



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vysoké učení technické v Brně  
Fakulta strojního inženýrství  
Ústav matematiky

# Matematika III

Jan Čermák  
Luděk Nechvátal

Brno 2022





## Předmluva

Tato skripta jsou určena studentům druhého ročníku Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně pro studium předmětu Matematika III. Jejich text vychází ze stejnojmenných skript prof. Alexandra Ženíška a prvního z autorů, vydaných v roce 2001. Tuto původní předlohu však bylo třeba podstatným způsobem upravit, a to především s ohledem na několik významných změn učebních plánů pro přednášky a cvičení z tohoto předmětu, k nimž v uplynulých letech došlo.

Předmět Matematika III tvoří tři klasické partie matematické analýzy: nekonečné řady, obyčejné diferenciální rovnice a parciální diferenciální rovnice. Hlavním cílem skript je proto podat základy těchto matematických disciplín, včetně uvedení vybraných aplikací. U čtenářů se při studiu skript předpokládá znalost diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné a více proměnných, včetně základů lineární algebry – vše v rozsahu, v jakém jsou tyto partie probírány na Fakultě strojního inženýrství v rámci předcházejících kurzů.

Po formální stránce jsou skripta rozdělena do tří kapitol, které se dále člení na jednotlivé sekce. První kapitola (sekce 1–4) obsahuje základy teorie číselných a funkčních řad (včetně řad Taylorových a Fourierových) v obvyklém rozsahu. Druhá, nejrozsáhlejší kapitola (sekce 5–14) se zabývá teorií, metodami řešení a aplikacemi obyčejných diferenciálních rovnic. Závěrečná kapitola (sekce 15–17) čtenáře seznamuje s úvodem do teorie parciálních diferenciálních rovnic, se zaměřením na rovnice matematické fyziky. Většina textu svým rozsahem odpovídá látce probírané v předmětu Matematika III. V některých partiích (věnovaným např. metodě Laplaceovy transformace nebo některým oblastem parciálních diferenciálních rovnic) jde výklad hlouběji, a to především s ohledem na skutečnost, že tyto partie jsou v inženýrské praxi využívány v řadě rozmanitých souvislostí. Snahou autorů proto bylo podat jejich výklad takovou formou, která by případně mohla být užitečná i pro pokročilejší čtenáře.

Důkazy jednotlivých matematických tvrzení se obvykle při přednáškách neuvádějí, a to zejména z časových důvodů. V tomto textu důkazy částečně zařazeny jsou, a to především v případě dvou skupin matematických vět. První skupina zahrnuje tvrzení, jejichž důkaz je krátký, resp. jednoduchý; v takovém případě si čtenář přečtením důkazu může procvičit logické uvažování a současně může lépe porozumět významu daného tvrzení. Druhou skupinou jsou tvrzení mající existenční charakter, přičemž jejich důkaz je konstruktivní (umožňuje předmět tvrzení určit nebo nalézt). V těchto případech je uvedena myšlenka důkazu, který jinak bývá často dlouhý. Text skript dále průběžně doplňují řešené příklady, přičemž na závěr každé sekce jsou uvedeny i úlohy nerešené.

Z důvodu neobyčejné rozmanitosti studované problematiky jsme se na řadě míst omezili pouze na uvedení základních faktů. Doplnění případných chybějících vědomostí je možné provést např. v následujících, velmi dobře dostupných učebnicích:

- M. Greguš, M. Švec a V. Šeda, *Obyčejné diferenciální rovnice*, Alfa, Bratislava, 1985;
- K. Rektorys a spolupracovníci, *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, 2000;
- J. Škrášek a Z. Tichý, *Základy aplikované matematiky II*, SNTL, Praha, 1989.

Je potřeba ještě dodat, že v současné době k jednotlivým tématům probíraným v rámci předmětu Matematika III existuje značně rozsáhlá literatura (v tištěné či elektronické podobě). Při jejím výběru pro konkrétní problém doporučujeme obrátit se na vyučujícího, příp. na autory skript.

Autoři by rádi na tomto místě vyslovili poděkování doc. Ing. Jířímu Šremrovi, Ph.D. za mimořádně pečlivé přečtení textu skript a řadu připomínek či námětů k jejich vylepšení. Jeho úsilí bezesporu přispělo ke zvýšení formální úrovně předkládaného textu.

Přejeme čtenářům, aby je látka probíraná v rámci tohoto předmětu zaujala, a aby si z ní odnesli mimo jiné poznatek, že matematika může být užitečným nástrojem nejen při prohlubování logického uvažování, ale i při řešení praktických problémů. Naším záměrem bylo, aby k příznivému dojmu z předmětu Matematika III alespoň malou měrou přispěla i tato skripta. Případné čtenářské náměty, jak je do budoucna vylepšit, jsou vítány.



# Obsah

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Nekonečné řady</b>  | <b>7</b>  |
| 1        | Číselné řady   | 7         |
| 1.1      | Základní pojmy a vlastnosti                                      | 7         |
| 1.2      | Kritéria konvergence pro řady s kladnými členy                   | 10        |
| 1.3      | Kritérium konvergence pro alternující řady                       | 15        |
| 1.4      | Operace s číselnými řadami                                       | 16        |
| 2        | Funkční řady   | 21        |
| 2.1      | Základní pojmy   | 21        |
| 2.2      | Vlastnosti součtů funkčních řad                                  | 23        |
| 3        | Mocninné a Taylorovy řady  | 30        |
| 3.1      | Mocninné řady a jejich základní vlastnosti                       | 30        |
| 3.2      | Rozvoje funkcí v mocninné (Taylorovy) řady                       | 34        |
| 3.3      | Užití mocninných řad   | 40        |
| 4        | Fourierovy řady  | 44        |
| 4.1      | Základní pojmy a vlastnosti                                      | 44        |
| 4.2      | Bodová a stejnoměrná konvergence Fourierovy řady                 | 47        |
| <b>2</b> | <b>Obyčejné diferenciální rovnice</b>                            | <b>55</b> |
| 5        | Úvod do problematiky ODR   | 55        |
| 5.1      | Základní pojmy   | 56        |
| 5.2      | Počáteční a okrajová úloha                                       | 58        |
| 5.3      | Druhy řešení ODR a geometrická interpretace ODR1                 | 59        |
| 6        | Základy teorie a metody řešení ODR1                              | 60        |
| 6.1      | Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy pro ODR1        | 60        |
| 6.2      | Analytické metody řešení ODR1                                    | 63        |
| 7        | Základy teorie ODRn  | 76        |
| 7.1      | Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy pro ODRn        | 76        |
| 7.2      | Základy teorie lineárních ODRn                                   | 79        |
| 8        | Metody řešení lineárních ODRn s konstantními koeficienty         | 84        |
| 8.1      | Homogenní lineární ODRn s konstantními koeficienty               | 85        |
| 8.2      | Nehomogenní lineární ODRn s konstantními koeficienty             | 88        |
| 9        | Metoda Laplaceovy transformace a Taylorových řad                 | 96        |
| 9.1      | Laplaceova transformace  | 96        |
| 9.2      | Metoda Taylorových řad   | 107       |
| 10       | Některé aplikace ODR   | 110       |
| 10.1     | Několik aplikací ODR1  | 110       |
| 10.2     | Několik aplikací ODR2  | 115       |
| 11       | Základy teorie soustav ODR                                       | 122       |
| 11.1     | Druhy řešení soustav ODR1 a jejich geometrický význam            | 122       |
| 11.2     | Vztah soustav ODR1 a ODRn  | 124       |
| 11.3     | Základy teorie soustav lineárních ODR1                           | 126       |
| 12       | Metody řešení soustav lineárních ODR1 s konstantními koeficienty | 129       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 12.1     | Homogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty . . . . .      | 129        |
| 12.2     | Nehomogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty . . . . .    | 136        |
| 13       | Stabilita řešení soustav ODR . . . . .                                       | 141        |
| 13.1     | Základní pojmy . . . . .   | 141        |
| 13.2     | Stabilita homogenních soustav lineárních ODR1 s konstantními koeficienty . . | 143        |
| 14       | Okrajová úloha pro lineární ODR2 . . . . .                                   | 150        |
| 14.1     | Základní pojmy . . . . .   | 150        |
| 14.2     | Typy okrajových podmínek a otázka řešitelnosti okrajových úloh . . . . .     | 151        |
| <b>3</b> | <b>Parciální diferenciální rovnice</b>                                       | <b>157</b> |
| 15       | Základní pojmy . . . . .   | 157        |
| 15.1     | Pojem PDR a jejího řešení . . . . .  | 157        |
| 15.2     | Otázka obecného řešení . . . . .   | 158        |
| 15.3     | Počáteční a okrajové podmínky . . . . .                                      | 159        |
| 16       | Lineární parciální diferenciální rovnice . . . . .                           | 160        |
| 16.1     | Lineární PDR prvního řádu . . . . .  | 160        |
| 16.2     | Lineární PDR druhého řádu . . . . .  | 162        |
| 17       | Rovnice matematické fyziky . . . . .   | 166        |
| 17.1     | Rovnice vedení tepla . . . . .   | 166        |
| 17.2     | Vlnová rovnice (rovnice kmitání) . . . . .                                   | 167        |
| 17.3     | Laplaceova a Poissonova rovnice . . . . .                                    | 168        |
| 17.4     | Řešení PDR Fourierovou metodou . . . . .                                     | 169        |

# Kapitola 1

## Nekonečné řady

### 1 Číselné řady

V první sekci zodpovíme následující otázky spojené s teorií nekonečných číselných řad: Umíme určit součet nekonečně mnoha sčítanců? Pokud ne, umíme rozhodnout, zda je hledaný součet konečné číslo? Lze v takovém případě určit požadovaný součet alespoň přibližně? Platí pro součty nekonečně mnoha sčítanců stejné aritmetické zákony jako v případě konečných součtů?

#### 1.1 Základní pojmy a vlastnosti

Přirozeným rozšířením operace sčítání konečného počtu čísel

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

je součet nekonečného počtu čísel  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Mluvíme pak o (nekonečné) řadě. Zavedeme nejprve tento pojem a poté budeme zkoumat jeho vlastnosti.

**Definice 1.1.** Necht'  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  značí nějakou posloupnost reálných čísel  $a_k$ . *Nekonečnou řadou* (stručně *řadou*) rozumíme symbol tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1.1)$$

Jednotlivá čísla  $a_k$  se nazývají členy řady (1.1).

**Příklad 1.2.** Uvažujme spirálu složenou z nekonečného počtu půlkružnic takových, že první má poloměr 1 a každá následující má poloměr poloviční než půlkružnice předcházející. Při stanovení délky  $s$  této spirály musíme postupně sčítat délky jednotlivých půlkružnic. Platí tedy

$$s = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \cdots$$

Tato řada obsahuje nekonečně mnoho kladných sčítanců. Později uvidíme, že  $s = 2\pi$  (hodnota součtu je tedy konečné číslo).

Vytvořme nyní opět spirálu složenou z nekonečného počtu půlkružnic, přičemž první z nich má poloměr 1, druhá má poloměr  $1/2$  a obecně  $k$ -tá půlkružnice má poloměr  $1/k$ . Délku  $s$  takto vytvořené spirály lze získat jako součet nekonečné řady

$$s = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \cdots$$

Později ukážeme, že  $s = \infty$  (hodnota součtu není konečné číslo).

Intuitivně je zřejmé, že příslušnou nekonečnou řadu sčítáme postupným přičítáním následujícího sčítance k součtu všech předcházejících. Takto dostáváme posloupnost hodnot, které se k hledanému součtu blíží, a součet tedy lze stanovit jako limitu posloupnosti těchto hodnot. V tomto smyslu také zavedeme pojem součtu nekonečné řady.

**Definice 1.3.** Necht' je dána nekonečná řada (1.1). Posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  součtů tvaru

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady. Součet  $s_n$  se nazývá *n-tý částečný součet* řady. Vynecháme-li v řadě (1.1) prvních  $n$  členů, dostáváme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots,$$

kterou nazýváme *n-tým zbytkem řady*  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  a značíme  $r_n$ .

**Definice 1.4.** Necht'  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  značí posloupnost částečných součtů řady (1.1).

1) Jestliže existuje *konečná* limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

potom řekneme, že řada (1.1) *konverguje* a má součet  $s$ . Píšeme přitom

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

2) Jestliže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty,$$

potom řekneme, že řada (1.1) *diverguje* (v některé literatuře se též užívá *určitě diverguje*).

3) Jestliže  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  neexistuje, pak řekneme, že řada (1.1) *osciluje* (nebo *neurčitě diverguje*).

**Příklady 1.5.** a) Hledejme součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots \quad (a \neq 0).$$

*Řešení.* Tato řada se nazývá *geometrická*; číslo  $a$  je první člen řady a číslo  $q$  nazýváme *kvocient* řady. Platí

$$s_n = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}),$$

$$-qs_n = -\sum_{k=1}^n aq^k = a(-q - q^2 - \dots - q^{n-1} - q^n).$$

Sčtením máme  $s_n(1 - q) = a(1 - q^n)$ , a odtud tedy pro  $q \neq 1$  je

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Pro  $|q| < 1$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , takže

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \quad (|q| < 1 \iff q \in (-1, 1)),$$

a řada tedy konverguje. Pro  $|q| > 1$  a  $q = -1$  nemá posloupnost  $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$  konečnou limitu, a příslušná geometrická řada proto nekonverguje (přesněji: pro  $q > 1$  diverguje a pro  $q \leq -1$  osciluje).

Konečně pro  $q = 1$  příslušná geometrická řada diverguje, neboť v tomto případě  $s_n = an$ , a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm \infty$ .

b) Uvažujme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

Rozkladem  $k$ -tého členu řady na parciální zlomky dostáváme

$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pro  $n$ -tý částečný součet řady pak platí

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

tj.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Řada je tedy konvergentní a má součet  $s = 1$ .

c) Uvažujme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots$$

Pro  $n$ -tý částečný součet řady platí

$$s_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1).$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty,$$

příslušná řada diverguje.

**Poznámka 1.6.** Ve všech předcházejících příkladech se podařilo vyjádřit částečný součet  $s_n$  dané řady pro libovolné přirozené  $n$ , což nám umožnilo snadno určit hodnotu součtu  $s$ . Toto vyjádření  $s_n$  lze ovšem provést pouze ve velmi speciálních případech (předcházející příklady byly vybrány záměrně právě z tohoto hlediska). V obecném případě je třeba nejprve ověřit podmínky, které nám umožní rozhodnout o konvergenci dané řady. Jsou-li tyto podmínky splněny (a víme tedy, že příslušná řada konverguje), pak hodnotu součtu  $s$  aproximujeme hodnotou částečného součtu  $s_n$ , kde  $n$  je dosti veliké. Přesnost této aproximace odhadujeme pomocí chování zbytku  $r_n$ .

V další části se tedy zaměříme na formulaci podmínek, které nám umožní posoudit, zda daná řada konverguje. Nejprve zformulujeme jednoduchou podmínku, jejíž platnost je pro konvergenci dané řady nutná.

■ **Věta 1.7 — nutná podmínka konvergence.** *Necht' řada (1.1) konverguje. Pak limita posloupnosti členů řady je nulová, tj. platí vztah*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0. \quad (1.2)$$

*Důkaz.* Necht' je řada (1.1) konvergentní. To znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s.$$

Odtud a ze vztahu

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

plyne vztah (1.2). □

Podmínka (1.2) nestačí ke konvergenci řady (1.1), což ukážeme v příkladech 1.13. Musí ale být splněna, aby řada mohla konvergovat. Jinak vyjádřeno, její nesplnění má za následek, že řada nekonečně diverguje (tj. diverguje nebo osciluje).

Tvrzení následující věty je intuitivně zřejmé, a uvádíme jej proto bez důkazu.

■ **Věta 1.8.** *Pro libovolné přirozené číslo  $n$  platí, že nekonečná řada (1.1) je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní její zbytek  $r_n$ . V případě konvergence navíc platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

*Podobně, přidáním konečného počtu členů k řadě (1.1) (resp. ubráním konečného počtu členů) se nic nemění na konvergenci či divergenci, příp. oscilaci řady.*

**Poznámka 1.9 – řady s kladnými členy a alternující řady.** Při formulaci mnoha významných kritérií konvergence číselných řad bývá důležitým předpokladem požadavek kladený na znaménka jednotlivých členů těchto řad. Zpravidla se předpokládá, že daná řada zahrnuje pouze členy s kladnými hodnotami (pak hovoříme o *řadě s kladnými členy*), příp. členy střídající pravidelně znaménka (pak hovoříme o *alternující řadě*). Některá kritéria konvergence pro řady s kladnými členy uvedeme v následující podsekcí. Nejužívanější kritérium konvergence pro alternující řady pak bude obsahem další podsekcí.

## 1.2 Kritéria konvergence pro řady s kladnými členy

Dříve, než zformulujeme vybraná základní kritéria konvergence pro řady s kladnými členy (kdy  $a_k > 0$  pro všechna  $k = 1, 2, \dots$ ), ukážeme, že tyto řady nemohou oscilovat.

■ **Věta 1.10.** *Je-li  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  řada s kladnými členy, pak je to řada konvergentní, nebo divergentní.*

*Důkaz.* Posloupnost částečných součtů  $s_n$  je posloupnost rostoucí, neboť  $a_k > 0$ . Pokud je tato posloupnost omezená, pak má konečnou limitu, a řada konverguje. V opačném případě platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , a řada diverguje.  $\square$

■ **Věta 1.11 — kritéria konvergence pro řady s kladnými členy.**

a) **Porovnávací kritérium.** *Nechť  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  jsou řady s kladnými členy. Necht' pro všechna  $k \geq k_0$  ( $k_0$  je vhodné přirozené číslo) platí*

$$a_k \leq b_k$$

*(v takovém případě říkáme, že řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  je minorantní k řadě  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , resp. řada  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  je majorantní k řadě  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ). Potom z konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  plyne konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  a z divergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  plyne divergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .*

**Porovnávací kritérium v limitním tvaru:** *Nechť  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  jsou řady s kladnými členy a necht' existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}.$$

- (i) *Je-li  $L < \infty$ , pak z konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  plyne konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ;*  
 (ii) *je-li  $L > 0$ , pak z divergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  plyne divergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .*

b) **Podílové (d'Alembertovo) kritérium.** *Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  s kladnými členy konverguje, existuje-li pro všechna  $k \geq k_0$  ( $k_0$  je vhodné přirozené číslo) takové  $q$ , které nezávisí na  $k$ , že platí*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1. \tag{1.3}$$

*Tato řada diverguje, jestliže*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \quad \text{pro všechna } k \geq k_0.$$

**Podílové kritérium v limitním tvaru:** *Nechť existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Potom:

- (i) je-li  $L < 1$ , daná řada konverguje;
  - (ii) je-li  $L > 1$ , daná řada diverguje;
  - (iii) je-li  $L = 1$ , nemůžeme tímto kritériem o případné konvergenci či divergenci rozhodnout.
- c) **Odmocninové (Cauchyovo) kritérium.** *Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  s kladnými členy konverguje, existuje-li pro všechna  $k \geq k_0$  ( $k_0$  je vhodné přirozené číslo) takové  $q$ , nezávislé na  $k$ , že platí*

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1. \quad (1.4)$$

Tato řada diverguje, jestliže

$$\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \quad \text{pro všechna } k \geq k_0.$$

**Odmocninové kritérium v limitním tvaru:** *Nechť existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

Potom:

- (i) je-li  $L < 1$ , daná řada konverguje;
  - (ii) je-li  $L > 1$ , daná řada diverguje;
  - (iii) je-li  $L = 1$ , nemůžeme tímto kritériem o případné konvergenci či divergenci rozhodnout.
- d) **Integrální kritérium.** *Nechť je dána řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  s kladnými členy, přičemž pro  $k \geq 1$  platí  $a_k = f(k)$ , kde  $f$  je vhodná funkce definovaná a nerostoucí na  $(1, \infty)$ . Potom řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje, je-li*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx < \infty.$$

Není-li tato limita konečná, řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverguje.

