

b) Jako motivace pro takto zavedený integrál poslouží úloha spočítat hmotnost plochy S, kde funkce f představuje plošnou hustotu. Pro jednoduchost předpokládejme, že S_{uv} je obdélník. Uvedený vzorec se odvodí tak, že množina S_{uv} se (stejně jako u zavedení dvojného integrálu) „rozřeže“ na malé obdélníky $I_{ij} = \langle u_{i-1}, u_i\rangle \times \langle v_{j-1}, v_j\rangle$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$. Tyto obdélníky zároveň určují dělení plochy pomocí malých plošek S_{ij}. Myšlenka je, že obsah každé plošky S_{ij} nahradíme obsahem části tečné roviny (nad obdélníkem I_{ij}), například v bodě $\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})$. Lze ukázat, že obsah této části tečné roviny je roven $|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{i-1})|(u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1})$. Aproximace hmotnosti plošky S_{ij} je pak dána hodnotou $f(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1}))|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{i-1})|(u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1})$ a aproximace hmotnosti celé plochy S je

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1}))|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{i-1})|(u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1}).$$

To ale není nic jiného než integrální součet, který v limitě (pro každou nulovou posloupnost dělení S_{uv}) dává pravou stranu rovnosti $(*)$.

c) Stejně jako u křivkového integrálu lze ukázat, že hodnota integrálu nezávisí na zvolené parametrizaci.

d) Integrál $\iint_S \mathrm{d}S$ představuje obsah plochy S.

e) Je-li plocha S dána explicitně, např. jako $z = f(x,y)$, kde $[x,y] \in S_{xy}$, a jsou-li parciální derivace f'_x, f'_y spojité na S_{xy}, pak pro velikost normálového vektoru v bodě $[x,y] \in S_{xy}$ platí

$$|\vec{n}(x,y)| = \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}.$$

f) Je-li S po částech hladká plocha skládající se z hladkých ploch S_i, $i = 1,\dots,n$, pak definujeme

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S := \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde S_i jsou hladké. Lze ukázat, že hodnota nezávisí na konkrétním rozkladu na hladké plochy.

Příklad 22.3. Vypočítejte integrál $\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, kde S je povrch kužele $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

Řešení. Povrch se skládá z podstavy a pláště. Podstava má parametrické vyjádření $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = 1$, $[\varphi, \rho] \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, a tedy tečné vektory jsou $\vec{t}_\rho(\varphi, \rho) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\vec{t}_\varphi(\varphi, \rho) = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$. Jejich vektorový součin pak představuje normálový vektor

$$\vec{n}(\varphi, \rho) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \times (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) = (0, 0, \rho) \quad \Longrightarrow \quad |\vec{n}(\varphi, \rho)| = \rho$$

Integrál přes podstavu má tvar

$$\mathrm{Int}_{\mathrm{podst}} = \iint_{S_{\varphi\rho}} \rho^2 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \Big) \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Plášť kužele pak lze parametricky vyjádřit jako $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = \rho$, $[\varphi, \rho] \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Odtud

$$\vec{n}(\varphi, \rho) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \times (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) = (-\rho\cos\varphi, -\rho\sin\varphi, \rho) \quad \Longrightarrow \quad |\vec{n}(\varphi, \rho)| = \sqrt{2}\rho.$$

Plošný integrál přes plášť je pak dán dvojným integrálem

$$\mathrm{Int}_{\mathrm{plášť}} = \sqrt{2} \iint_{S_{\varphi\rho}} \rho^3 \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Celkově

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}S = \mathrm{Int}_{\mathrm{podst}} + \mathrm{Int}_{\mathrm{plášť}} = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Definice 22.4 — plošného integrálu II. druhu přes hladkou plochu. Nechť S je orientovaná jednoduchá hladká plocha s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a vektorové pole $\vec{f} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je spojité v nějaké prostorové oblasti obsahující plochu S. Označme $\mathrm{d}\vec{S} = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}x\mathrm{d}z, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ (orientovaný diferenciál plochy). Potom *plošný integrál II. druhu* definujeme jako

$$\iint_S \vec{f}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} := \pm \iint_{S_{uv}} \vec{f}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot (\vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v)) \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad (**)$$

kde znaménko $+$ uplatníme, je-li normálový vektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$ orientován souhlasně se zadanou orientací plochy (tj. má stejný stejný směr jako vektor definující orientaci plochy), a znaménko $-$, je-li tomu naopak. Uvědomme si přitom, že pokud normálový vektor spočítáme jako $\vec{t}_v \times \vec{t}_u$, dostaneme opačnou orientaci (vektorové násobení je antikomutativní operace).