*Důkaz.* Důkazy provedeme pouze pro základní tvrzení; příslušné limitní verze jsou pak jejich technickým rozepsáním, které vynecháme.

a) Nechť  $s_n$  značí  $n$ -tý částečný součet řady  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  a  $S_n$   $n$ -tý částečný součet řady  $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ . Z předpokladu

$$a_k \leq b_k \quad \text{pro všechna } k \geq k_0$$

pak plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (1.5)$$

Je-li  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergentní, je na pravé straně (1.5) konečná limita. Z definice 1.4 a věty 1.8 odtud plyne konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Je-li řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergentní, je limita na levé straně (1.5) rovna  $\infty$ . Z definice 1.4 a věty 1.8 odtud plyne divergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

b) Z (1.3) plyne, že platí:  $a_{k_0+1} \leq q a_{k_0}$ ,  $a_{k_0+2} \leq q a_{k_0+1} \leq q^2 a_{k_0}$ ; obecně

$$a_{k_0+n} \leq q^n a_{k_0}, \quad 0 < q < 1.$$

Geometrická řada  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n a_{k_0}$  je konvergentní pro  $|q| < 1$ , takže podle srovnávacího kritéria je také konvergentní řada  $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$ ; odtud podle věty 1.8 plyne, že je řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergentní.

Je-li však  $a_{k+1}/a_k \geq 1$  pro  $k \geq k_0$ , potom  $a_{k+1} \geq a_k \geq a_{k_0} > 0$ , takže není splněna nutná podmínka konvergence (1.2) a řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  je divergentní.

c) Z (1.4) plyne  $a_k \leq q^k$  pro všechna  $k \geq k_0$ . Je-li  $q < 1$ , potom ze srovnávacího kritéria a věty 1.8 plyne konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Je-li však  $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$  pro všechna  $k \geq k_0$ , potom je  $a_k \geq 1$  a řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence (1.2).

d) Pro  $n$ -tý částečný součet řady platí

$$\begin{aligned} s_n - a_1 &= a_2 + a_3 + \dots + a_n = \int_1^2 a_2 dx + \int_2^3 a_3 dx + \dots + \int_{n-1}^n a_n dx \\ &\leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x) dx = \int_1^n f(x) dx, \end{aligned}$$

takže

$$s_n \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx + a_1 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Je-li limita na pravé straně konečná, potom je posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  ohraničená; protože je navíc neklesající, má limitu, takže řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  je konvergentní.

Nyní dokážeme druhou část tvrzení integrálního kritéria. Platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} a_k dx \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

Jestliže

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx = \infty,$$

potom také  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  a řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverguje.  $\square$

Vztah mezi limitním podílovým a limitním odmocninovým kritériem udává následující věta, kterou uvádíme bez důkazu.

■ **Věta 1.12.** *Existuje-li  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ , potom existuje také  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$  a obě limity si jsou rovný.*

**Příklady 1.13.** a) Zjistěte, pro která reálná  $p$  konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots.$$

**Řešení.** Pro  $p \leq 0$  není splněna nutná podmínka konvergence (1.2), a řada diverguje. Pro  $p > 0$  uijeme integrální kritérium. Zde je  $f(x) = x^{-p}$ . Pro  $p > 0$  je  $f$  klesající a kladná funkce na  $(1, \infty)$ . Pro  $p \neq 1$  platí

$$u(t) := \int_1^t x^{-p} dx = \frac{t^{-p+1}}{1-p} + \frac{1}{p-1}.$$

Pro  $p > 1$  je  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1/(p-1)$ , a daná řada tedy podle integrálního kritéria konverguje. Pro  $p < 1$  platí, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$  a řada diverguje.

Případ  $p = 1$  musíme z integračních důvodů posoudit zvlášť. Nejprve však poznamenejme, že pro  $p = 1$  je řada tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

a nazývá se řada *harmonická*. Název této řady plyne z toho, že každý její člen (kromě prvního) je harmonickým průměrem dvou sousedních členů, tj. platí

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}} \right).$$

Pomocí integrálního kritéria snadno určíme divergenci této řady. Platí totiž

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty.$$

Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$  tedy konverguje pro  $p > 1$  a diverguje pro  $p \leq 1$ . Přitom pro všechna  $p > 0$  je splněna nutná podmínka konvergence (1.2).

b) Rozhodněme o konvergenci či divergenci řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

*Řešení.* Protože  $k > \ln k$ , platí

$$\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k} \quad \text{pro všechna } k \geq 2.$$

Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  je harmonická, která podle části a) diverguje, takže podle porovnávacího kritéria řada  $\sum_{k=2}^{\infty} 1/\ln k$  také diverguje (přestože je splněna nutná podmínka konvergence, tedy podmínka věty 1.7).

c) Rozhodněme o konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k} = \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \dots$$

*Řešení.* Podobně jako v předcházejícím příkladu se nabízí užití porovnání zadané řady s řadou harmonickou, poněvadž platí

$$\sin \frac{1}{k} < \frac{1}{k} \quad \text{pro všechna } k \geq 1.$$

V tomto odhadu je však harmonická řada majorantní řadou, takže porovnávací kritérium neumožňuje o konvergenci zadané řady rozhodnout. Vyzkoušíme proto toto kritérium v jeho limitní podobě. Platí

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 > 0$$

(při výpočtu limity jsme užili substituci  $x = 1/k$ ), tedy daná řada diverguje podle limitního porovnávacího kritéria.

d) Rozhodněme o konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots$$

*Řešení.* Pomocí limitního podílového kritéria určíme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k+1} = 0.$$

Protože jest  $L = 0 < 1$ , řada konverguje.

e) Rozhodněme o konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} = 2 + 2 + \frac{8}{3} + 4 + \dots$$

*Řešení.* Pomocí limitního odmocninového kritéria dostáváme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = 2$  (neboť víme, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ ), a řada proto diverguje. Divergence této řady plyne také ze vztahu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{k} = \infty,$$

kteřý znamená nesplnění nutné podmínky konvergence.

**Poznámka 1.14 – odhad velikosti zbytku konvergentní řady s kladnými členy.** Necht'  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  je konvergentní řada s kladnými členy. Nelze-li stanovit hodnotu součtu  $s$  této řady přímo z definice, pak součet  $s$  aproximujeme hodnotou částečného součtu  $s_n$ , kde  $n$  je dosti veliké. V této souvislosti pak vzniká problém odhadu velikosti zbytku  $r_n$  (tedy odhadu chyby, které jsme se dopustili při náhradě součtu  $s$  hodnotou částečného součtu  $s_n$ ), příp. otázka stanovení počtu členů řady tak, aby hodnota  $s_n$  aproximovala hodnotu  $s$  s předepsanou přesností.

Odhad zbytku konvergentní řady s kladnými členy se obvykle provádí v závislosti na zvoleném kritériu zaručujícím konvergenci dané řady.

- a) Necht' řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje podle porovnávacího kritéria, tj.  $a_k \leq b_k$  pro všechna  $k \geq k_0$ , kde  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konverguje. Pak pro  $n$ -tý zbytek ( $n \geq k_0$ ) řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  platí

$$r_n \leq R_n,$$

kde  $R_n$  je  $n$ -tý zbytek řady  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

- b) Necht' řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje podle podílového kritéria, tj.  $a_{k+1}/a_k \leq q < 1$  pro všechna  $k \geq k_0$ . Pak pro  $n$ -tý zbytek ( $n \geq k_0$ ) této řady platí

$$r_n \leq a_n \frac{q}{1-q}. \quad (1.6)$$

- c) Necht' řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje podle odmocninového kritéria, tj.  $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$  pro všechna  $k \geq k_0$ . Pak pro  $n$ -tý zbytek ( $n \geq k_0$ ) této řady platí odhad

$$r_n \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

- d) Necht' řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje podle integrálního kritéria, kde  $f$  je příslušná funkce vystupující v podmínkách tohoto kritéria. Pak na základě nerovnosti

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx$$

lze snadno nahlédnout, že platí

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

**Příklady 1.15.** a) Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots$$

konverguje a odhadněme chybu, které se dopustíme při náhradě součtu  $s$  této řady hodnotou  $s_{10}$ .

*Řešení.* Konvergenci řady lze snadno ukázat např. užitím podílového nebo odmocninového kritéria, kde  $q = 1/2$ . Pro odhad chyby pak podle (1.6) platí

$$r_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k2^k} \leq a_{10} \frac{q}{1-q} = \frac{1}{10} 2^{-10} \doteq 0,000098.$$

Aproximujeme-li tedy hodnotu součtu  $s$  dané řady hodnotou částečného součtu

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k2^k} \doteq 0,693065,$$

pak chyba této aproximace nepřevyší hodnotu  $0,000098 < 10^{-4}$ . Později uvidíme, že přesná hodnota součtu  $s$  této řady činí  $s = \ln 2$ , viz vztah (3.6).

b) Určeme hodnotu součtu řady  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  s chybou menší než  $10^{-6}$ .

*Řešení.* Především poznamenejme, že podle integrálního kritéria uvedená řada konverguje (viz příklad 1.13a). Z odhadu zbytku uvedeného v poznámce 1.14 vyplývá, že

$$r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n}.$$

Odtud snadno

$$\frac{1}{n} \leq 10^{-6} \iff n \geq 10^6.$$

S požadovanou přesností tedy platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{k^2} \doteq 1,644934.$$

Později ukážeme, že přesná hodnota součtu této řady je  $\pi^2/6$  (viz příklad 4.21).

### 1.3 Kritérium konvergence pro alternující řady

Jak již bylo dříve uvedeno, kromě řad s kladnými členy se často setkáváme s tzv. alternujícími řadami, jejichž členy pravidelně střídají znaménko. Pro tyto řady nyní odvodíme jednoduché kritérium konvergence včetně odhadu velikosti zbytku.

■ **Věta 1.16 — Leibnizovo kritérium konvergence pro alternující řady.** *Nechť je dána alternující řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad (a_k > 0),$$

*která má tu vlastnost, že*

$$a_k \geq a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

*Potom nutnou a postačující podmínkou konvergence této řady je vztah*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0,$$

*tj. vztah (1.2). V případě konvergence alternující řady platí odhad zbytku ve tvaru*

$$|r_n| \leq a_{n+1}.$$

*Důkaz.* Vzhledem k větě 1.7 stačí dokázat dostatečnost uvedené podmínky. Z předpokladu  $a_k \geq a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) plyne

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \geq 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$  je neklesající posloupnost, pro kterou platí

$$s_{2n} \leq a_1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Protože ohraničená monotonní posloupnost je konvergentní, existuje nějaké číslo  $s$  s vlastností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s.$$

Každý lichý částečný součet můžeme psát ve tvaru  $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ . Odtud, s využitím (1.2), dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s,$$

tj. liché i sudé částečné součty mají tutéž limitu  $s$ . Odtud plyne, že samotná posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $s$ , takže daná alternující řada  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$  je konvergentní.

Podobným obratem dostaneme i odhad zbytku. Platí

$$\begin{aligned} (-1)^n r_n &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \end{aligned}$$

Všechny členy v závorkách jsou nezáporné, a po jejich vynechání tedy dostáváme

$$0 \leq (-1)^n r_n \leq a_{n+1}.$$

□

**Příklad 1.17.** Rozhodněme o konvergenci tzv. Leibnizovy řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

a odvoďme vzorec pro odhad velikosti zbytku.

*Řešení.* Posloupnost  $\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$  je klesající a má nulovou limitu. Řada tedy podle Leibnizova kritéria konverguje. Vzorec pro odhad zbytku je pak tvaru

$$|r_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Po sečtení např. prvních desíti členů řady tedy je  $s_{10} \doteq 0,645635$  a  $|r_{10}| \leq 0,091$ . Později uvidíme, že přesná hodnota součtu Leibnizovy řady činí  $s = \ln 2$ , což je stejná hodnota jako v případě součtu řady  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k2^k)$  z příkladu 1.16a). Rozdíl je však v rychlosti konvergence těchto řad. Zatímco v případě řady  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k2^k)$  jsme po sečtení prvních desíti členů řady obdrželi aproximaci  $s_{10} \doteq 0,693065$ , v případě Leibnizovy řady stejná aproximace dává  $s_{10} \doteq 0,645635$ . Přesná hodnota součtu obou řad přitom činí  $s = \ln 2 \doteq 0,693147$ .

## 1.4 Operace s číselnými řadami

V další části první kapitoly posoudíme vlastnosti číselných řad z hlediska aritmetických zákonů, které platí pro konečné součty. O skutečnosti, že s nekonečnými řadami nelze zacházet stejně jako s konečnými součty, nás přesvědčí následující jednoduchý příklad:

Uvažujme tzv. Grandiho řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots, \quad \text{tj. } a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, \dots$$

Tato řada osciluje, neboť  $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$ , tj. limita posloupnosti částečných součtů  $s_n$  neexistuje. Jestliže však Grandiho řadu uzavorkujeme jako

$$1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots, \quad \text{tj. } a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, \dots,$$

pak vzniklá řada konverguje, neboť  $s_n = 1$  pro všechna přirozená  $n$ , a součet s této řady je tedy roven jedné. Podobně snadno nahlédneme, že při uzavorkování tvaru

$$[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \dots, \quad \text{tj. } a_1 = 0, a_2 = 0, \dots$$

dostáváme opět konvergentní řadu, tentokrát však se součtem  $s = 0$ . Příčina tohoto zdánlivého rozporu tkví v tom, že jsme při našich úpravách použili asociativního zákona, který pro nekonečné řady obecně neplatí.

V následujících třech větách uvedeme přehled základních aritmetických operací s *konvergentními* nekonečnými řadami. Důkazy těchto tvrzení plynou ze známých vlastností limity součtu a součinu posloupností, a nebudeme je proto uvádět.

Základní operaci s nekonečnými řadami je součet dvou konvergentních řad:

■ **Věta 1.18.** *Mějme dvě konvergentní řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \beta$ . Pak je konvergentní i řada  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \alpha + \beta.$$

Další tvrzení lze chápat jako analogii distributivního zákona pro konečné součty:

■ **Věta 1.19.** *Jestliže řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje, pak pro libovolné  $c \in \mathbb{R}$  konverguje také řada  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$  a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Příklad Grandiho řady ilustroval skutečnost, že mezi členy nekonečné číselné řady nelze libovolně rozmístit závorky. Je-li však příslušná řada konvergentní (což Grandiho řada není), můžeme členy této řady libovolně uzávorkovat, aniž se změní její součet. Tato skutečnost je zformulována v následujícím tvrzení, které je analogií asociativního zákona pro konečné součty:

■ **Věta 1.20.** *Necht' řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

*konverguje a necht'  $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$  je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak konverguje i řada*

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \dots + a_{k_3}) + \dots$$

*a má též součet.*

**Příklad 1.21.** Dokažme konvergenci a určíme součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^k - 4^{k+1}}{6^k}.$$

**Řešení.** Řady  $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k/6^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$ , resp.  $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k/6^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k$  jsou konvergentní geometrické řady se součty  $s_1 = 2$ , resp.  $s_2 = 3$ . Podle vět 1.18 a 1.19 tedy konverguje i zadaná řada a její součet je roven  $s = 10 - 12 = -2$ .

Pozorný čtenář si jistě všiml, že mezi přehledem aritmetických operací, které platí pro konvergentní číselné řady, nebyla uvedena analogie komutativního zákona (tj. zákona o záměně členů, resp. přerovnání členů řady). Uveďme proto v této souvislosti následující příklad, který je zajímavým důsledkem věty 1.18 a věty 1.19.

**Příklad 1.22.** Uvažujme Leibnizovu řadu a označme její součet symbolem  $s$  (později uvidíme, že  $s = \ln 2$ ); je tedy

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (1.7)$$

Násobme vztah (1.7) číslem  $1/2$ . Podle věty 1.19 platí

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Protože přidáním libovolného počtu nul se limita částečných součtů nemění, platí

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \dots \quad (1.8)$$

Sečtením vztahů (1.7), (1.8) dostaneme podle věty 1.18:

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Na pravé straně je řada, která vznikne přerovnaním Leibnizovy řady tak, že vždy vezmeme nejprve dva kladné a pak jeden záporný člen. Takto přerovnaná řada má jiný součet než původní Leibnizova řada. Důvod tohoto paradoxu, který přísluší k tzv. paradoxům nekonečna, spočívá v definici součtu nekonečné řady jako limity posloupnosti částečných součtů. Poznamenejme ještě, že v celém textu chápeme termín přerovnaná řada v intuitivním smyslu, tedy že množiny všech členů původní a přerovnané řady jsou stejné, došlo však k záměně pořadí těchto členů (matematicky lze tuto skutečnost zachytit pomocí pojmu permutace množiny přirozených čísel).

Analogie komutativního zákona tedy pro konvergentní číselné řady obecně neplatí. K jeho platnosti je třeba zavést silnější vlastnost řady, tzv. *absolutní konvergence*. Kromě konvergence dané řady budeme v této souvislosti vyšetřovat také konvergenci řady tvořené absolutními hodnotami jednotlivých členů. Nejprve ukážeme, že z konvergence řady absolutních hodnot plyne i konvergence původní řady.

■ **Věta 1.23.** *Konverguje-li řada  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , potom konverguje také řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .*

*Důkaz.* Označme  $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$ ,  $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$ . Pak platí (ověřte na konkrétních číslech)

$$a_k = a_k^+ - a_k^-, \quad |a_k| = a_k^+ + a_k^-, \quad 0 \leq a_k^+ \leq |a_k|, \quad 0 \leq a_k^- \leq |a_k|.$$

Podle porovnávacího kritéria tedy z konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  plyne také konvergence řad  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$  a dokazované tvrzení nyní okamžitě plyne ze vztahu  $a_k = a_k^+ - a_k^-$  a vět 1.18 a 1.19.  $\square$

Opačná implikace neplatí, jak ukazuje příklad Leibnizovy řady  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$ . Tato řada je konvergentní, avšak řada  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  je divergentní harmonická řada. Má proto smysl zavést následující pojem:

**Definice 1.24 — absolutní a neabsolutní konvergence.** Konverguje-li spolu s řadou  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  také řada  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , říkáme, že řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje *absolutně*.

Konverguje-li pouze řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , kdežto řada  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  diverguje, říkáme, že řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje *neabsolutně* (nebo také *relativně*).

**Poznámky 1.25.** a) V případě řad s kladnými členy pojem konvergence splývá s pojmem absolutní konvergence.

b) K posouzení absolutní konvergence libovolné řady lze využít kritérií pro konvergenci řad s kladnými členy.

**Příklad 1.26.** Jako příklad neabsolutně konvergentní řady již byla uvedena Leibnizova řada. Příkladem absolutně konvergentní řady je řada  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k^2$ , jejíž konvergence plyne z Leibnizova kritéria a konvergence řady absolutních hodnot  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  plyne z integrálního kritéria (viz příklad 1.13a).

O přerovnávaní neabsolutně konvergentních řad platí tato obecná věta, která významně zobecňuje úvahy provedené v příkladu 1.23.

■ **Věta 1.27 — Riemannova.** *U neabsolutně konvergentních řad můžeme vhodným přerovnaním řady docílit toho, aby přerovnaná řada konvergovala k libovolnému předem zvolenému číslu, nebo aby divergovala ke  $\infty$  nebo  $-\infty$ , případně aby oscillovala.*

Ilustrujme tuto skutečnost (a naznačme tím zároveň princip důkazu) na příkladu Leibnizovy řady, o které víme, že konverguje neabsolutně. Zkonstruujeme takové přerovnání této řady, při kterém obdržíme např. součet  $s = 2$ .

Sčítáme nejprve kladné členy řady, dokud nebude příslušný částečný součet větší než 2 (proveditelnost tohoto kroku nám zaručí právě předpoklad neabsolutní konvergence dané řady). Dostáváme tedy

$$s_8 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{15} \doteq 2,0218.$$

Nyní přičteme první záporný člen, tj.  $-1/2$  a máme

$$s_9 = s_8 - \frac{1}{2} \doteq 1,5218.$$

Nyní opět přičítáme kladné členy, až částečný součet překročí 2. Tedy

$$s_{22} = s_9 + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{41} \doteq 2,0041.$$

Zařadíme-li další záporný člen, dostáváme

$$s_{23} = s_{22} - \frac{1}{4} \doteq 1,7541.$$

Lze snadno nahlédnout, že pokračováním této konstrukce obdržíme přerovnanou Leibnizovu řadu se součtem  $s = 2$ . Analogicky pak postupujeme v případech, kdy součtem  $s$  je libovolné reálné číslo, resp. kdy výsledkem přerovnání je divergentní nebo oscilující řada.

Pro absolutně konvergentní řady platí na rozdíl od Riemannovy věty následující tvrzení, které je analogií komutativního zákona pro konečné součty. Toto tvrzení uvádíme bez důkazu.

■ **Věta 1.28 — o přerovnávání řad.** *Je-li řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolutně konvergentní, nezmění se její součet žádným jejím přerovnáním.*

### Příklady k procvičení

**Cvičení 1.29.** Na základě definice ukažte konvergenci dané řady a určete její součet:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k}; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}; & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}; & \text{e) } \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right); & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2k^2}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $11/18$ ; b)  $1/2$ ; c)  $1/4$ ; d)  $\pi^2/16 - 1/2$ ; e)  $-\ln 2$ ; f)  $\pi/4$ .

**Cvičení 1.30.** Určete součet řady:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{7}\right)^k; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k}; & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - (-2)^k}{4^k}; \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right); & \text{e) } \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k}; & \text{f) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{5^k}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $-5/12$ ; b)  $3$ ; c)  $10/3$ ; d)  $11/2$ ; e)  $1/(1 - e^{-2})$ ; f)  $5/6$ .

**Cvičení 1.31.** Pomocí limitního podílového kritéria rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!}; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k 2^k}; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}; \quad e) \sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+1}}; \quad f) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin \frac{\pi}{2^k}.$$

*Výsledky.* a) Konverguje; b) diverguje; c) konverguje; d) konverguje; e) konverguje; f) konverguje.

**Cvičení 1.32.** Pomocí limitního odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci řady:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k(k+1)}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(2 + \frac{1}{k})^k};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k; \quad e) \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k\left(1 - \frac{2}{k}\right); \quad f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\operatorname{arctg}^k(1 + \frac{1}{k})}.$$

*Výsledky.* a) Konverguje; b) konverguje; c) konverguje; d) konverguje; e) diverguje; f) diverguje.

**Cvičení 1.33.** Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + 2}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2 + 2}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}; \quad e) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}; \quad f) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

*Výsledky.* a) Konverguje; b) diverguje; c) konverguje; d) konverguje; e) diverguje; f) konverguje.

**Cvičení 1.34.** Pomocí srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řady:

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^k}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2k};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{3k^2}; \quad e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2k}}; \quad f) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{tg} \frac{1}{k}.$$

*Výsledky.* a) Diverguje; b) konverguje; c) diverguje; d) konverguje; e) diverguje; f) konverguje.

**Cvičení 1.35.** Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řady:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{e^k}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \ln k}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4k};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}; \quad e) \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{1}{k}; \quad f) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{\ln^k k}.$$

*Výsledky.* a) Konverguje; b) konverguje; c) diverguje; d) konverguje; e) diverguje; f) konverguje.

**Cvičení 1.36.** Rozhodněte o konvergenci, resp. absolutní konvergenci řady:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right); \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k^3 + 1}};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k + \ln k}; \quad e) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg} \frac{\pi}{k^3}; \quad f) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{k^2}}{k!}.$$

*Výsledky.* a) Konverguje neabsolutně; b) konverguje neabsolutně; c) konverguje absolutně; d) konverguje neabsolutně; e) konverguje absolutně; f) osciluje.

**Cvičení 1.37.** Rozhodněte, kolik členů řady je třeba sečíst, aby částečný součet  $s_n$  approximoval součet  $s$  s chybou menší než  $10^{-4}$ .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + 1}; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}; & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\sqrt{k+1}}; \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}; & \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 + 1}; & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{1}{k}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $n > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi-10^{-4}}{2}\right) \approx 2 \cdot 10^4$ ; b)  $n > \sqrt{5000} \approx 71$ ; c)  $n > 6,4 \cdot 10^9$ ; d)  $n \geq 3$ ; e)  $n > 10^4$ ; f)  $n > 10^4$ .

**Cvičení 1.38.** Je dána harmonická řada  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ . Pomocí důkazu integrálního kritéria odvoďte vztah

$$\ln n < s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

Užitím tohoto vztahu rozhodněte, kolik členů řady je třeba sečíst, aby  $s_n > 100$ .

*Výsledek.*  $s_n > \ln n \Rightarrow \ln n > 100 \Rightarrow n > e^{100} \approx 2,7 \cdot 10^{43}$ , což je číslo větší než jeden septilion.

## 2 Funkční řady

V předcházející kapitole jsme uvažovali řady, jejichž členy byla reálná čísla. Nyní se budeme zabývat studiem obecnějšího případu, kdy členy řad tvoří reálné funkce, a dáme odpověď na následující otázky: Vznikne sečtením nekonečně mnoha funkcí opět funkce (příp. s jakým definičním oborem a jakými vlastnostmi)? Pokud ano, jak lze vzniklou funkci derivovat nebo integrovat?

### 2.1 Základní pojmy

**Definice 2.1.** Necht' v intervalu  $I$  je definována posloupnost funkcí  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ . *Funkční řadou* rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2.1)$$

Dosadíme-li za  $x$  určité číslo  $x_0 \in I$ , obdržíme z funkční řady (2.1) číselnou řadu tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots \quad (2.2)$$

Konverguje-li číselná řada (2.2), řekneme, že funkční řada (2.1) bodově konverguje (stručně konverguje) v bodě  $x_0$ .

**Definice 2.2.** Necht'  $I^* \subset I$  značí množinu všech těch čísel  $x$  z množiny  $I$ , pro která funkční řada (2.1) konverguje. Množinu  $I^*$  nazýváme *oborem bodové konvergence* funkční řady (2.1).

**Definice 2.3.** Funkci  $s_n$  definovanou vztahem

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

nazýváme  $n$ -tým částečným součtem funkční řady (2.1). Součtem funkční řady (2.1) rozumíme funkci

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad (2.3)$$

která je definována na množině  $I^*$  (tj. je definována pro všechna  $x$ , ve kterých existuje *konečná* limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ ). Potom píšeme

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I^*.$$

**Poznámka 2.4.** Analogicky jako u číselných řad zavádíme pojem  $n$ -tého zbytku  $r_n(x)$  funkční řady (2.1). Všimněme si také, že její  $n$ -tý částečný součet  $s_n(x)$  je definován v intervalu  $I$ , kdežto součet  $s(x)$  pouze na množině  $I^*$ .

Při určování oboru bodové konvergence  $I^*$  často s výhodou užíváme limitního podílového nebo odmocninového kritéria, která známe z předcházející kapitoly. Uveďme příslušné přeformulování např. limitního podílového kritéria pro posouzení bodové konvergence funkční řady (2.1):

Nechť  $x_0 \in I$  a necht' existuje limita

$$L(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f_{k+1}(x_0)|}{|f_k(x_0)|}.$$

Potom:

- (i) je-li  $L(x_0) < 1$ , daná funkční řada bodově konverguje (dokonce absolutně) v  $x_0$ ;
- (ii) je-li  $L(x_0) > 1$ , daná funkční řada nekonverguje v  $x_0$ ;
- (iii) je-li  $L(x_0) = 1$ , nemůžeme o bodové konvergenci v  $x_0$  rozhodnout.

Dodejme ještě, že v případě  $L(x_0) = 1$  obvykle postupujeme tak, že dané  $x_0$  dosadíme do (2.1) a pomocí jiného vhodného kritéria posoudíme konvergenci vzniklé číselné řady.

**Příklad 2.5.** Určeme obor bodové konvergence řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$$

**Řešení.** Všechny funkce  $f_k(x) = x^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) jsou definovány v  $I = (-\infty, \infty)$ . V bodě  $x = 0$  řada zřejmě konverguje, uvažujme proto libovolné nenulové  $x_0 \in I$ . Platí

$$\frac{|f_{k+1}(x_0)|}{|f_k(x_0)|} = \left| \frac{x_0^{k+1}}{x_0^k} \right| = |x_0|,$$

tedy podle limitního podílového kritéria konverguje řada  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  pro  $|x| < 1$ , tj. v intervalu  $(-1, 1)$ . Konvergenci v krajních bodech, kdy je příslušná limita rovna jedné, posoudíme jejich dosazením do dané řady. Pro  $x = 1$  dostáváme divergentní řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$  a pro  $x = -1$  dostáváme oscilující řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ . Obor bodové konvergence je tedy tvaru  $I^* = (-1, 1)$ , přičemž konvergence je absolutní.

Všimněme si navíc, že uvedená funkční řada je řadou geometrickou (s kvocientem  $q = x$ ). Podle vzorce pro součet geometrické řady (viz příklad 1.5a)) tedy platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

**Příklad 2.6.** Určeme obor bodové konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{k} = \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{\ln^3 x}{3} + \dots$$

**Řešení.** Všechny funkce

$$f_k(x) = \frac{\ln^k x}{k}$$

jsou definovány v intervalu  $I = (0, \infty)$ . Necht'  $x_0 \in I$ . Platí

$$\sqrt[k]{|f_k(x_0)|} = \sqrt[k]{\frac{|\ln^k x_0|}{k}} = |\ln x_0| \frac{1}{\sqrt[k]{k}}.$$

Protože  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ , dostáváme

$$L(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k(x_0)|} = |\ln x_0|,$$

a podle limitního odmocninového kritéria řada konverguje pro  $|\ln x_0| < 1$  a nekonverguje pro  $|\ln x_0| > 1$ . Dosazením hodnoty  $\ln x_0 = 1$  dostáváme divergentní harmonickou řadu, a dosazením hodnoty  $\ln x_0 = -1$  pak konvergentní Leibnizovu řadu. Vyšetřovaná řada tedy konverguje, právě když  $\ln x_0 \in \langle -1, 1 \rangle$ . Protože  $\ln \frac{1}{e} = -1$ ,  $\ln e = 1$ , je obor bodové konvergence interval tvaru  $I^* = \langle e^{-1}, e \rangle$ .

Následující příklad ukazuje, že obor bodové konvergence nemusí být nutně interval.

**Příklad 2.7.** Určeme obor bodové konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \dots$$

*Řešení.* Analogickým postupem jako v příkladu 2.5 lze ověřit, že daná řada konverguje, právě když  $|\cos x| < 1$ . Tato nerovnost je splněna pro všechna reálná  $x$ , s výjimkou celočíselných násobků  $\pi$ . Tedy

$$I^* = (-\infty, \infty) \setminus \{k\pi, k \text{ je celé číslo}\}.$$

## 2.2 Vlastnosti součtů funkčních řad

Jednou ze základních otázek v teorii funkčních řad je problém, nakolik se některé základní vlastnosti konečných součtů přenášejí i na součty nekonečné. Zajímát se budeme především o zachování tří následujících vlastností, které dobře známe z diferenciálního počtu:

- 1) Jsou-li funkce  $f_1, \dots, f_n$  spojité na  $I$ , potom je na  $I$  spojité také jejich součet.
- 2) Integrál ze součtu funkcí je roven součtu integrálů těchto funkcí:

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx.$$

- 3) Derivace součtu je rovna součtu derivací:

$$\left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^n f_k'(x).$$

Později ukážeme, že nekonečné funkční řady tyto tři vlastnosti obecně nemají, i když jsou konvergentní v intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Proto je třeba zavést silnější typ konvergence funkčních řad, tzv. *stejněměrnou konvergenci*, jejíž splnění umožní přenést požadované vlastnosti i na nekonečné součty. Těmito otázkami se nyní budeme zabývat.

Protože jsme součet funkční řady zavedli jako limitu posloupnosti částečných součtů, uvedeme nejprve pojem stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

**Definice 2.8.** Říkáme, že posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  funkcí  $s_n$  konverguje stejnoměrně na množině  $M$  k funkci  $s$ , existuje-li k libovolnému  $\varepsilon > 0$  přirozené číslo  $N(\varepsilon)$  (závislé pouze na  $\varepsilon$  a nikoliv na  $x$ ) takové, že pro všechna přirozená  $n \geq N(\varepsilon)$  a pro všechna  $x \in M$  platí nerovnost

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Potom píšeme

$$s_n(x) \rightrightarrows s(x), \quad x \in M. \quad (2.5)$$

**Poznámka 2.9.** Porovnejme matematický rozdíl mezi právě uvedenou stejnoměrnou konvergencí posloupnosti funkcí  $s_n$  k funkci  $s$  a výše zmíněnou klasickou bodovou konvergencí, která je reprezentována vztahem (2.3) a která se na rozdíl od (2.5) obvykle zapisuje ve tvaru

$$s_n(x) \rightarrow s(x), \quad x \in I^*.$$

V případě bodové konvergence podle definice limity požadujeme, aby k libovolnému  $\varepsilon > 0$  a libovolnému  $x \in I^*$  existovalo číslo  $N(\varepsilon, x)$  (závislé na  $\varepsilon$  a  $x$ ) takové, že pro všechna  $n \geq N(\varepsilon, x)$  platí nerovnost (2.4).

Srovnáme-li tedy oba typy konvergence posloupnosti funkcí, pak snadno vidíme, že v definici stejnoměrné konvergence závisí číslo  $N$  pouze na volbě čísla  $\varepsilon > 0$ , kdežto v definici bodové konvergence je  $N$  závislé i na bodu  $x$ . Proto tedy je stejnoměrná konvergence silnější typ konvergence v tom smyslu, že ze stejnoměrné konvergence vyplývá bodová konvergence, přičemž opak obecně neplatí.

V dalším uvedeme příklad posloupnosti spojitých funkcí, která konverguje k nespojitě funkci. Současně ukážeme, že konvergence této posloupnosti není stejnoměrná.

**Příklad 2.10.** Uvažujme posloupnost funkcí

$$s_n(x) = x^n - 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

kteří jsou spojitě v  $I = (-\infty, \infty)$ . Nejprve určíme množinu všech  $x$ , pro která  $s_n(x)$  konverguje při  $n \rightarrow \infty$ .

Pro  $x > 1$  je zřejmé

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \infty,$$

kdežto pro  $x < -1$  tato limita neexistuje (neboť  $s_{2k+1}(x) \rightarrow -\infty$ ,  $s_{2k}(x) \rightarrow \infty$ ). Dále

$$s_n(1) = 0 \text{ pro všechna } n, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(1) = 0,$$

kdežto  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(-1)$  neexistuje, protože  $s_{2k+1}(-1) = -2$  a  $s_{2k}(-1) = 0$ .

Je-li konečně  $x \in (-1, 1)$ , potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = -1.$$

Máme tedy tento výsledek:

Posloupnost funkcí  $s_n(x) = x^n - 1$  konverguje při  $n \rightarrow \infty$  právě tehdy, když  $x \in (-1, 1)$ , přičemž limitní funkce  $s$  je pak tvaru

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1, 1), \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Zjistili jsme tedy, že posloupnost *spojitých* funkcí  $s_n(x) = x^n - 1$  konverguje na svém oboru bodové konvergence  $I^* = (-1, 1)$  k *nespojitě* funkci  $s$ , která má bod nespojitosti v  $x = 1$  (viz obrázek 2.1).

Nyní ukážeme, že posloupnost funkcí (2.6) nekonverguje stejnoměrně k funkci  $s(x) = -1$  na  $(-1, 1)$ . Zvolme

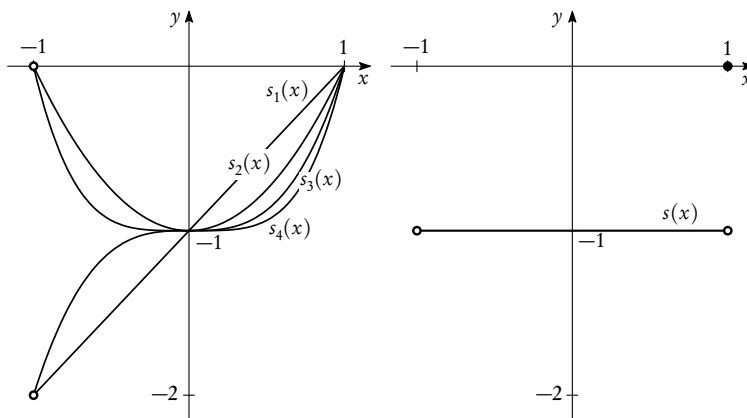
$$x_n = \sqrt[n]{\frac{3}{4}} \in (-1, 1).$$

Potom je

$$|s(x_n) - s_n(x_n)| = \left| -1 - \frac{3}{4} + 1 \right| = \frac{3}{4}.$$

Vidíme, že pro  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$  je vždycky

$$|s(x_n) - s_n(x_n)| = \frac{3}{4} > \varepsilon.$$



Obrázek 2.1: Posloupnost spojitých funkcí konvergující k nespojité funkci

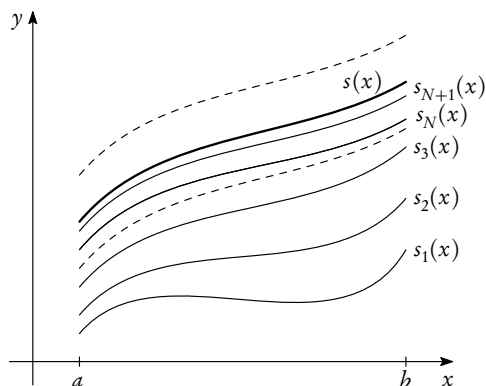
Z toho plyne, že pro  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$  neexistuje žádné  $N$  takové, aby pro *všechna*  $n \geq N$  a pro *všechna*  $x \in (-1, 1)$  platil vztah (2.4) z definice 2.8. Proto posloupnost (2.6) není na intervalu  $(-1, 1)$  stejnoměrně konvergentní.