Poznámka 22.5. a) Motivace pro takto zavedený integrál je následující. Buď τ rovinná plocha, přes kterou protéká ve směru jejího jednotkového normálového vektoru $\vec{n}_1$ nestlačitelná kapalina konstantní rychlostí (tj. nezávislou na poloze i čase) danou vektorem $\vec{f}_c$. Potom (objemové) množství kapaliny, které proteče přes plochu τ za jednotku času je dáno číslem $\vec{f}_c \cdot \vec{n}_1 \lambda(\tau)$, kde $\lambda(\tau)$ je obsah plochy τ. Jaký bude tok vektorového pole $\vec{f}$ přes plochu S? Uvažujeme-li opět pro jednoduchost množinu S_{uv} jako obdélník, který rozdělíme na malé obdélníky $I_{ij} = \langle u_{i-1}, u_i\rangle \times \big\langle v_{j-1}, v_j\big\rangle$, pak aproximace toku přes část plochy S_{ij} (ta je dána obrazem $\mathscr{F}(I_{ij})$) bude dána tokem vektoru $\vec{f}(u_{i-1}, v_{j-1})$ přes část tečné roviny (nad obdélníkem I_{jk}) v bodě $\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})$, tj. hodnotou

$$\begin{aligned}
&\vec{f}(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})) \cdot \frac{\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1})}{|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|} |\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1})| \\
&\qquad (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \\
&= \vec{f}(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})) \cdot (\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1}))(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).
\end{aligned}$$

Aproximací celkového toku pak bude součet přes všechny obdélníky I_{ij}, což ale není nic jiného než integrální součet, který v limitě (pro každou nulovou posloupnost dělení S_{uv}) dává pravou stranu vzorce $(**)$.

b) Pokud plochu S lze vyjádřit explicitně zároveň jako $x = f(y,z)$, kde $[y,z] \in S_{yz}$, resp. $y = g(x,z)$, kde $[x,z] \in S_{xz}$, resp. $z = h(x,y)$, kde $[x,y] \in S_{xy}$, pak lze integrál vyjádřit jako

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pm \iint_{S_{yz}} P(f(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint_{S_{xz}} Q(x,g(x,z),z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \pm \iint_{S_{xy}} R(x,y,h(x,z))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde „+“ bereme, pokud normálový vektor z orientace plochy svírá s kladným směrem osy x, resp. y, resp. z ostrý úhel a „−“ bereme, pokud svírá tupý úhel. Je-li průmětem plochy do nějaké ze souřadných roviny křivka, klademe příslušný integrál roven nule (to odpovídá situaci, kdy je normálový vektor kolmý na vektor souřadnicové osy, a tedy příslušná složka vektorového pole k celkovému toku nepřispívá). Poznamenejme ještě, že při daném značení pro normálový vektor plochy S platí $\vec{n} = (1, -f'_y, -f'_z)$, resp. $\vec{n} = (-g'_x, 1, -g'_z)$, resp. $\vec{n} = (-h'_x, -h'_y, 1)$.

Příklad 22.6. Určete tok kapaliny s rychlostním polem $\vec{f} = (x,y,z)$ přes válcovou plochu $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = 1$. Plocha je orientována tak, že normálový vektor směřuje od osy z „pryč“.

Řešení. Zadanou část válcové plochy parametrizujme rovnicemi $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = v$, $[\varphi, v] \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Normálový vektor je dán vektorovým součinem tečných vektorů, tj. máme

$$\vec{n}(\varphi, v) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (0,0,1) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0).$$

Dosadíme-li např. bod $\varphi = 0$, vidíme, že $\vec{n}(0,v) = (1,0,0)$, tj. normálový vektor směřuje v kladném směru osy x, tj. od osy z „pryč“, což znamená, že orientace vektoru $\vec{n}$ je se zadanou orientací plochy souhlasná. Tok kapaliny je pak dán integrálem

$$\iint_S (x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 (\cos\varphi, \sin\varphi, v)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}v = 2\pi.$$

Poznámka 22.7. Vztah mezi plošným integrálem I. a II. druhu je následující. Je-li S hladká plocha, potom její normálový vektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$ lze normalizovat vydělením jeho velikostí, tj. vektor