**Poznámka 2.11.** Abychom si geometricky interpretovali definici 2.8, přepíšme nerovnost (2.4) na tvar

$$s(x) - \varepsilon < s_n(x) < s(x) + \varepsilon, \quad x \in M.$$

To znamená, že pro dosti velká  $n$  (tj. pro  $n \geq N(\varepsilon)$ ) zůstávají všechny funkční hodnoty  $s_n(x)$  pro  $x \in M$  uvnitř pásu ohraničeného křivkami  $y = s(x) - \varepsilon$  a  $y = s(x) + \varepsilon$ .

Neformální „geometrická“ definice stejnoměrné konvergence by tedy mohla znít takto: Posloupnost  $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  funkcí  $s_n(x)$  konverguje k funkci  $s(x)$  na množině  $M$  stejnoměrně, jestliže k libovolně úzkému pásu obsahujícímu funkci  $s(x)$  vždy existuje takový člen  $s_N(x)$  dané posloupnosti, že tento člen a všechny následující (tj.  $s_{N+1}(x), s_{N+2}(x), \dots$ ) leží v tomto pásu pro všechna  $x \in M$ .



Obrázek 2.2: Ještě ke stejnoměrné konvergenci

Z obrázků 2.1 a 2.2 (kde množina  $M$  byla zobrazena jako interval s krajními body  $a, b$ ) snadno vidíme, že konvergence posloupnosti funkcí  $x^n - 1$  vskutku nemůže být na intervalu  $(-1, 1)$  stejnoměrná.

Když jsme si řádně objasnili pojem stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí, přejdeme k definici stejnoměrné konvergence funkční řady.

**Definice 2.12.** Říkáme, že funkční řada (2.1) *konverguje stejnoměrně* na množině  $M$  k funkci  $s$ , když posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  jejich částečných součtů konverguje stejnoměrně na  $M$  k funkci  $s$ .

**Označení 2.13.** Označme  $I^{**} \subset I$  „největší“ množinu, na které funkční řada (2.1) konverguje stejnoměrně k funkci  $s$ . Pokud  $I^{**}$  existuje a není prázdná, nazýváme ji *oborem stejnoměrné konvergence* funkční řady (2.1) a píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Rightarrow s(x), \quad x \in I^{**}.$$

**Příklad 2.14.** Uvažujme funkční řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1}) = (x-1) + (x^2-x) + (x^3-x^2) + \dots \quad (2.7)$$

Pro její  $n$ -tý částečný součet platí

$$s_n(x) = (x-1) + (x^2-x) + (x^3-x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) = x^n - 1,$$

tj.  $n$ -tý částečný součet funkční řady (2.7) je dán vztahem (2.6). Z předchozích příkladů a definic plyne, že funkční řada (2.7) konverguje (nikoliv však stejnoměrně) v intervalu  $I^* = (-1, 1)$  k nespojitě funkci

$$s(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1, 1), \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

V aplikacích často potřebujeme pouze rozhodnout, zdali je daná funkční řada stejnoměrně konvergentní; její součet nepotřebujeme přitom znát. Uvedeme proto následující kritérium stejnoměrné konvergence.

■ **Věta 2.15 — Weierstrassovo kritérium.** *Funkční řada  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  je stejnoměrně konvergentní na množině  $M$ , jestliže k ní existuje majorantní konvergentní číselná řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , tj. konvergentní řada, jejímiž členy jsou konstanty  $a_k$  splňující nerovnosti*

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \text{pro všechna } x \in M \text{ a všechna } k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

*Důkaz.* Máme dokázat, že z (2.8) a z konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  plyne stejnoměrná konvergence funkční řady  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ .

Ze vztahu (2.8) vyplývá, že řada  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  konverguje absolutně v každém bodě  $x \in M$ . Zřejmě tedy konverguje i řada  $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ , kde  $n$  je libovolné přirozené číslo. Je však

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n^*, \quad x \in M,$$

kde  $r_n^*$  je zbytek řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Podle věty 1.8 tedy platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^* = 0$ . Zvolíme-li  $\varepsilon > 0$  libovolné, pak lze nalézt přirozené číslo  $N(\varepsilon)$  takové, že  $r_n^* < \varepsilon$  pro všechna  $n \geq N$ . Odtud  $|r_n(x)| < \varepsilon$  pro všechna  $n \geq N$  a všechna  $x \in M$ .  $\square$

**Poznámka 2.16.** Právě dokázané Weierstrassovo kritérium se týká pouze absolutně stejnoměrně konvergentních funkčních řad. Pro neabsolutně stejnoměrně konvergentní řady existují složitější kritéria (např. Dirichletovo). Poznamenejme rovněž, že hledáme-li obor stejnoměrné konvergence  $I^{**}$  dané funkční řady (tedy „největší“ množinu, na které tato řada konverguje stejnoměrně), pak Weierstrassovo kritérium je třeba doplnit dodatečnými obraty prokazujícími, že vně množiny  $M$  již vyšetřovaná řada stejnoměrně nekonverguje.

**Příklad 2.17.** Pomocí Weierstrassova kritéria dokážeme, že funkční řada (2.7) stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném intervalu  $\langle -1/r, 1/r \rangle$ , kde  $r > 1$ , jinak je  $r$  libovolné. Podle (2.7) platí

$$|f_k(x)| = |x^k - x^{k-1}| \leq |x^k| + |x^{k-1}| \leq \frac{1}{r^k} + \frac{1}{r^{k-1}}, \quad x \in \left\langle -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Protože  $1/r < 1$ , jsou geometrické řady  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/r^k$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/r^{k-1}$  konvergentní. Podle věty 1.18 je i jejich součet konvergentní řada. Tedy z Weierstrassova kritéria plyne, že řada (2.7) je stejnoměrně konvergentní na intervalu  $\langle -1/r, 1/r \rangle$ ,  $r > 1$ .

V následujících dvou větách uvedeme tři základní vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad, které nám především umožní tyto nekonečné funkční řady derivovat, resp. integrovat člen po členu. Věty uvádíme bez důkazů.

■ **Věta 2.18 — o spojitosti a integraci funkční řady.** *Nechť funkce  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) jsou spojité v intervalu  $I$  a nechť funkční řada  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  stejnoměrně konverguje k funkci  $s$  na intervalu  $J \subset I$ , tj.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Rightarrow s(x), \quad x \in J.$$

Potom platí:

1. Funkce  $s$  je spojitá na intervalu  $J$ .
2. Řadu  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  lze integrovat člen po členu na libovolném intervalu  $\langle a, b \rangle \subset J$ , tj.

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^b f_k(x) dx \right).$$

Podobným způsobem zformulujeme i tvrzení o derivování funkční řady. Předpoklady zaručující požadovanou vlastnost jsou o něco komplikovanější, než tomu bylo v případě integrace.

■ **Věta 2.19 — o derivování funkční řady.** *Nechť funkce  $f_k, f'_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) jsou spojité na intervalu  $I$  a nechť na intervalu  $J \subset I$  platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Rightarrow s(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) \Rightarrow \sigma(x), \quad x \in J.$$

Potom lze řadu  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  derivovat na  $J$  člen po členu, tj. platí

$$s'(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = \sigma(x), \quad x \in J.$$

**Poznámka 2.20.** Derivování a integrování člen po členu tedy zobecňuje jednu ze základních pouček diferenciálního a integrálního počtu, totiž že derivace (integrál) součtu konečně mnoha funkcí je součtem derivací (integrálů) jednotlivých sčítanců. Za výše uvedených předpokladů tedy tyto dvě vlastnosti platí i pro součty nekonečně mnoha funkcí.

**Příklad 2.21.** Funkce  $s$  je dána vztahem

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k} = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 3x}{8} + \dots$$

Ukažme, že  $s$  je definovaná a spojitá pro všechna reálná  $x$ , má zde derivace všech řádů, a vypočítáme  $s'(0)$ .

*Řešení.* Zřejmě platí

$$|f_k(x)| = \left| \frac{\sin kx}{2^k} \right| \leq \left( \frac{1}{2} \right)^k, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad k = 1, 2, \dots$$

Majorantní číselná řada  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$  konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria daná funkční řada konverguje stejnoměrně na celé reálné ose. Tedy  $I^* = I^{**} = (-\infty, \infty)$ , a odtud také plyne pomocí věty 2.18 spojitost funkce  $s$  v každém bodě  $x \in \mathbb{R}$ .

Nyní ověříme, zda na  $(-\infty, \infty)$  konverguje stejnoměrně také řada  $m$ -tých derivací  $f_k^{(m)}(x)$ , a to pro libovolné  $m = 1, 2, \dots$ . Vskutku,

$$|f_k^{(m)}(x)| = \left| \frac{(\sin kx)^{(m)}}{2^k} \right| \leq \frac{k^m}{2^k}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad m = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

Konvergenzi majorantní řady  $\sum_{k=1}^{\infty} k^m / 2^k$  ověříme snadno užitím limitního podílového kritéria. Tedy podle Weierstrassova kritéria a věty 2.19 derivace  $s^{(m)}(x)$  existuje pro libovolné přirozené  $m$  na celé reálné ose a platí

$$s^{(m)}(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k} \right)^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin kx)^{(m)}}{2^k}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně pro  $x = 0$  a  $m = 1$  máme

$$s'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Výslednou hodnotu jsme tedy obdrželi ve formě součtu číselné řady. Poněvadž se nejedná o řadu geometrickou, určení této hodnoty se zdá být možné pouze v přibližném tvaru. V další kapitole však ukážeme, že pomocí derivování a integrování speciálních funkčních řad lze odvodit vztahy pro součty některých negeometrických číselných řad. Speciálně pak v příkladu 3.12 uvidíme, že  $s'(0) = 2$ .

**Příklad 2.22.** Funkce  $s$  je definována vztahem

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{kx}} = e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \dots, \quad x > 0.$$

Ukažme, že  $s$  je definovaná a spojitá na  $(0, \infty)$ , a vypočtěme  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} s(x) dx$ .

*Řešení.* Nejprve ukážeme, že daná funkční řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu  $\langle \omega, \infty \rangle$ , kde  $\omega > 0$  je libovolné reálné číslo. Zřejmě

$$|f_k(x)| = \left| \frac{k}{e^{kx}} \right| \leq \left| \frac{k}{e^{k\omega}} \right|, \quad x \in \langle \omega, \infty \rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Majorantní číselná řada konverguje podle limitního odmocninového kritéria, neboť  $e^\omega > 1$ . Podle Weierstrassova kritéria daná řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu  $\langle \omega, \infty \rangle$ , a součtová funkce  $s$  je podle věty 2.18 spojitá na  $(0, \infty)$ . Stejnomořná konvergence řady umožňuje záměnu sumace a integrace, a platí tedy

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} s(x) dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} k e^{-kx} dx = - \sum_{k=1}^{\infty} [e^{-kx}]_{\ln 2}^{\ln 3} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} (3^{-k} - 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^k = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Poznámka 2.23.** V dalších dvou kapitolách se budeme zabývat dvěma speciálními typy funkčních řad, které mají rozsáhlé využití v dalších partiích matematiky a aplikovaných věd. Nejprve se zaměříme na řady mocninné, jejichž členy jsou mocninné funkce s nezáporným celočíselným exponentem. Poté budeme studovat řady trigonometrické, což jsou funkční řady se členy tvořenými lineárními kombinacemi sinů a kosinů. Kromě otázek konvergence nás bude zajímat, za jakých podmínek lze danou funkci vyjádřit ve tvaru součtu vhodné mocninné, resp. trigonometrické řady.

## Příklady k procvičení

**Cvičení 2.24.** Určete obor bodové konvergence řady:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\sqrt{k}}; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}; & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}; \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}; & \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sin \frac{x}{2^k}; & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{e^{kx}}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $\langle -1, 1 \rangle$ ; b)  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ; c)  $(1, \infty)$ ; d)  $x \neq -1, x \neq 1$ ; e)  $(-2, 2)$ ; f)  $(0, \infty)$ .

**Cvičení 2.25.** Určete obor stejnoměrné konvergence řady:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + k^2}; & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 x^2}}{k^2}; \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k}; & \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}; & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctg kx}{\sqrt{k!}}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $(-\infty, \infty)$ ; b)  $(-\infty, \infty)$ ; c)  $(-\infty, \infty)$ ; d) neexistuje, řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu  $\langle \omega, \infty \rangle$ ,  $\omega > 1$ ; e)  $\langle -1, 1 \rangle$ ; f)  $(-\infty, \infty)$ .

**Cvičení 2.26.** Určete, pro která reálná  $x$  je funkce  $s$  spojitá:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)}; & \text{b) } s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}; \\ \text{c) } s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}; & \text{d) } s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + k^3}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $x \in (-\infty, \infty)$ ; b)  $x \in \langle 0, \infty \rangle$ ; c)  $x \in (-\infty, \infty)$ ; d)  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**Cvičení 2.27.** Určete obor bodové konvergence a součet řady:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \sin^k x; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}; & \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \ln^k(2x); \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}; & \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k^k}; & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{kx}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $\sin x / (1 - \sin x)$ ,  $x \neq \pi/2 + k\pi$ , kde  $k$  je celé číslo; b)  $e^x / (1 - e^x)$ ,  $x < 0$ ; c)  $1 / (1 + \ln 2x)$ ,  $x \in (\frac{1}{2e}, \frac{e}{2})$ ; d)  $-\ln(1-x)$ ,  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ ; e)  $(x+x^2)/(1-x)^3$ ,  $x \in (-1, 1)$ ; f)  $-\frac{1}{x} \ln(1-e^x)$ ,  $x < 0$ .

**Cvičení 2.28.** Ukažte, že funkce  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k3^{k-1} x^{k-1}$  je spojitá v intervalu  $(-1/3, 1/3)$ , a vyčíslete  $\int_0^{\frac{1}{8}} s(x) dx$ .

*Výsledky.*  $1/5$ .

**Cvičení 2.29.** Ukažte, že funkce  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(k^4 + x^2)$  je spojitá na celé reálné ose, a využitím vztahu  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  vyčíslete  $\int_0^{\infty} s(x) dx$ .

*Výsledky.*  $\pi^3/12$ .

**Cvičení 2.30.** Ukažte, že funkce  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k / (k \cdot k!)$  je spojitá na celé reálné ose a má zde derivace všech řádů.

### 3 Mocninné a Taylorovy řady

Mocninné řady jsou nejjednodušším speciálním případem funkčních řad. V souvislosti s jejich studiem zodpovíme následující otázky: Jaká je struktura oboru bodové konvergence mocninných řad? Jak se tyto řady derivují, resp. integrují? Za jakých podmínek lze danou funkci zapsat ve tvaru součtu vhodné mocninné řady? Jak takový zápis najít a k čemu může být užitečný?

#### 3.1 Mocninné řady a jejich základní vlastnosti

**Definice 3.1.** *Mocninnou řadou se středem v bodě  $x_0$  rozumíme funkční řadu tvaru*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots, \quad (3.1)$$

kde  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) jsou konstanty, které nazýváme *koeficienty řady*.

Mocninná řada se středem v  $x_0 = 0$  je tedy funkční řada tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Částečné součty každé mocninné řady jsou polynomy, a lze proto očekávat, že tyto řady budou mít jisté jednoduché vlastnosti. První z nich je struktura oboru bodové konvergence. Zatímco v případě obecných funkčních řad může být obor bodové konvergence komplikovaná množina (nebo naopak i prázdná množina), struktura oboru bodové konvergence mocninných řad je velmi jednoduchá: je to buď jednoprvková množina obsahující střed dané mocninné řady, nebo interval konečné délky symetrický kolem středu (s případnou výjimkou krajních bodů), nebo celá reálná osa. Speciálně tedy každá mocninná řada konverguje ve svém středu, což lze velmi snadno ověřit dosazením  $x = x_0$  do dané řady.

V další části tyto tři varianty odvodíme a rozebereme. Základem našich úvah je

■ **Věta 3.2 — Abelova.** *Konverguje-li mocninná řada (3.1) v bodě  $x = x_1 \neq x_0$ , potom konverguje absolutně v každém  $x$ , pro které je  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ . Nekonverguje-li tato řada v bodě  $x = x_2$ , potom nekonverguje v žádném  $x$ , pro které je  $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$ .*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti položíme  $x_0 = 0$ . Necht'  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  konverguje v bodě  $x_1 \neq 0$ . Potom je číselná řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$  konvergentní, a proto podle nutné podmínky konvergence je  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k x_1^k = 0$ . Tedy posloupnost  $\{a_k x_1^k\}_{k=0}^{\infty}$  je ohraničená, tj. existuje  $M > 0$  takové, že

$$|a_k x_1^k| < M, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Odtud plyne

$$|a_k x^k| = \left| a_k x_1^k \left( \frac{x}{x_1} \right)^k \right| < M \left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| = M r^k,$$

kde  $r = |x/x_1|$ . Je-li  $|x| < |x_1|$ , je  $r < 1$  a geometrická řada  $\sum_{k=0}^{\infty} M r^k$  je konvergentní. Proto řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  absolutně konverguje pro  $|x| < |x_1|$ .

Necht' nyní  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  nekonverguje v bodě  $x = x_2$ . Zvolme  $x_3$  takové, že  $|x_3| > |x_2|$ . Kdyby byla řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_3^k$  konvergentní, musela by být konvergentní i řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ , jak plyne z předchozí části věty. To by byl spor. Proto řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_3^k$  nekonverguje, což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Z Abelovy věty vyplývá

■ **Věta 3.3 — o poloměru konvergence.** *Necht' mocninná řada (3.1) konverguje alespoň v jednom bodě  $x_1 \neq x_0$ . Potom existuje (konečné nebo nekonečné) číslo  $R > 0$  takové, že daná řada konverguje (dokonce absolutně) v každém bodě otevřeného intervalu  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , kdežto pro  $x$  ležící vně tohoto intervalu, tj. splňující  $|x - x_0| > R$ , nekonverguje.*

**Definice 3.4.** Číslo  $R$  z předcházející věty se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady (3.1).

**Poznámky 3.5.** a) V koncových bodech intervalu  $(x_0 - R, x_0 + R)$  může řada (3.1) konvergovat (absolutně nebo relativně), případně divergovat nebo oscilovat. Situaci v těchto krajních bodech proto musíme vždy vyšetřit zvlášť.

b) Konverguje-li řada (3.1) jen pro  $x = x_0$ , potom klademe  $R = 0$ .

Nyní uvedeme dvě kritéria, pomocí kterých lze určit poloměr konvergence  $R$ . Tato kritéria jsou dokazována pomocí limitního podílového, resp. limitního odmocninového kritéria, a formálně se proto těmto kritériím podobají.

■ **Věta 3.6.** *Necht' existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}. \quad (3.2)$$

Potom pro poloměr konvergence mocninné řady (3.1) platí

$$R = \frac{1}{\rho}.$$

Přitom pro  $\rho = \infty$  klademe  $R = 0$  a pro  $\rho = 0$  klademe  $R = \infty$ .

*Důkaz.* Podle podílového limitního kritéria bude řada (3.1) konvergovat (absolutně) pro ta  $x$ , pro něž je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}}{a_k(x - x_0)^k} \right| < 1 \quad (x \neq x_0). \quad (3.3)$$

Podle (3.2) je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}}{a_k(x - x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x - x_0| = \rho |x - x_0|.$$

Je-li  $0 < \rho < \infty$ , potom vztah (3.3) je splněn pro ta  $x$ , pro která

$$|x - x_0| < \frac{1}{\rho}.$$

Naopak, řada (3.1) nekonverguje pro ta  $x$ , pro něž  $|x - x_0| > 1/\rho$  (důvodem je mimo jiné nesplnění nutné podmínky konvergence). Tedy vskutku  $R = 1/\rho$ .

Je-li  $\rho = 0$ , potom vidíme, že vztah (3.3) je splněn pro každé  $x$ ; je-li  $\rho = \infty$ , není splněna nutná podmínka konvergence, a to pro žádné  $x \neq x_0$ .  $\square$

Podobně se odvodí odmocninová analogie předcházející věty.

■ **Věta 3.7.** *Necht' existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Potom pro poloměr konvergence mocninné řady (3.1) platí

$$R = \frac{1}{\rho}.$$

Přitom pro  $\rho = \infty$  klademe  $R = 0$  a pro  $\rho = 0$  klademe  $R = \infty$ .

**Příklady 3.8.** a) Určeme poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k!} = x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{27}{3!}x^3 + \dots$$

*Řešení.* Daná mocninná řada má střed  $x_0 = 0$  a koeficienty  $a_k = k^k/k!$ . Její poloměr konvergence určíme pomocí věty 3.6. Nejprve upravíme výraz

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left| \frac{(k+1)^{k+1} k!}{(k+1)! k^k} \right| = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left( \frac{k+1}{k} \right)^k.$$

Nyní připomeňme známý vztah

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k+p}{k} \right)^k = e^p \quad \text{pro všechna reálná } p.$$

Pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k+1}{k} \right)^k = e,$$

a tedy  $R = 1/e$ .

b) Stanovme obor bodové konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k8^k} = \frac{x-1}{8} + \frac{(x-1)^2}{128} + \frac{(x-1)^3}{1536} + \dots$$

*Řešení.* Tato mocninná řada má střed  $x_0 = 1$  a koeficienty  $a_k = 1/(k8^k)$ . Protože platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k8^k}} = \frac{1}{8} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{8},$$

jest  $R = 8$ . Daná mocninná řada tedy konverguje uvnitř intervalu s krajními body  $x_0 - R = -7$ ,  $x_0 + R = 9$  a nekonverguje vně tohoto intervalu. O konvergenci v krajních bodech rozhodneme dosazením.

Pro  $x = 9$  dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k}{k8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots,$$

což je divergentní harmonická řada. Pro  $x = -7$  pak máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-8)^k}{k8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots,$$

tedy konvergentní Leibnizovu řadu. Oborem bodové konvergence dané mocninné řady je proto interval  $I^* = \langle -7, 9 \rangle$ .

Když jsme vyjasnili otázku struktury a praktického určení oboru bodové konvergence mocninných řad, zaměříme se na diskusi jejich dalších významných vlastností, zejména derivování a integrování. Z předcházející kapitoly víme, k že derivování a integraci mocninných řad člen po členu je třeba posoudit otázku stejnoměrné konvergence.

■ **Věta 3.9 — o stejnoměrné konvergenci mocninných řad.** *Má-li mocninná řada (3.1) poloměr konvergence  $R > 0$ , potom konverguje stejnoměrně (a také absolutně) na každém uzavřeném podintervalu ležícím uvnitř intervalu  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .*

Užitím předcházejícího tvrzení lze v kombinaci s výsledky vět 2.18 a 2.19 odvodit následující základní vlastnosti mocninných řad.

■ **Věta 3.10** — o spojitosti, derivování a integraci mocninných řad. Má-li mocninná řada (3.1) poloměr konvergence  $R > 0$  a součet  $s$ , pak platí:

1. Funkce  $s$  je spojitá v otevřeném intervalu  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . Konverguje-li navíc tato řada v levém (resp. pravém) krajním bodě tohoto intervalu, pak je  $s$  v tomto bodě spojitá zprava (resp. zleva);

2. Řadu  $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  lze integrovat člen po členu v libovolném intervalu  $\langle a, b \rangle$  ležícím uvnitř  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , tj.

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \right) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_a^b a_k(x - x_0)^k dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (b - x_0)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (a - x_0)^{k+1}, \end{aligned}$$

přičemž číselné řady na pravé straně předcházejícího vztahu jsou absolutně konvergentní;

3. Řadu  $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  lze v  $(x_0 - R, x_0 + R)$  derivovat člen po členu, tj.

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

přičemž mocninná řada na pravé straně předcházejícího vztahu má tentýž poloměr konvergence  $R$ .

**Poznámka 3.11.** Větu o (určité) integraci mocninné řady lze snadno přeformulovat pro případ, kdy uvažovaný integrál je funkcí horní meze. Pro všechna  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  pak platí

$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t - x_0)^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{x_0}^x a_k(t - x_0)^k dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1},$$

přičemž mocninná řada vystupující na pravé straně má opět poloměr konvergence  $R$ .

**Příklad 3.12.** Pomocí vět o derivování a integrování mocninné řady lze odvodit některé nové vztahy pro součty řad. Vyjděme např. ze vztahu

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in I^* = (-1, 1), \quad (3.4)$$

který byl odvozen v závěru příkladu 2.5. Derivováním této rovnosti dostáváme podle věty o derivaci mocninných řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1). \quad (3.5)$$

Zdůrazněme, že při derivování a integrování mocninné řady se poloměr konvergence zachovává. Jinak vyjádřeno, oborem bodové konvergence je interval s týmiž krajními body, ovšem konvergenci v těchto bodech je třeba prověřit zvlášť, a to jejich přímým dosazením do řady. Je snadné vidět, že mocninná řada ve vztahu (3.5) v krajních bodech  $x = 1$  a  $x = -1$  nekonverguje, proto je oborem bodové konvergence této řady skutečně otevřený interval  $(-1, 1)$ .

Všimněme si také, že řada vystupující ve vztahu (3.5) již není řada geometrická. Dosazením libovolného  $x \in (-1, 1)$  do vztahu (3.5) lze získat vzorec pro součet negeometrické číselné řady. Speciálně pak dosazením hodnoty  $x = 1/2$  dostáváme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$$

(viz také závěr příkladu 2.21).

Jestliže rovnost (3.4) pro změnu integrujeme člen po členu, dostáváme po malé úpravě a prověření konvergence v krajních bodech vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \quad x \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (3.6)$$

### 3.2 Rozvoje funkcí v mocninné (Taylorovy) řady

Zůstaňme ještě u vztahu (3.6) a proved' me v něm dvě zcela formální úpravy. Jednak otočíme znaménko, a dále zaměníme jeho levou a pravou stranu. Dostáváme tak

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, \quad x \in (-1, 1). \quad (3.7)$$

Na tom se nezdá být nic zajímavého, ovšem opak je pravdou. Vztah (3.7) totiž dává předpis pro vyjádření logaritmické funkce pomocí vhodné mocninné řady, tedy předpis pro vyjádření hodnot přirozeného logaritmu pomocí (nekonečně mnoha) základních aritmetických operací. Ukazuje se tedy, že vztah (3.6) může být skutečně mnohem zajímavější, pokud je čten „zprava doleva“.

To nás vede k obecnější úvaze, totiž za jakých podmínek lze zapsat obecnou funkci  $f$  ve tvaru součtu vhodné mocninné řady, tj. kdy platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, \quad x \in I^*, \quad (3.8)$$

kde střed  $x_0$  a koeficienty  $a_k$  jsou (zatím nespécifikované) konstanty. Vztah (3.8) budeme dále nazývat *rozvojem funkce  $f$  do mocninné řady*. Tento vztah bude pochopitelně zajímavý pouze tehdy, pokud má daná mocninná řada kladný poloměr konvergence (při  $R=0$  obsahuje obor bodové konvergence  $I^*$  pouze střed  $x_0$ , což je nezajímavý případ).

Protože částečným součtem každé mocninné řady je polynom, mají následující úvahy úzkou souvislost s problematikou náhrady dané funkce  $f$  pomocí Taylorova polynomu  $P_n$ . Připomeňme proto nejprve některé základní skutečnosti týkající se tohoto pojmu.

Víme, že  $n$ -krát spojitě diferencovatelnou funkci  $f$  můžeme v okolí  $O(x_0)$  bodu  $x_0$  nahradit Taylorovým polynomem  $P_n$ , a to se zbytkem  $r_n$ , takže je

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \quad \text{pro všechna } x \in O(x_0), \quad (3.9)$$

kde

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Přitom nejjednodušší (tzv. Lagrangeův) tvar zbytku  $r_n(x)$  je

$$r_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + (x-x_0)\vartheta), \quad (3.10)$$

kde  $\vartheta$  je blíže neurčené číslo závislé na  $x$ , přičemž  $0 < \vartheta < 1$ .

Vzhledem k tomu, že Taylorův polynom  $P_n$  lze chápat jako částečný součet mocninné řady vystupující v rozvoji (3.8), položíme

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (3.11)$$

a zavedeme tuto definici:

**Definice 3.13.** Necht' funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  derivace všech řádů. Potom *Taylorovou řadou* funkce  $f$  v bodě  $x_0$  nazýváme výraz

$$T_f^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x). \quad (3.12)$$

Poznamenejme, že hodnoty koeficientů  $a_k$  vyjádřen vztahem (3.11) lze odvodit konstruktivně opakovanou derivací člen po členu rovnosti (3.8) (derivovat lze pochopitelně pouze uvnitř oboru

konvergence), a průběžným dosazováním hodnoty  $x = x_0$  do jednotlivých derivací. Odtud tedy vyplývá, že pokud platí rozvoj (3.8), pak koeficienty  $a_k$  jsou dány vztahy (3.11). Nás však zajímá obrácená implikace. Jsou-li koeficienty  $a_k$  dány vztahy (3.11), platí rozvoj (3.8)? Jinak vyjádřeno, platí

$$f(x) = T_f^{x_0}(x), \quad (3.13)$$

tedy že součet Taylorovy řady funkce  $f$  je roven této funkci, pokud předpokládáme pouze existenci derivací  $f^{(k)}(x_0)$  pro všechna přirozená  $k$ ?

Obecně tato rovnost platit nemusí. Následující věta udává nutnou a postačující podmínku pro její platnost.

■ **Věta 3.14.** *Necht'  $x_0 \in I$  je vnitřním bodem intervalu  $I$  a necht' funkce  $f$  má v  $x_0$  derivace všech řádů. Potom v tomto intervalu platí rovnost (3.13) právě tehdy, když*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I, \quad (3.14)$$

kde  $r_n$  představuje Taylorův zbytek.

*Důkaz.* Z (3.9) plyne, že

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (3.15)$$

Nejprve dokážeme, že platnost (3.13) pro každé  $x \in I$  implikuje (3.14). Z (3.12), (3.13) a (3.15) plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Nyní dokážeme, že platnost (3.14) implikuje platnost (3.13) pro každé  $x \in I$ . Z (3.14) a (3.15) plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - P_n(x)] = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

čili podle (3.12)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \equiv T_f^{x_0}(x),$$

čímž je důkaz zakončen. □

Z věty 3.14 plyne jednoduchá podmínka postačující k platnosti vztahu (3.13).

■ **Důsledek 3.15.** *Necht' funkce  $f$  má v intervalu  $I$  derivace všech řádů, přičemž platí*

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \quad \text{pro všechna } x \in I, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

a vhodně  $M > 0$ . Potom v každém bodě  $x \in I$  platí (3.13).

*Důkaz.* Podle věty 3.14 stačí dokázat, že z (3.16) plyne (3.14). Zvolme tedy  $x \in I$  libovolně, ale pevně. Podle (3.10) a (3.16) platí

$$|r_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vzhledem k tomu, že  $x$  je pevné, platí (3.14). □

Nyní již můžeme snadno odvodit základní rozvoje vybraných elementárních funkcí do Taylorovy řady, včetně určení oboru platnosti těchto rozvoje. Výběr těchto funkcí je dán především požadavkem na snadný výpočet jejich opakovaných derivací, které jsou potřeba při vyčíslení vztahu (3.11).

■ **Věta 3.16** — Taylorovy rozvoje některých elementárních funkcí. *Platí*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad (3.17)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad (3.18)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad (3.19)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1); \quad (3.20)$$

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \dots, \quad x \in (-1, 1), \quad (3.21)$$

kde  $r$  je libovolné reálné číslo,  $\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$  pro  $k = 1, 2, \dots$  a  $\binom{r}{0} := 1$ . Řada (3.21) se přitom nazývá binomická řada.

*Důkaz.* Ve všech pěti případech je  $x_0 = 0$ .

V případě funkce  $f(x) = e^x$  platí

$$f^{(k)}(x) = (e^x)^{(k)} = e^x \quad (k = 1, 2, \dots),$$

takže

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Podle věty 3.14 zbývá dokázat, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ . Protože  $x_0 = 0$ , je podle (3.10) Lagrangeův zbytek pro funkci  $e^x$  tvaru

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Zvolme  $x \in (-\infty, \infty)$  libovolně, ale pevně. Potom

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Ukážeme nyní, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^x = 0. \quad (3.22)$$

Uvažujme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} e^x. \quad (3.23)$$

Pomocí limitního podílového kritéria snadno vidíme, že řada (3.23) je konvergentní, neboť

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+1} e^x / (k+1)!}{|x|^k e^x / k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1.$$

Pak podle nutné podmínky konvergence platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^k}{k!} e^x = 0,$$

z čehož plyne (3.22). Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$  pro všechna  $x \in (-\infty, \infty)$ , takže podle věty 3.14 platí (3.17).

V případě funkce  $f(x) = \sin x$  platí

$$f(0) = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1, \dots,$$

$$f^{(4k)}(0) = 0, f^{(4k+1)}(0) = 1, f^{(4k+2)}(0) = 0, f^{(4k+3)}(0) = -1,$$

čímž je ověřena formální platnost pravé strany (3.18). Pro zbytek v Lagrangeově tvaru podle (3.10) platí

$$|r_{2n+1}(x)| = \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos \vartheta x \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Vztah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$$

dokážeme podobně jako pro funkci  $f(x) = e^x$ .

V případě funkce  $f(x) = \cos x$  lze postupovat stejným způsobem. Všimněme si však, že vztah (3.19) lze také obdržet přímým derivováním (3.18) člen po členu.

V případě funkce  $f(x) = \ln(1+x)$  platí

$$\ln 1 = 0, (\ln(1+x))' = (1+x)^{-1}, (\ln(1+x))'' = (-1)(1+x)^{-2}, (\ln(1+x))^{(3)} = +2(1+x)^{-3},$$

$$(\ln(1+x))^{(4)} = -6(1+x)^{-4}, \dots, (\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \quad (k \geq 1).$$

Tedy (protože  $(1+0)^{-k} = 1$ )

$$T_{\ln(1+x)}^0(x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}.$$

Lagrangeův zbytek pro funkci  $\ln(1+x)$  je v případě  $x_0 = 0$  tvaru

$$r_n(x) = \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (\ln(1+t))^{(n+1)} \right]_{t=\vartheta x} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}},$$

takže pro  $0 \leq x \leq 1$  a  $n \rightarrow \infty$  platí

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

V případě  $-1 < x < 0$  uvažujme tzv. Cauchyův tvar zbytku

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} \frac{(1-\vartheta)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} n! = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1-\vartheta|x|} \left( \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta|x|} \right)^n.$$

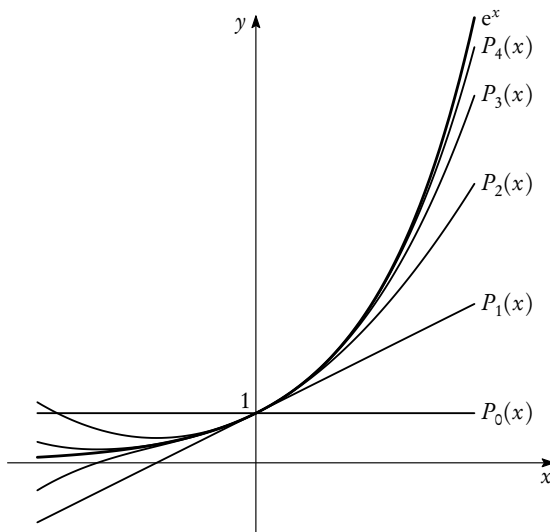
Odtud

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1-\vartheta|x|} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Užijeme-li větu 3.14, dostaneme z předchozího vztah (3.20). Poznamenejme, že tento vztah může být odvozen i metodou, jejíž princip bude vysvětlen na příkladu 3.18a).

Vztah (3.21) uvádíme bez důkazu. □

Obrázek 3.1 ilustruje rozvoj funkce  $e^x$  do Taylorovy řady (viz vztah (3.17)). Kromě dané funkce je zde zachyceno i prvních pět Taylorových polynomů (tedy pět částečných součtů příslušné Taylorovy řady):  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = 1 + x$ ,  $P_2(x) = 1 + x + x^2/2!$ ,  $P_3(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3!$ ,  $P_4(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!$ .

Obrázek 3.1: Taylorovy polynomy funkce  $e^x$ 

**Poznámka 3.17.** Při odvozování rozvoju (3.17)–(3.20) jsme využili skutečnosti, že pro uvedené funkce lze snadno určit hodnotu  $f^{(k)}(x_0)$  pro libovolné přirozené číslo  $k$ . V následujících příkladech ukážeme i jiné způsoby rozvoju, které vzorce (3.12) přímo nevyužívají.

**Příklady 3.18.** a) Určeme Taylorův rozvoj funkce  $f(x) = \arctg x$  v bodě  $x_0 = 0$ .

**Řešení.** Nejprve odvodíme rozvoj funkce  $f'(x) = 1/(1+x^2)$ . Snadno ověříme, že  $f'(x)$  je součtem geometrické řady, kde první člen  $a_1 = 1$  a kvocient  $q = -x^2$ . Tedy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Integrací tohoto vztahu obdržíme podle věty 3.10 a poznámky 3.11 rovnost

$$\arctg x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

kde  $x \in (-1, 1)$ , přičemž je ale ještě potřeba vyšetřit konvergenci řady v krajních bodech konvergenčního intervalu. Dosazením  $x = 1$  dostáváme alternující řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (2k+1)$ , která konverguje podle Leibnizova kritéria. Po dosazení  $x = -1$  a následném vytknutí znaménka obdržíme tutéž řadu. Ukázali jsme tedy, že platí

$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

b) Určeme Taylorův rozvoj funkce  $f(x) = 1/\sqrt{1-x}$  v bodě  $x_0 = 0$ .

**Řešení.** Jedná se o binomickou řadu (3.21), kde  $r = -\frac{1}{2}$  a místo  $x$  dosadíme  $(-x)$ . Pro  $x \in (-1, 1)$  tudíž je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^k.$$

Úpravou postupně dostaneme

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

kde  $(2k)!! = 2 \cdot 4 \dots (2k)$ ,  $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \dots (2k-1)$ . Dále  $\binom{-1/2}{0} = 1$ , a proto

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k = 1 + \frac{1!!}{2!!} x + \frac{3!!}{4!!} x^2 + \frac{5!!}{6!!} x^3 + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

c) Určeme Taylorův rozvoj funkce  $f(x) = \arcsin x$  v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení.* Zvolíme stejný postup jako v příkladu a). Použijeme přitom výsledku z příkladu b) a skutečnosti, že  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Potom podle věty 3.10 a poznámky 3.11 je

$$\arcsin x = \int_0^x \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k} \right) dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

kde  $x \in (-1, 1)$ . Dosazením krajních bodů lze prověřit, že tyto hodnoty náleží do konvergenčního intervalu. Pro  $x = 1$  dostáváme řadu  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1}$ . Pomocí matematické indukce lze ukázat, že platí

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2k}}.$$

Odtud

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2k}(2k+1)} \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{1}{k\sqrt[3]{k}}.$$

Konvergence uvedené číselné řady tedy plyne z porovnávacího kritéria a z příkladu 1.13a). Analogicky se konvergence ukáže i v případě  $x = -1$ . Platí tedy

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{1!!}{2!!} \frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!} \frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{6!!} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

d) Určeme Taylorův rozvoj funkcí  $f(x) = \sinh x$ ,  $g(x) = \cosh x$  v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení.* Podle vzorce (3.17) platí

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Všimněme si, že druhý vztah jsme obdrželi jednoduchou substitucí v (3.17), kde jsme místo proměnné  $x$  uvažovali hodnotu  $-x$ . Sečtením, resp. odečtením těchto vztahů a následným vynásobením hodnotou  $1/2$  dostáváme

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Pozorný čtenář by si přitom mohl uvědomit, jaké početní operace jsme zde využili (o platnosti těchto operací bylo pojednáno v úvodní sekci věnované číselným řadám).