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|}$$

je jednotkový a platí

$$\iint_S \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pm \iint_S \vec{f}\cdot \vec{n}_1\,\mathrm{d}S.$$

■ **Věta 22.8 — Gaussova–Ostrogradského[3].** *Nechť M je normální množina v $\mathbb{R}^3$ taková, že její hranice ∂M je po částech hladká uzavřená plocha orientovaná ve směru vnější normály a nechť vektorové pole $\vec{f} = (P,Q,R)$ je spojité na M a má zde spojité parciální derivace P'_x, Q'_y a R'_z. Potom platí*

$$\iiint_M \operatorname{div}\vec{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\partial M} \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

kde $\operatorname{div}\vec{f} := P'_x + Q'_y + R'_z$.

Poznámka 22.9. Platnost tvrzení lze rozšířit i na komplikovanější množiny než je normální, úplně libovolné množiny to ale být nemohou.

Příklad 22.10. Určete tok vektorového pole $\vec{f} = (yz, xz, xy)$ přes boční stěny čtyřstěnu s vrcholy $[0,0,0]$, $[2,0,0]$, $[0,1,0]$ a $[0,0,2]$, které jsou orientovány tak, že normalový vektor směřuje z tělesa „ven“. Využijte faktu, že tok přes boční stěny je dán tokem přes celý povrch bez toku přes podstavu.

[3] Michail Vasiljevič Ostrogradskij 1801–1862, kozák z území dnešní Ukrajiny

Řešení. Platí $\operatorname{div}\vec{f} = (yz)'_x + (xz)'_y + (xy)'_z = 0$, a tedy trojný integrál přes zadaný čtyřstěn je nulový. Nyní stačí spočítat plošný integrál přes podstavu:

$$\iint_{S_{\text{podst}}} (yz, xz, xy) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_{S_{xy}} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S_{xy} je trojúhelník vymezený nerovnostmi $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$. Máme tedy

$$\begin{aligned}
-\iint_{S_{xy}} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_0^2 \Big(\int_0^{1-x/2} xy \,\mathrm{d}y\Big) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^2 [xy^2]_0^{1-x/2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^2 x\Big(1 - x + \frac{x^2}{4}\Big) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{8}\int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\Big[2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\Big]_0^2 \\
&= -\frac{1}{8}\Big(8 - \frac{32}{3} + 4\Big) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{36-32}{3} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Tok přes boční stěny pak je $0 - \big(-\frac{1}{6}\big) = \frac{1}{6}$.

Poznámka 22.11. Objem tělesa Ω lze pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty počítat jako

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{\partial\Omega} (x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

■ **Věta 22.12 — Stokesova[4].** *Nechť S je jednoduchá hladká plocha, která je spolu se svým okrajem ∂S orientována tak, že když položíme dlaň pravé ruky kolmo k ploše S na její okraj ∂S tak, aby prsty ukazovaly orientaci křivky, pak palec ukazuje směr normály plochy. Nechť dále $\vec{f}$ je vektorové pole, které má spojité parciální derivace na nějaké oblasti obsahující plochu S. Potom platí*

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{f}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Poznámka 22.13. Tvrzení zůstane v platnosti i v případě po částech hladké plochy, která má neprázdný okraj.

Příklad 22.14. Pomocí Stokesovy věty (po horní polovině kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$) vypočtěte integrál

$$\int_\Gamma (x^2y^3, 1, z) \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

kde Γ je kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$, $z = 0$, orientována tak, že v rovině (x, y) „obíháme“ proti smyslu pohybu hodinových ručiček.

Řešení. Pro rotaci zadaného vektorového pole platí

$$\operatorname{rot}\vec{f} = (0, 0, -3x^2y^2).$$

Podle Stokesovy věty tedy máme

$$\mathrm{Int} = \iint_S (0, 0, -3x^2y^2) \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

kde S je horní polovina kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = r^2$ orientovaná tak, že vektor normály svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel. Parametrické vyjádření této plochy je $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$. Tečné vektory jsou dány

$$\vec{t}_\varphi = (-r\sin\varphi\cos\vartheta, r\cos\varphi\cos\vartheta, 0), \quad \vec{t}_\vartheta = (-r\cos\varphi\sin\vartheta, -r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta).$$