### 3.3 Užití mocninných řad

Na závěr této sekce budeme na příkladech ilustrovat některé z četných aplikací rozvoju funkcí do Taylorových řad. Kromě přibližných výpočtů funkčních hodnot elementárních funkcí se mocninné řady používají např. při výpočtu limit a integrálů a také při řešení diferenciálních rovnic (o této otázce pojednáme v podsekcí 9.2).

**Příklad 3.19.** Nalezněme horní odhad chyby, které se dopustíme, když nahradíme funkci  $e^x$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  Taylorovým polynomem  $P_3$  za předpokladu, že střed Taylorovy řady je  $x_0 = 0, 5$ .

*Řešení.* Pro Lagrangeův tvar zbytku v tomto případě platí

$$r_3(x) = \frac{(x-0,5)^4}{4!} e^{0,5+(x-0,5)\theta} \leq \frac{(x-0,5)^4}{4!} e \leq \frac{0,5^4}{4!} e \approx 7,08 \cdot 10^{-3}, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Tedy chyba nepřesáhne  $7,08 \cdot 10^{-3}$ .

**Příklad 3.20.** Pomocí základních aritmetických operací určíme hodnotu  $\ln 2$  s chybou menší než  $10^{-4}$ .

*Řešení.* Položíme-li v (3.20)  $x = 1$ , dostáváme vyjádření

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

tedy hodnota  $\ln 2$  je součtem Leibnizovy řady. K dosažení požadované přesnosti je pak podle vztahu

$$|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

(viz příklad 1.17) třeba sečíst  $n = 10^4$  členů řady. Odtud

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{10000} \doteq 0,6931.$$

Z tohoto vyjádření je patrné, že vztah (3.20) není pro určení přibližné hodnoty  $\ln 2$  příliš vhodný, neboť konvergence Leibnizovy řady je pomalá. Ukážeme, že k určení této hodnoty je výhodnější použít rozvoje funkce

$$g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Na základě vztahů

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1), \\ \ln(1-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \end{aligned}$$

dostáváme vyjádření

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad x \in (-1, 1) \cap \langle -1, 1 \rangle = (-1, 1). \quad (3.24)$$

Protože

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \in (-1, 1),$$

dostáváme dosazením hodnoty  $x = 1/3$  do (3.24)

$$\ln 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \frac{1}{9} \right)^k = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right).$$

Pro odhad velikosti zbytku  $r_n$  pak lze buďto postupovat podle poznámky 1.14, nebo volit přímý postup, kdy velikost zbytku odhadneme pomocí majorantní geometrické řady. Takto dostáváme

$$r_n = \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{9}\right)^k < \frac{2}{3} \frac{1}{2n+3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{3}{4(2n+3)9^{n+1}}.$$

Odtud

$$\frac{3}{4(2n+3)9^{n+1}} < 10^{-4} \iff n \geq 3.$$

S požadovanou přesností tedy dostáváme

$$\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \right) \doteq 0,6931.$$

**Příklad 3.21.** Pomocí rozvoje funkce  $f(x) = (\sin x)/x$  určíme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  a vyjádřeme  $\int_0^x f(t) dt$  ve tvaru mocninné řady.

*Řešení.* Na základě vztahu (3.18) snadno určíme

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty), x \neq 0,$$

přičemž mocninná řada na pravé straně konverguje podle Weierstrassova kritéria stejnoměrně na každém intervalu  $\langle -k, k \rangle$ , kde  $k > 0$  je libovolně velké (lze dokonce prokázat, že  $I^{**} = (-\infty, \infty)$ ). Odtud ihned plyne známý vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dále podle věty 3.10 (a následně poznámky 3.11) můžeme danou řadu integrovat člen po členu, takže platí

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!},$$

kde  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**Příklad 3.22.** Vypočtěme  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  a určíme, kolik členů řady je třeba sečíst, aby hodnota integrálu byla aproximována s chybou menší než  $10^{-6}$ .

*Řešení.* Podle (3.17) platí

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \quad \text{pro všechna } x \in (-\infty, \infty). \quad (3.25)$$

Opět můžeme integrovat člen po členu, takže

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \right\} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} dx \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}.$$

Protože obdržená číselná řada je alternující, k odhadu velikosti zbytku využijeme větu 1.16. Odtud

$$|r_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-6} \iff n \geq 8.$$

K dosažení požadované přesnosti je tedy třeba provést následující náhradu:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{17 \cdot 8!} \doteq 0,746824.$$

**Poznámka 3.23 – Eulerovy formule.** Dosadíme v Taylorově rozvoji funkce  $e^x$  za  $x$  výraz  $ix$ , kde  $i$  je imaginární jednotka. Protože  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1, \dots$ , dostaneme

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right),$$

tedy podle věty 3.16

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Podobně

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Tyto vztahy, jichž odvození je spojeno se jménem L. Eulera, budou mít velkou důležitost v partiích věnovaných diferenciálním rovnicím.

### Příklady k procvičení

**Cvičení 3.24.** Určete poloměr konvergence mocninné řady:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k)!}{k^k (2k)!} x^k; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2k}.$$

*Výsledky.* a)  $4e/27$ ; b)  $4$ ; c)  $1/\sqrt{2}$ .

**Cvičení 3.25.** Určete obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^k; & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k + \sqrt{k}}; & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (3x)^k}{2^k (k+1)}; \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} k! x^k; & \text{e) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{k+1} x^{k+1}; & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k+1}}{2^k k^2}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $(-\infty, \infty)$ ; b)  $(-1, 1)$ ; c)  $(-2/3, 2/3)$ ; d)  $0$ ; e)  $\langle -1, 1 \rangle$ ; f)  $\langle -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2} \rangle$ .

**Cvičení 3.26.** Udejte příklad mocninné řady, jež má poloměr konvergence:

$$\text{a) } R = 1/3; \quad \text{b) } R = \sqrt{3}; \quad \text{c) } R = \pi/e.$$

**Cvičení 3.27.** Udejte příklad mocninné řady, jejíž obor bodové konvergence je interval:

$$\text{a) } (0, 4); \quad \text{b) } \langle 0, 4 \rangle; \quad \text{c) } (0, 4); \quad \text{d) } \langle 0, 4 \rangle.$$

**Cvičení 3.28.** Určete rozvoj funkce  $f$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$  a uveďte její obor bodové konvergence:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; & \text{b) } f(x) = \frac{x}{2-x}; & \text{c) } f(x) = x^2 e^{-x}; \\ \text{d) } f(x) = \sin^2 x; & \text{e) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}; & \text{f) } f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); \\ \text{g) } f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{2x}; & \text{h) } f(x) = \operatorname{arctgh} x; & \text{i) } f(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x^2}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ ,  $|x| < 1$ ; b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$ ,  $|x| < 2$ ; c)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+2}}{k!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; d)  $\sin^2 x =$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{e) } \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| \leq 1;$$

$$\text{f) } x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| \leq 1; \quad \text{g) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k+1)} x^{2k}, \quad |x| \leq 1; \quad \text{h) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1;$$

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(4k+3)!} x^{4k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Cvičení 3.29.** Určete Taylorovu řadu funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a uveďte obor bodové konvergence:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2; \quad \text{b) } f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1; \quad \text{c) } f(x) = \frac{3x-1}{x+4}, \quad x_0 = 2.$$

*Výsledky.* a)  $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-2}{2}\right)^k, x \in (0, 4);$  b)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}, x \in (0, 2);$   
 c)  $3 + 13 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{6^{k+1}} (x-2)^k, x \in (-4, 8).$

**Cvičení 3.30.** Pomocí rozvoje funkce v mocninnou řadu určete limity:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1}{2x}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $1/2;$  b)  $2;$  c)  $2;$  d)  $0.$

**Cvičení 3.31.** Pomocí rozvoje vhodné funkce v Taylorovu řadu určete hodnotu daného čísla s chybou menší než  $\varepsilon$ :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{e}, \quad \varepsilon = 10^{-2}; & \text{b) } \sqrt{e}, \quad \varepsilon = 10^{-3}; & \text{c) } \sqrt[3]{4}, \quad \varepsilon = 10^{-4}; \\ \text{d) } \sin \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = 10^{-4}; & \text{e) } \ln 5, \quad \varepsilon = 10^{-4}; & \text{f) } \pi = 4 \operatorname{arctg} 1, \quad \varepsilon = 10^{-4}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $0,37;$  b)  $1,649;$  c)  $1,5874;$  d)  $0,4794;$  e)  $1,6094;$  f)  $3,1415.$

**Cvičení 3.32.** Určete rozvoj funkce  $f$  v Taylorovu řadu v bodě  $x_0 = 0$  a uveďte obor bodové konvergence:

$$\text{a) } f(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt; \quad \text{b) } f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}; \quad \text{c) } f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt.$$

*Výsledky.* a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!} x^k, x \in \mathbb{R};$  b)  $x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!! (4k+1)} x^{4k+1}, |x| < 1;$  c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k^2} x^{2k}, x \in \langle -1, 1 \rangle.$

**Cvičení 3.33.** Pomocí rozvoje integrandu v mocninnou řadu určete hodnotu integrálu s chybou menší než  $\varepsilon$ :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}; & \text{b) } \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-2}; \\ \text{c) } \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}; & \text{d) } \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $0,946;$  b)  $0,76;$  c)  $0,494;$  d)  $0,071.$

**Cvičení 3.34.** Pomocí rozvoje v Taylorovu řadu ukažte, že platí

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

## 4 Fourierovy řady

V předcházející sekci jsme viděli, že každé funkci  $f$ , která má v nějakém bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  derivace všech řádů, je možné přiřadit Taylorovu řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (4.1)$$

kde

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{a} \quad \varphi_k(x) = (x - x_0)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(volíme zde mírně odlišné označení koeficientů i členů řady). Cílem této sekce bude diskutovat následující otázku: Lze k dané funkci  $f$  přiřadit řadu ve tvaru (4.1) i jiným způsobem (samozřejmě tak, aby vzniknuvší řada měla dobrý smysl, tj. aby pro dostatečně širokou třídu funkcí konvergovala zpět k funkci, ze které byla vytvořena)? Je možné toto přiřazení provést i pro funkce nespňující požadavky na rozvoj do Taylorovy řady (např. funkce nespojitě)?

### 4.1 Základní pojmy a vlastnosti

Nejprve vymezíme základní požadavky na danou funkci  $f$ , jejichž platnost bude nutnou podmínkou všech dalších úvah v této sekci (již jsme připomněli, že v případě rozvoju do Taylorových řad touto nutnou podmínkou byla existence derivací všech řádů dané funkce v nějakém vnitřním bodě definičního oboru). Uvažujme funkci  $f$ , která je definována na nějakém uzavřeném intervalu  $I$ . V případě Fourierových řad je přirozeným požadavkem, aby tato funkce na  $I$  byla integrovatelná s kvadrátem, tj. integrál z druhé mocniny  $f$  přes  $I$  existuje a platí

$$\int_I f^2(x) dx < \infty.$$

Pokud se omezíme na integraci v Riemannově smyslu<sup>1</sup>, tak platí, že je-li funkce integrovatelná na  $I$ , pak je zde integrovatelná také s kvadrátem (pozor, naopak tvrzení obecně neplatí). Jinak vyjádřeno, samotná integrovatelnost tedy zaručuje integrovatelnost s kvadrátem.

Nyní se zaměříme na otázku volby posloupnosti funkcí  $\varphi_k$  vystupujících v rozvoji (4.1) (opět připomeňme, že v případě rozvoju do Taylorových řad tyto funkce byly voleny jako mocninné funkce s nezáporným celočíselným exponentem). Lze samozřejmě očekávat, že tuto posloupnost funkcí nelze volit zcela nahodile. V dalším uvidíme, že tou „správnou“ vlastností, kterou je potřeba požadovat, je ortogonalita funkcí v této posloupnosti. Dříve než vyslovíme definici ortogonálního systému funkcí, zavědeme pojem ortogonalita pro obecnou dvojici integrovatelných funkcí, a to pomocí operace skalárního součinu.

**Definice 4.1 — skalárního součinu funkcí, jejich ortogonalita a normy funkce.** Necht'  $f, g$  jsou integrovatelné funkce na  $I$ . Výraz

$$(f, g)_I = \int_I f(x)g(x) dx$$

nazveme *skalárním součinem funkcí*  $f, g$  na intervalu  $I$ . Tuto dvojici funkcí prohlásíme za *ortogonální na  $I$* , jestliže  $(f, g)_I = 0$ .

Dále, *normou* integrovatelné funkce  $f$  na  $I$  rozumíme výraz  $\|f\|_I = \sqrt{(f, f)_I}$ .

Následující definice ortogonálního systému funkcí vychází z požadavku, aby každá dvojice různých funkcí z tohoto systému byla ortogonální, přičemž v tomto systému uvažujeme pouze funkce s nenulovou normou.

<sup>1</sup>Připomeňme, že definice vychází z ohraničené funkce na uzavřeném intervalu, přičemž integrovatelnost této funkce je zaručena, je-li např. po částech spojitá na  $I$ . To pro potřeby technické praxe většinou postačuje.

**Definice 4.2 — ortogonálního systému funkcí.** Necht'  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$  je posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu  $I$ . Řekneme, že tato posloupnost tvoří *ortogonální systém funkcí na  $I$* , jestliže platí

$$\begin{aligned} (\varphi_k, \varphi_\ell)_I &= 0 && \text{pro všechna } k, \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad k \neq \ell, \\ \|\varphi_k\|_I &\neq 0 && \text{pro všechna } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Poznámky 4.3.** a) Podmínka (4.2) znamená, že v posloupnosti  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$  není nulová funkce nebo funkce, která je „téměř všude“ nulová. Víme totiž, že když změníme funkční hodnotu integrované funkce v jednom nebo několika bodech intervalu, přes který integrujeme (přesněji, změníme-li libovolně hodnoty na tzv. nulové množině), tak hodnota Riemannova integrálu se nezmění.

b) Později uvidíme (viz větu 4.9), že alespoň jeden ortogonální systém existuje.

Princip rozvoje funkcí do Fourierovy řady je pak následující. Vezměme integrovatelnou funkci na nějakém uzavřeném intervalu  $I$  a ortogonální systém  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$  na  $I$ . Požadujeme, aby platilo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

kde  $c_k \in \mathbb{R}$  jsou konstanty, které je potřeba určit. Násobme obě strany v poslední rovnosti funkcí  $\varphi_\ell$  ( $\ell$  je libovolný index) a integrujme přes  $I$ , tj.

$$\int_I f(x) \varphi_\ell(x) dx = \int_I \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \right) \varphi_\ell(x) dx = \int_I \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) \right) dx.$$

Předpokládejme nyní, že řada  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$  konverguje stejnoměrně na  $I$ . Potom stejnoměrně na  $I$  konverguje i řada  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \varphi_\ell(x)$ , a podle věty 2.18 lze zaměnit pořadí sumace a integrace. Máme tedy

$$\int_I f(x) \varphi_\ell(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_I \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx,$$

neboli, zapsáno pomocí skalárního součinu,

$$(f, \varphi_\ell)_I = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varphi_k, \varphi_\ell)_I.$$

Protože všechny funkce vystupující v řadě na pravé straně jsou z ortogonálního systému, platí  $(\varphi_k, \varphi_\ell)_I = 0$  pro  $k \neq \ell$  a tedy v řadě zůstane pouze jeden člen (pro  $\ell = k$ ), tj.

$$(f, \varphi_\ell)_I = c_\ell (\varphi_\ell, \varphi_\ell)_I = c_\ell \|\varphi_\ell\|_I^2.$$

Přeznačíme-li index  $\ell$  na  $k$ , dostáváme vzorec pro výpočet koeficientů  $c_k$  ve tvaru

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)_I}{\|\varphi_k\|_I^2}.$$

Výše uvedený postup nás motivuje k následující definici:

**Definice 4.4 — Fourierovy řady.** Necht'  $f$  je integrovatelná na intervalu  $I$  a  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$  je nějaký ortogonální systém na  $I$ . Potom řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad \text{kde } c_k = \frac{(f, \varphi_k)_I}{\|\varphi_k\|_I^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

nazveme *Fourierovou řadou funkce  $f$  na intervalu  $I$*  (koeficienty  $c_k$  se nazývají *Fourierovy koeficienty*).

**Poznámka 4.5.** Fourierova řada (podobně jako Taylorova řada) ještě nemusí konvergovat k funkci, ze které byla sestavena. Uvědomme si totiž, že krok, při kterém jsme předpokládali stejnoměrnou konvergenci řady (abychom mohli zaměnit pořadí sumace a integrace) je čistě formální – v tomto okamžiku koeficienty  $c_k$  ještě neznáme! Navíc, bodová ani stejnoměrná konvergence nejsou pro Fourierovu řadu tou nejpřirozenější. Tou je konvergence v normě, kterou zavádí následující definice.

**Definice 4.6 — konvergence posloupnosti funkcí v normě.** Řekneme, že posloupnost  $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$  funkcí integrovatelných s kvadrátem na intervalu  $I$  konverguje v normě k funkci  $g$ , jestliže

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - g\|_I = 0.$$

Konvergenci v normě Fourierovy řady upřesňuje následující tvrzení.

■ **Věta 4.7 — konvergence Fourierovy řady v normě.** *Nechť  $f$  je integrovatelná s kvadrátem na intervalu  $I$  a  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$  je její Fourierova řada na  $I$ . Označme  $s_n$   $n$ -tý částečný součet této řady (tj.  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ ). Potom  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$  konverguje v normě k funkci  $f$  (tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_I = 0$ ), právě když platí tzv. Parsevalova rovnost:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|_I^2 = \|f\|_I^2.$$

**Poznámka 4.8.** Věta říká, že pokud Fourierova řada funkce  $f$  k této funkci konverguje v normě, pak musí platit Parsevalova rovnost. Naopak, platí-li Parsevalova rovnost, pak Fourierova řada konverguje v normě zpět k funkci, ze které byla vytvořena. Parsevalova rovnost úzce souvisí s pojmem *úplnosti ortogonálního systému*  $\{\varphi_k\}$ . Úplnost v našich úvahách znamená, že k ortogonálnímu systému již nelze přidat další funkci, která by byla integrovatelná s kvadrátem, nebyla by téměř všude nulová, a byla ortogonální ke každé ze stávajících funkcí systému. Lze ukázat, že je-li v daném prostoru funkcí ortogonální systém úplný, pak platí Parsevalova rovnost a naopak, tj. mezi těmito pojmy je ekvivalence. Pokud ortogonální systém není úplný, pak platí pouze *Besselova nerovnost*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|_I^2 \leq \|f\|_I^2.$$

Následující tvrzení zavádí významný ortogonální systém funkcí. Ověření skutečnosti, že se jedná opravdu o systém ortogonální, je ryze početní a nebudeme ho zde provádět.

■ **Věta 4.9. Posloupnost**

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{p}, \sin \frac{\pi x}{p}, \cos \frac{2\pi x}{p}, \sin \frac{2\pi x}{p}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{p}, \sin \frac{k\pi x}{p}, \dots \right\} \quad (4.3)$$

tvoří ortogonální systém na libovolném uzavřeném intervalu  $I$  délky  $2p$  ( $p > 0$ ). Navíc platí

$$\|1\|_I = \sqrt{2p}, \quad \left\| \cos \frac{k\pi x}{p} \right\|_I = \left\| \sin \frac{k\pi x}{p} \right\|_I = \sqrt{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Číslo  $p$  se nazývá půlperioda.

**Poznámka 4.10.** Existují i jiné ortogonální systémy.

Tvar Fourierovy řady vzhledem k ortogonálnímu systému (4.3) je uveden v následující definici.

**Definice 4.11 — trigonometrické Fourierovy řady.** Necht'  $p > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  a  $f$  je integrovatelná na intervalu  $\langle c - p, c + p \rangle$ . Potom řadu

$$\Phi_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{k\pi x}{p} \right), \quad (4.4)$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{c-p}^{c+p} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{p} \int_{c-p}^{c+p} f(x) \cos \frac{k\pi x}{p} dx, \quad b_k = \frac{1}{p} \int_{c-p}^{c+p} f(x) \sin \frac{k\pi x}{p} dx, \quad (4.5)$$

nazveme *trigonometrickou Fourierovou řadou na intervalu  $\langle c - p, c + p \rangle$* .

**Poznámky 4.12.** a) Tvar řady (4.4) a vzorce (4.5) je v souladu s definicí 4.4, koeficienty  $c_k$  jsou pouze rozčleněny na tři skupiny:  $a_0$  odpovídá funkci  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $a_k$  odpovídají funkcím  $\varphi_{2k-1}(x) = \cos \frac{k\pi x}{p}$  a  $b_k$  odpovídají funkcím  $\varphi_{2k}(x) = \sin \frac{k\pi x}{p}$ . Faktor  $1/p$  ve vztazích (4.5) představuje člen  $1/\|\varphi_k\|_1^2$  (disproporce  $\|\mathbb{1}\|_1^2 = 2p$  je eliminována tím, že v řadě (4.4) je koeficient  $a_0$  dělen dvěma), a integrály v těchto vztazích jsou příslušné skalární součiny.

b) Jsou-li koeficienty  $a_0, a_k$  a  $b_k$  libovolná reálná čísla (tj. ne nutně určena vztahy (4.5)), pak řadu (4.4) nazýváme *trigonometrickou řadou* (bez přívlastku Fourierova) a její  $n$ -tý částečný součet

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{k\pi x}{p} \right)$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem*.

c) Lze ukázat, že ortogonální systém (4.3) je úplný, a tedy platí Parsevalova rovnost, která má nyní tvar

$$p \frac{a_0^2}{2} + p \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \|f\|_1^2.$$

Důsledkem je, že trigonometrická Fourierova řada  $\Phi_f$  konverguje v normě na  $\langle c - p, c + p \rangle$  k funkci  $f$ .

## 4.2 Bodová a stejnoměrná konvergence Fourierovy řady

Následující tvrzení nám ukáží, že za dodatečných (ne až tak přísných) podmínek kladených na funkci  $f$  bude trigonometrická Fourierova řada  $\Phi_f$  konvergovat i bodově, či dokonce stejnoměrně k funkci  $f$ . Předně si všimněme, že všechny funkce vystupující v řadě  $\Phi_f$  jsou  $2p$ -periodické, a proto i součtová funkce bude  $2p$ -periodická.

■ **Věta 4.13 — Dirichletova (o bodové konvergenci řady trigonometrické Fourierovy řady).** Necht'  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $\langle c - p, c + p \rangle$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $p > 0$ , a necht' jsou splněny tzv. Dirichletovy podmínky:

- (i)  $f$  je na  $\langle c - p, c + p \rangle$  po částech spojitá; tím rozumíme, že počet bodů nespojitosti je konečný (nebo  $f$  nemusí mít žádný bod nespojitosti), jsou typu „skok“ (tj. obě jednostranné limity jsou konečné), a v krajních bodech  $c \pm p$  existují konečné limity;
- (ii)  $f$  má na  $\langle c - p, c + p \rangle$  konečný počet ostrých lokálních extrémů<sup>2</sup> (nebo  $f$  nemusí mít žádný ostrý lokální extrém).

<sup>2</sup>Příkladem funkce, která má nekonečný počet ostrých lokálních extrémů (a která je přitom spojitá) je  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  na intervalu  $(0, 1)$  (vykreslete si graf, např. v prostředí Wolfram Alpha nebo Maple).

Definujeme na uzavřeném intervalu  $\langle c - p, c + p \rangle$  funkci  $f^*$  takto:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) \text{ ve všech bodech } x \in (c - p, c + p), \text{ ve kterých je } f \text{ spojitá;} \\ \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \right) \text{ ve všech } x \in (c - p, c + p), \text{ kde je } f \text{ nespojitá;} \\ \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow (c-p)^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow (c+p)^-} f(t) \right) \text{ v krajních bodech } x = c \pm p. \end{cases}$$

Prodlužme dále tuto funkci periodicky (s periodou  $2p$ ) na celou reálnou osu, a označme toto prodloužení  $f_{\text{per}}^*$ . Platí tedy  $f_{\text{per}}^*(x + 2kp) = f_{\text{per}}^*(x)$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a všechna  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f_{\text{per}}^*(x) = f^*(x)$  pro všechna  $x \in \langle c - p, c + p \rangle$ . Potom trigonometrická Fourierova řada  $\Phi_f$  konverguje bodově na celé reálné ose k funkci  $f_{\text{per}}^*$ .

**Poznámky 4.14.** a) Dirichletovy podmínky jsou tedy postačujícími pro bodovou konvergenci řady  $\Phi_f$ , přičemž důkaz tohoto tvrzení je poměrně náročný. V literatuře se často tyto podmínky nahrazují podmínkami:

- (i)  $f$  je na  $\langle c - p, c + p \rangle$  po částech spojitá,
- (ii) každý spojitý úsek funkce  $f$  má po částech spojitou derivaci  $f'$ .

Tyto podmínky jsou trochu „přísnější“ než Dirichletovy, je ale snadnější pomocí nich tvrzení dokázat. Funkce, se kterými běžně pracujeme, obvykle splňují oba typy podmínek.

b) Okomentujme stručně tvar funkce  $f^*$ , k níž za uvedených podmínek daná funkce  $f$  (bodově) konverguje na  $\langle c - p, c + p \rangle$ . V bodech spojitosti  $f$  se příslušné funkční hodnoty  $f$  a  $f^*$  rovnají, ve vnitřních bodech nespojitosti  $f$  je odpovídající funkční hodnota  $f^*$  rovna aritmetickému průměru příslušných jednostranných limit funkce  $f$  ( $f^*$  tedy „průměruje“ skok vzniklý v případných bodech nespojitosti  $f$ ), a podobný komentář platí i pro krajní body, kde  $f^*$  nabývá hodnot rovných aritmetickému průměru příslušných jednostranných limit funkce  $f$  v krajních bodech.

■ **Věta 4.15 — 1. věta o stejnoměrné konvergenci trigonometrické Fourierovy řady.** *Nechť  $\Phi_f$  je trigonometrická Fourierova řada funkce  $f$ . Pokud číselné řady  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ , kde  $a_k, b_k$  jsou příslušné Fourierovy koeficienty, konvergují, potom  $\Phi_f$  konverguje na  $\mathbb{R}$  ke své součtové funkci stejnoměrně.*

**Poznámka 4.16.** Toto tvrzení je jednoduchým důsledkem Weierstrassova kritéria stejnoměrné konvergence. Skutečně, s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\left| a_k \cos \frac{k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{k\pi x}{p} \right| \leq |a_k| \left| \cos \frac{k\pi x}{p} \right| + |b_k| \left| \sin \frac{k\pi x}{p} \right| \leq |a_k| + |b_k|$$

pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a  $k = 1, 2, \dots$ . Protože konvergují řady  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ , konverguje podle věty 1.18 i řada  $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ , a tedy k řadě  $\Phi_f$  na  $\mathbb{R}$  existuje konvergentní číselná majoranta, což podle věty 2.15 stačí k tomu, aby  $\Phi_f$  konvergovala na  $\mathbb{R}$  stejnoměrně. Protože všechny kosiny i siny v řadě jsou spojitě funkce, podle věty 2.18 bude spojitá i součtová funkce. Z důvodu periodičnosti částečných součtů bude také periodická. Z tohoto závěru plyne jednoduchá poučka: kdykoliv uvidíme, že součtová funkce je nespojitá (tu získáme např. díky Dirichletově větě), nemůže řada  $\Phi_f$  na  $\mathbb{R}$  konvergovat stejnoměrně.

■ **Věta 4.17 — 2. věta o stejnoměrné konvergenci trigonometrické Fourierovy řady.** *Nechť  $f$  je funkce spojitá na  $\langle c - p, c + p \rangle$ , přičemž platí  $f(c - p) = f(c + p)$ , a nechť derivace  $f'$  je na tomto intervalu po částech spojitá. Nechť dále  $f_{\text{per}}$  je periodické prodloužení funkce  $f$ . Potom  $\Phi_f$  konverguje stejnoměrně na  $\mathbb{R}$  k funkci  $f_{\text{per}}$ .*

**Poznámka 4.18.** Pokud  $f$  není spojitá na  $\langle c - p, c + p \rangle$  (případně neplatí  $f(c - p) = f(c + p)$ ), ale splňuje podmínky Dirichletovy věty, pak lze ukázat stejnoměrnou konvergenci na každém uzavřeném podintervalu, na kterém je  $f$  spojitá.

**Příklad 4.19.** Stanovme trigonometrickou Fourierovu řadu funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $(-\pi, \pi)$  a ukažme, k jaké funkci tato řada konverguje na  $(-\infty, \infty)$ .

Řešení: Podle vzorců (4.5) je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kx}{k} dx = 0 \Rightarrow a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx =$$

$$= -\frac{2\pi \cos k\pi}{k\pi} = (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k\pi} \Rightarrow b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Tedy

$$\Phi_f(x) = 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx. \quad (4.6)$$

Funkce  $f$  je na  $(-\pi, \pi)$  spojitá a nemá zde lokální extrém. Podle Dirichletovy věty platí  $\Phi_f(x) = f(x)$  pro všechna  $x \in (-\pi, \pi)$ . V krajních bodech  $x = \pm\pi$  potom opět podle Dirichletovy věty je

$$\Phi_f(\pm\pi) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow -\pi^+} x + \lim_{x \rightarrow \pi^-} x \right) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$$

(stejnou hodnotu dostaneme i přímým dosazením do (4.6)). Máme tedy

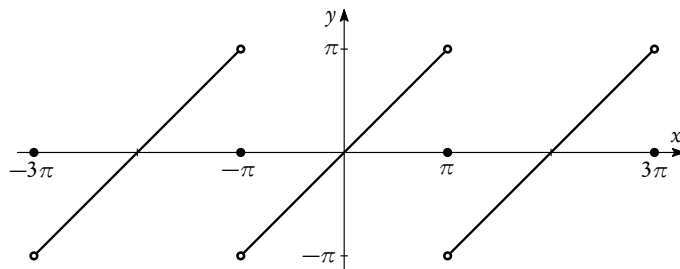
$$f^*(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{pro } x = \pm\pi. \end{cases}$$

$2\pi$ -periodické prodloužení  $f_{\text{per}}^*$  lze pak analyticky popsat vztahem

$$f_{\text{per}}^*(x) = \begin{cases} x - 2(k+1)\pi & \text{pro } x \in ((2k+1)\pi, (2k+3)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{pro } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

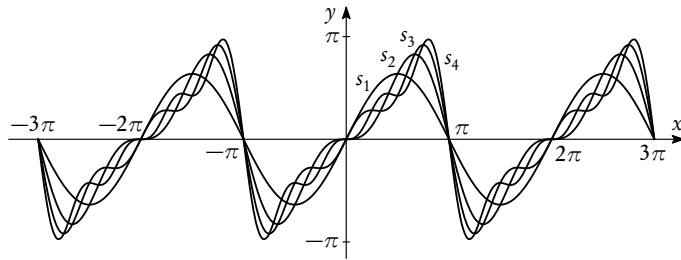
Tato funkce (viz obrázek 4.1) představuje součtovou funkci řady (4.6), tj. platí

$$\Phi_f(x) = f_{\text{per}}^*(x).$$

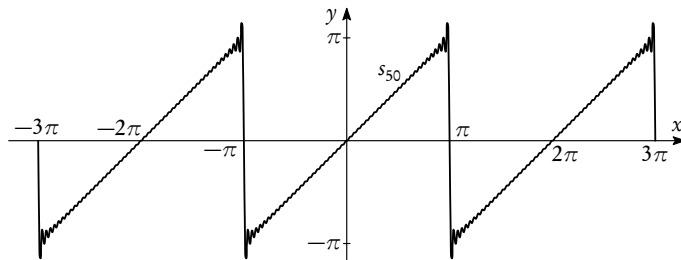


Obrázek 4.1: Součtová funkce trigonometrické Fourierovy řady funkce  $f(x) = x$  na  $(-\pi, \pi)$

Na závěr tohoto příkladu ještě graficky ilustrujme konvergenci řady (4.6) k funkci  $f_{\text{per}}^*$ . Místo dané nekonečné řady uvažujme pouze její  $n$ -tý částečný součet  $s_n(x)$  (uvažujme tedy prvních  $n$  členů této řady představujících trigonometrický polynom stupně  $n$ ). Pro různé hodnoty  $n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 50$ ) pak dostáváme následující grafická vyjádření:



Obrázek 4.2: Částečné součty  $s_1, s_2, s_3$  a  $s_4$  trigonometrické Fourierovy řady funkce  $f(x) = x$  na  $(-\pi, \pi)$



Obrázek 4.3: Částečný součet  $s_{50}$  trigonometrické Fourierovy řady funkce  $f(x) = x$  na  $(-\pi, \pi)$

Z obrázků 4.2 a 4.3 je dobře vidět, že je-li částečný součet této řady vyššího stupně, začínají se příslušné funkce v bodech  $x = (2k + 1)\pi$  „trhat“ a grafy těchto částečných součtů se vskutku blíží k nespojitě součtové funkci  $f_{\text{per}}^*$  znázorněné na obrázku 4.1.

Co se týká stejnoměrné konvergence, tak na celé reálné ose řada konvergovat stejnoměrně nemůže, protože  $f_{\text{per}}^*$  není spojitá, ale podle poznámky 4.18 konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, na kterém je  $f_{\text{per}}^*$  spojitá.

**Poznámka 4.20 – o kosinové a sinové trigonometrické Fourierově řadě.** Všimněme si, že v předcházejícím příkladu byla funkce, kterou jsme rozvíjeli do řady, lichá, což mělo za následek, že všechny koeficienty  $a_0$  a  $a_k$  byly nulové. Je to díky tomu, že v příslušném integrálu vystupuje funkce  $\cos$ , která je sudá. Součinem sudé a liché funkce dostáváme funkci lichou a integrál přes interval  $(-p, p)$  z liché (po čásech spojitě) funkce je vždy nulový (rozmyslete si proč - postačí geometrická argumentace). V řadě (4.6) nám tedy zůstaly pouze členy s funkcí  $\sin$ . Takovou řadu nazýváme *sinovou trigonometrickou Fourierovou řadou* (stručně *sinovou řadou*).

Podobně, kdybychom rozvíjeli sudou funkci, tak bychom dostali všechny koeficienty  $b_k$  nulové, a tedy ve výsledné řadě by vystupovaly pouze členy s funkcí  $\cos$  (a nulový člen  $a_0/2$ ). Takovou řadu nazýváme *kosinovou trigonometrickou Fourierovou řadou* (stručně *kosinovou řadou*).

V aplikacích je občas výhodné mít v řadě pouze siny (resp. kosiny). Uvažujme tedy úlohu, kdy funkci  $f$  chceme rozvinout na intervalu  $(0, p)$  do sinové (resp. kosinové) řady. Výše uvedené úvahy naznačují, jak to zařídit. V případě sinové (resp. kosinové) řady je potřeba funkci  $f$  rozšířit na interval  $(-p, p)$  tak, aby zde byla lichá (resp. sudá), viz následující příklad.

**Příklad 4.21.** a) Rozvíňme funkci  $f(x) = x^2$  na intervalu  $(0, 1)$  do sinové a kosinové řady.

b) Pomocí získaného rozvoje určíme součty číselných řad  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ .

**Řešení.** Abychom získali sinovou řadu, je třeba provést liché prodloužení funkce  $f$  na interval  $(-1, 1)$ .

Toto prodloužení má tvar

$$f_L(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in (0, 1), \\ -x^2 & \text{pro } x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Dále pokračujeme úplně stejně jako v případě standardní trigonometrické Fourierovy řady, pouze namísto funkce  $f$  na intervalu  $(0, 1)$  uvažujeme funkci  $f_L$  na intervalu  $(-1, 1)$  (půlperioda je nyní  $p = 1$ ). Máme tedy  $a_0 = a_k = 0$  a

$$b_k = \int_{-1}^1 f_L(x) \sin \frac{k\pi x}{1} dx.$$

Obě funkce v integrandu jsou liché, jejich součin je funkce sudá, takže můžeme psát

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 f_L(x) \sin k\pi x dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x dx = 2 \int_0^1 x^2 \sin k\pi x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \sin k\pi x \\ u' = 2x \quad v = -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \end{array} \right| = -\frac{2}{k\pi} [x^2 \cos k\pi x]_0^1 + \frac{4}{k\pi} \int_0^1 x \cos k\pi x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos k\pi x \\ u' = 1 \quad v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right| = -\frac{2}{k\pi} \cos k\pi + \frac{4}{k^2\pi^2} [x \sin k\pi x]_0^1 - \frac{4}{k^2\pi^2} \int_0^1 \sin k\pi x dx \\ &= -\frac{2}{k\pi} (-1)^k + \frac{4}{k^3\pi^3} [\cos k\pi x]_0^1 = -\frac{2}{k\pi} (-1)^k + \frac{4}{k^3\pi^3} [(-1)^k - 1] \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[ -(-1)^k + \frac{2}{k^2\pi^2} ((-1)^k - 1) \right]. \end{aligned}$$

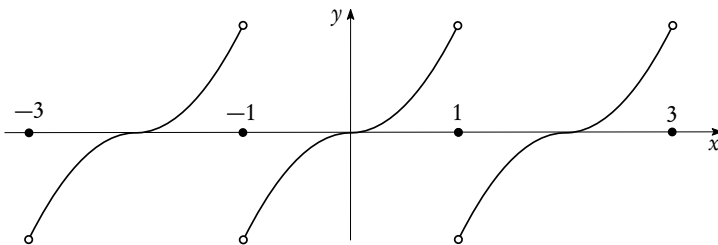
Výsledná řada potom je

$$\Phi_{f_L}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ -(-1)^k + \frac{2}{k^2\pi^2} ((-1)^k - 1) \right] \sin k\pi x.$$

Funkce  $f_L$  splňuje předpoklady Dirichletovy věty,  $\Phi_{f_L}$  tedy konverguje podle této věty k  $f_L$  na  $(-1, 1)$ , a v bodech  $x = \pm 1$  k hodnotě

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow -1+} (-x^2) + \lim_{x \rightarrow -1-} x^2 \right) = \frac{1}{2} (-1 + 1) = 0.$$

Na celém oboru reálných čísel pak řada konverguje k periodickému prodloužení, které je zobrazeno na obrázku 4.4. Vidíme, že součtová funkce není spojitá na  $\mathbb{R}$  a tudíž konvergence řady zde nemůže být stejnoměrná.