[4] George Gabriel Stokes 1819–1903, Ir

Dále

$$\vec{n} = \vec{t}_\varphi \times \vec{t}_\vartheta = (r^2 \cos\varphi \cos^2\vartheta, r^2 \sin\varphi \cos^2\vartheta, r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta),$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\text{Int} &= -\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi/2} (0, 0, 3r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cos^4\vartheta) \\
&\quad \cdot (r^2 \cos\varphi \cos^2\vartheta, r^2 \sin\varphi \cos^2\vartheta, r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta\Big)\, \mathrm{d}\varphi \\
&= -3r^6 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^5\vartheta \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \left| \begin{array}{c} \cos\vartheta = t \\ \mathrm{d}\vartheta = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin\vartheta} \\ 0 \to 1, \pi/2 \to 0 \end{array} \right| \\
&= -\frac{3}{4} r^6 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \int_0^1 t^5\, \mathrm{d}t = -\frac{3}{8} r^6 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 \\
&= -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} r^6 [\varphi]_0^{2\pi} = -\frac{1}{8} \pi r^6 .
\end{aligned}$$

Několik operátorových identit

Platí:

1. $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$,
2. $\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}$,
3. $\operatorname{rot} \nabla f = \vec{o}$,
4. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} = 0$,
5. $\operatorname{div} \nabla f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} =: \Delta f$ (symbol Δ se nazývá Laplaceův[5] operátor).

Poznámka 22.15. Stokesovu větu lze interpretovat také takto: je-li nějaké vektorové pole $\vec{f}$ rotací jiného vektorového pole, pak plošný integrál $\iint_S \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ závisí pouze na okraji plochy ∂S, nikoliv na jejím vnitřku. V takovém případě je podle bodu 4 předchozích identit $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ a říkáme, že *pole $\vec{f}$ je nezřídlové (solenoidální)*.

Cvičení

22.1. Určete plošný integrál

$$\iint_S \frac{1}{(1 + x + y)^2}\, \mathrm{d}S,$$

kde S je povrch čtyřstěnu s vrcholy $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ a $[0, 0, 0]$.

22.2. Spočítejte plošný integrál

$$\iint_S (x, y, xyz) \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \quad \text{kde} \quad S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ x^2 + y^2 \le 5\}$$

orientovaná tak, že normálový vektor svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel.

22.3. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočítejte plošný integrál

$$\iint_S (x - y + z, y - z + x, z - y + x) \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \quad \text{kde} \quad S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| = 3\}$$

orientovaná tak, že normálový vektor směřuje k počátku.

[5] Pierre Simon de Laplace 1749–1827, Francouz

22.4. Pomocí Stokesovy věty spočítejte integrál

$$\int_\Gamma (x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \quad \text{kde} \quad \Gamma = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1 \right\}$$

a orientace je dána pořadím bodů křivky $[2, 0, 0]$, $[0, 2, 3]$ a $[-2, 0, 6]$.

Výsledky. **22.1.** $(\sqrt{3} - 1)\ln 2 - \sqrt{3}/2 + 3/2$. **22.2.** $125\pi/24$. **22.3.** -108. **22.4.** 10π.

Literatura

[1] Bouchala, J., Vlach, O., *Křivkový a plošný integrál*, Matematika pro inženýry 21. století (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), VŠB-TU Ostrava a ZČU v Plzni, 2011.

[2] Došlá, Z., Došlý, O., *Metrické prostory: teorie a příklady*, 3. vyd., Masarykova univerzita, Brno, 2006.

[3] Jirásek, F., Čipera, S., Vacek, M., *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*, SNTL, Praha, 1989.

[4] Došlý, O., Kuben, J., *Křivkový integrál*, text PřF MUNI, 2005.

[5] Hasil, P., Zemánek, P., *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, 3. vyd., text PřF MUNI a LDF MENDELU, Brno, 2012.

[6] Kalas, J., Kuben, J., *Integrální počet funkcí více proměnných*, MUNI, Brno, 2009.

[7] Pospíšil, Z., Půža, B., *Základy matematické analýzy v reálném oboru*, text PřF MUNI, 2004.

[8] Ráb, M., *Riemannův integrál v* E^n, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Brno, 1985.

[9] Škrášek, J., Tichý, Z., *Základy aplikované matematiky I*, SNTL, Praha, 1983.

[10] Škrášek, J., Tichý, Z., *Základy aplikované matematiky II*, SNTL, Praha, 1986.

[11] Veselý, J., *Základy matematické analýzy II*, MatfyzPress, 2009.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Studium moderní a rozvíjející se techniky VUT

CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013325

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