Obrázek 4.4: Součtová funkce sinové řady funkce  $f(x) = x^2$  na  $(0, 1)$

Obrat'me nyní pozornost ke kosinové řadě. Sudým prodloužením funkce  $f$  na interval  $(-1, 1)$  je funkce  $f_S(x) = x^2$ ,  $x \in (-1, 1)$  (na funkčním předpisu se tedy nic nemění,  $f$  je totiž sudá na  $(-1, 1)$ ). Nyní máme  $b_k = 0$  a

$$a_0 = \int_{-1}^1 f_S(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_{-1}^1 f_S(x) \cos k\pi x \, dx = | \text{„sudá} \times \text{sudá} = \text{sudá} \text{“} | = 2 \int_0^1 x^2 \cos k\pi x \, dx \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \cos k\pi x \\ u' = 2x \quad v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right| = \frac{2}{k\pi} \underbrace{[x^2 \sin k\pi x]_0^1}_{=0} - \frac{4}{k\pi} \int_0^1 x \sin k\pi x \, dx \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin k\pi x \\ u' = 1 \quad v = -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \end{array} \right| = \frac{4}{k^2\pi^2} [x \cos k\pi x]_0^1 - \frac{4}{k^2\pi^2} \int_0^1 \cos k\pi x \, dx \\
 &= \frac{4}{k^2\pi^2} (-1)^k - \frac{4}{k^3\pi^3} \underbrace{[\sin k\pi x]_0^1}_{=0} = (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2}.
 \end{aligned}$$

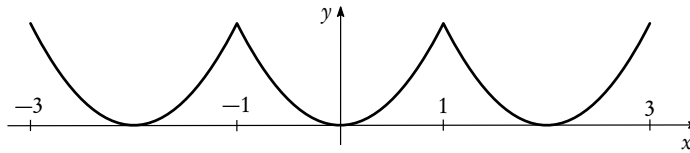
Výsledná kosinová řada má tedy tvar

$$\Phi_{f_S}(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \cos k\pi x.$$

Funkce  $f_S(x) = x^2$  splňuje předpoklady Dirichletovy věty, je spojitá na  $(-1, 1)$ , přičemž

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2$$

a tedy řada  $\Phi_{f_S}$  konverguje k funkci  $x^2$  na uzavřeném intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Součtová funkce je pak periodickým prodloužením, které je znázorněno na obrázku 4.5. Řada také podle obou vět o stejnoměrné konvergenci (věty 4.15 a 4.17) konverguje k součtové funkci stejnoměrně na  $\mathbb{R}$ .



Obrázek 4.5: Součtová funkce kosinové řady funkce  $f(x) = x^2$  na  $(0, 1)$

Porovnáme-li předcházející výsledky, obdrželi jsme dvě různá vyjádření funkce  $x^2$  pomocí řady na intervalu  $(0, 1)$ :

$$x^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ -(-1)^k + \frac{2}{k^2\pi^2} ((-1)^k - 1) \right] \sin k\pi x = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \cos k\pi x$$

pro všechna  $x \in (0, 1)$ .

b) K určení součtu zadaných řad využijeme znalosti kosinové řady. Protože platí

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \cos k\pi x \quad \text{pro všechna } x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

dosazením hodnoty  $x = 1$  máme

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{a odtud} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(viz také příklad 1.15b), kde jsme tento součet určili přibližně). Dosadíme-li hodnotu  $x = 0$ , dostáváme

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \quad \text{a odtud} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Závěrem poznamenejme, že trigonometrické Fourierovy řady mají široké uplatnění v úlohách technické praxe, ve kterých se objevují periodické děje (jakými jsou např. akustické či elektromagnetické signály). Myšlenkou je aproximovat periodický, ale složitý signál částečným součtem trigonometrické Fourierovy řady – tento součet sice může mít poměrně mnoho členů, ale zato obsahuje pouze „hezké“ funkce sin a cos. Výpočet příslušných koeficientů je v praxi potřeba provést numericky. Vedle aplikačního potenciálu mají Fourierovy řady i nezanedbatelný teoretický význam, v podsekcí 17.4 je využijeme při hledání řešení určité parciální diferenciální rovnice.

### Příklady k procvičení

**Cvičení 4.22.** Určete trigonometrickou Fourierovu řadu funkce  $f$  na daném intervalu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = |x|, & x \in (-\pi, \pi); \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \in (-\pi, 0), \\ x, & x \in (0, \pi); \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = e^x, & x \in (0, 2\pi); \quad \text{d) } f(x) = \sinh x, \quad x \in (-\pi, \pi); \\ \text{e) } f(x) = x, & x \in (-1, 1); \quad \text{f) } f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \in (1, 2). \end{cases} \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ ; b)  $-\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx + \frac{1 - 2(-1)^k}{k} \sin kx \right)$ ;  
 c)  $\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos kx}{1+k^2} - \frac{k \sin kx}{1+k^2} \right) \right\}$ ; d)  $\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{1+k^2} \sin kx$ ;  
 e)  $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\pi x$ ; f)  $\frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} \cos k\pi x - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \right)$ .

**Cvičení 4.23.** V kosinovou Fourierovu řadu rozviňte funkci:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x, & x \in (0, 1); \quad \text{b) } f(x) = 2 - x, \quad x \in (0, 2); \\ \text{c) } f(x) = x^2, & x \in (0, \pi); \quad \text{d) } f(x) = \sin x, \quad x \in (0, \pi/2). \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x$ ; b)  $1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}$ ;  
 c)  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$ ; d)  $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kx$ .

**Cvičení 4.24.** V sinovou Fourierovu řadu rozviňte funkci:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = 1 - x, & x \in (0, 1); \quad \text{b) } f(x) = x^2, \quad x \in (0, 1); \\ \text{c) } f(x) = \cos x, & x \in (0, \pi/2); \quad \text{d) } f(x) = \cosh x, \quad x \in (0, \pi). \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\pi x$ ; b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{k\pi} \sin 2k\pi x - \frac{2\pi^2(2k-1)^2 + 8}{\pi^3(2k-1)^3} \sin(2k-1)\pi x \right)$ ;  
 c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kx$ ; d)  $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k \cosh \pi}{1+k^2} k \sin kx$

**Cvičení 4.25.** V sinovou a kosinovou Fourierovu řadu rozviňte funkci:

$$\text{a) } f(x) = x(\pi - x), \quad x \in (0, \pi); \quad \text{b) } f(x) = x \cos x, \quad x \in (0, \pi).$$

*Výsledky.* a)  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \sin(2k+1)x = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2kx$ ;  
 b)  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(-1)^k}{k^2 - 1} \sin kx = -\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \cos x - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 + 1}{(4k^2 - 1)^2} \cos 2kx$ .



## Kapitola 2

# Obyčejné diferenciální rovnice

### 5 Úvod do problematiky ODR

Mnohé fyzikální a jiné zákony lze popsat pomocí rovnic, v nichž jako neznámá vystupuje funkce jedné proměnné, přičemž tyto rovnice obsahují derivaci, příp. derivace neznámé funkce. Tyto rovnice se nazývají *obyčejné diferenciální rovnice* a jejich studiu se budeme věnovat v celé zbývající části této kapitoly.

**Příklad 5.1 — motivační.** Částka 1000 Kč se ročně úročí 10%. Na konci roku je pak na účtu částka 1100 Kč. Jestliže se úroky připisují půlročně, úročí se od poloviny roku částka 1050 Kč a na konci roku je na účtu částka 1102,50 Kč. Výpočet lze teoreticky stále zužovat: úročení probíhá čtvrtletně, měsíčně, týdně, denně atd. Vzniká tedy otázka, kolik činí výše částky na účtu po roce spojitého úročení (tj. za předpokladu, že částka je úročena nepřetržitě).

Nechť  $y(t)$  vyjadřuje výši částky v čase  $t$ , přičemž hodnota závisle proměnné  $y$  je udávána v korunách a hodnota nezávisle proměnné  $t$  v rocích. Uvažujme-li nejprve roční úročení, pak výše částky v libovolném čase  $t \geq 1$  lze určit jako řešení rovnice

$$y(t+1) = y(t) + \frac{y(t)}{10}, \quad t \geq 1,$$

přičemž hodnota  $y(t)$  v čase  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  je dána počátečním vkladem, tedy  $y(t) = 1000$  pro tuto  $t$ . Odtud snadno ověříme, že  $y(1) = y(0) + 0.1y(0) = 1100$ . Jsou-li úroky připisovány půlročně, pak výši částky  $y(t)$  v libovolném čase  $t \geq 1/2$  určíme jako řešení rovnice

$$y\left(t + \frac{1}{2}\right) = y(t) + \frac{y(t)}{20}, \quad t \geq \frac{1}{2},$$

přičemž  $y(t) = 1000$  pro  $t \in \langle 0, 1/2 \rangle$ . Odtud tedy  $y(1) = 1102,50$ . Označme nyní  $h$  délku časového úseku (v rocích), po jehož uplynutí dochází k opětovnému připisování úroků (v předcházejících úvahách jsme volili  $h = 1$  a  $h = 1/2$ ). Pak hodnotu  $y(t)$  v libovolném čase  $t \geq h$  určíme jako řešení rovnice

$$y(t+h) = y(t) + \frac{y(t)}{10}h, \quad t \geq h,$$

přičemž  $y(t) = 1000$  pro  $t \in \langle 0, h \rangle$ . Poslední rovnici lze přepsat na tvar

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{y(t)}{10}, \quad t \geq h. \quad (5.1)$$

Při spojitém úročení je nyní třeba provést limitní přechod pro  $h \rightarrow 0$  (formálně vzato, jedná se o limitu zprava; je ale snadné ověřit, že vztah (5.1) má smysl i pro záporná  $h$ ). Tím podle definice derivace rovnice (5.1) nabývá tvar

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{y(t)}{10}, \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

přičemž  $y(t) = 1000$  pro  $t = 0$ . Rovnice (5.2) je rovnicí, v níž jako neznámá vystupuje funkce  $y$  a tato rovnice obsahuje derivaci funkce  $y$ . Jedná se tedy o rovnici diferenciální (na rozdíl od vztahu (5.1), který není diferenciální rovnicí pro žádné  $b > 0$ ). Později uvidíme, že jediným řešením rovnice (5.2) vyhovujícím podmínce  $y(0) = 1000$  je funkce

$$y(t) = 1000e^{t/10}.$$

Odtud tedy plyne, že výše částky (v korunách) po roce spojitého úročení činí  $y(1) \doteq 1105,17$ .

Uvedený příklad naznačuje některé otázky, kterými se v této sekci budeme zabývat: Jak vypadá diferenciální rovnice ve vhodném obecném tvaru? V jakém smyslu chápeme její řešení? Stačí k jednoznačnému popisu zkoumaného děje diferenciální rovnice sama o sobě, nebo k ní musí přistoupit nějaké doplňující podmínky?

## 5.1 Základní pojmy

V následujících definicích budeme postupně zavádět základní pojmy týkající se diferenciálních rovnic. Tyto pojmy budeme současně ilustrovat na příkladech.

**Definice 5.2.** a) *Obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)* nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje (či vyskytují) derivace hledané funkce jedné proměnné.  
 b) *Řádem* diferenciální rovnice nazýváme největší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici.  
 c) Diferenciální rovnici nazýváme *lineární*, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i její derivaci (případně derivacím). Zkratka: LODR.  
 d) Označení ODR1 (či LODR1) značí obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu (či LODR prvního řádu). Zkratka ODR $n$  a LODR $n$  značí ODR a LODR  $n$ -tého řádu.

**Příklady 5.3.** a) Rovnice  $(y'(x))^3 - 2x^2y(x) = \cos x$  je nelineární ODR1 (pro neznámou funkci  $y$  proměnné  $x$ ). Tuto rovnici budeme stručně zapisovat ve tvaru

$$(y')^3 - 2x^2y = \cos x$$

(proměnnou  $x$  u neznámé funkce  $y$  tedy nebudeme obvykle vypisovat).

b) Rovnice

$$y''' - 5y'' + 3y = e^x$$

je LODR3. I v tomto příkladu je  $y = y(x)$  hledaná funkce a  $x$  nezávisle proměnná.

c) Rovnice  $(y^2 + 1)dy = 2x dx$  je ODR1 vyjádřená pomocí diferenciálů. Dá se přepsat na tvar

$$(y^2 + 1)y' = 2x$$

(a naopak), kde  $y' = dy/dx$  je derivace hledané funkce  $y = y(x)$  a  $x$  je nezávisle proměnná.

**Poznámka 5.4.** Přívlástek „obyčejná“ budeme zpravidla vynechávat.

Diferenciální rovnice mají zásadní význam při řešení mnohých problémů fyzikálních, technických a inženýrských. Bez diferenciálních rovnic by nebylo možné provádět různé výpočty související s pružností a pevností materiálu, s řízením složitých jaderných reakcí, s lety do vesmíru apod. V dalším textu budeme postupně zmiňovat alespoň některé ze základních aplikací diferenciálních rovnic, a to vždy v návaznosti na probíranou látku.

**Příklady 5.5.** a) Rovnice

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U \sin \omega t$$

je LODR1 pro hledanou funkci  $i = i(t)$ , která vyjadřuje závislost intenzity elektrického proudu na čase v sériovém obvodu skládajícím se z ohmického odporu  $R$  a cívky s indukčností  $L$ , přičemž tento obvod je připojen na zdroj střídavého napětí  $u = U \sin \omega t$  ( $U$  je amplituda a  $\omega$  úhlová frekvence).

b) Rovnice

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, t) \quad (5.3)$$

či obecněji

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

je matematické vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m$  po ose  $x$ . Je to ODR2 pro hledanou funkci  $x = x(t)$ , která vyjadřuje polohu hmotného bodu na ose  $x$ . Druhá derivace  $d^2x/dt^2$  má fyzikální význam zrychlení hmotného bodu; daná funkce  $f$ , resp.  $F$  vyjadřuje výslednou vnější sílu, která působí na hmotný bod.

**Definice 5.6 — řešení ODR.** a) Řešením ODR $n$  nazýváme libovolnou  $n$ -krát spojitě derivovatelnou funkci na nějakém intervalu  $I$ , která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu  $I$  identickou rovnost.

b) Graf funkce, která je řešením dané ODR $n$ , nazýváme *integrální křivkou* této diferenciální rovnice.

**Poznámky 5.7.** a) Často se řešení dané ODR uvažují na uzavřených intervalech  $I$ . V takovém případě se derivací řešení v krajních bodech rozumí příslušná jednostranná derivace.

b) Necht'  $y = y(x)$ , resp.  $y^* = y^*(x)$  jsou řešení dané ODR na intervalu  $I$ , resp.  $I^*$ . Necht'  $I^* \subset I$ ,  $I^* \neq I$  a necht' pro každé  $x \in I^*$  platí  $y^*(x) = y(x)$ . Pak  $y^*$  je *zúžením* řešení  $y$  na interval  $I^*$  a  $y$  je *prodloužením* řešení  $y^*$  na interval  $I$ . Nelze-li některé řešení dané ODR prodloužit, pak se toto řešení nazývá *maximální řešení*. Právě tato řešení budeme v našich úlohách zpravidla hledat (přívlastek maximální budeme vynechávat).

V následujícím příkladu uvedeme jednu aplikaci rovnice (5.3) a vyložíme pojmy z definice 5.6. Příklad bude současně motivací pro zavedení dalších pojmů.

**Příklad 5.8.** Uvažujme hmotný bod (kuličku) upevněný mezi dvěma pružinami a kmitající v ose  $x$ . Jestliže zanedbáme tíhu kuličky a obou pružin (což musíme, chceme-li mít kmity v ose  $x$ ), potom výsledná vnější síla, která na kuličku působí, je  $F = -kx$ , kde  $k$  je součet tuhostí obou pružin. Záporné znaménko znamená, že síla  $F$  působí proti směru výchylky; přitom je síla  $F$  přímo úměrná výchylce  $x$ . Podle druhého Newtonova zákona

$$ma = F,$$

kde  $m$  je hmotnost kuličky a  $a = d^2x/dt^2$  její zrychlení, takže

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

čili po snadné úpravě

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (5.4)$$

Položíme-li pro stručnost

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

můžeme psát (5.4) ve tvaru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (5.5)$$

kde tečkou značíme derivaci podle  $t$ , má-li tato proměnná význam času. Veličina  $\omega$  se nazývá úhlová (též kruhová) frekvence pohybu a platí pro ni

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

kde  $T$  je doba jedné periody pohybu.

V sekci věnované řešení LODR2 se dozvíme, že každé řešení rovnice (5.5) lze psát ve tvaru

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (5.6)$$

kde  $C_1, C_2$  jsou obecné konstanty. Konkrétní volbou dvojic  $C_1, C_2$  dostaneme jednotlivá řešení rovnice (5.5).

Přesvědčme se nyní, že funkce (5.6) vyhovuje rovnici (5.5): Derivováním (5.6) dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t, \\ \ddot{x}(t) &= -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = -\omega^2 x(t). \end{aligned}$$

Anulováním posledního vztahu dostaneme (5.5).

V aplikacích nás vždy zajímá pohyb za konkrétních podmínek. Např. kuličku vychýlíme do vzdálenosti  $x_0$  od klidové polohy ( $x_0$  má zápornou hodnotu, vychýlíme-li kuličku nalevo) a pustíme. V okamžiku puštění kuličky začneme odčítat čas (spustíme stopky). Realizovali jsme tak tyto *počáteční podmínky*:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (5.7)$$

kde  $\dot{x}$  má fyzikální význam rychlosti.

Vypočteme hodnoty konstant  $C_1, C_2$  z (5.6) pro případ (5.7). Platí

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1, \\ 0 &= \dot{x}(0) = -C_1 \omega \sin 0 + C_2 \omega \cos 0 = C_2 \omega; \end{aligned}$$

tedy  $C_1 = x_0, C_2 = 0$  a odtud

$$x(t) = x_0 \cos \omega t. \quad (5.8)$$

V obecném případě počátečních podmínek

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (5.9)$$

dostaneme  $C_1 = x_0, C_2 \omega = v_0$ , a protože  $\omega = 2\pi/T$ , platí v případě (5.9)

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 T}{2\pi} \sin \omega t,$$

což je fyzikálně v pořádku, protože obě získané konstanty mají fyzikální rozměr délky a součin  $\omega t$  je bezrozměrná veličina.

## 5.2 Počáteční a okrajová úloha

V souladu s uvedenými příklady budeme dále uvažovat ODR $_n$  v tzv. *normálním tvaru*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5.10)$$

kde  $f$  je reálná funkce definovaná na  $(n+1)$ -rozměrné oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Daná rovnice je tedy v normálním tvaru explicitně rozřešena vzhledem k derivaci nejvyššího řádu.

Dále nechť  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ . Úloha určit řešení rovnice (5.10), které vyhovuje  *$n$  počátečním podmínkám*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se nazývá *počáteční úloha* (nebo také *Cauchyho úloha*). Původ názvu počátečních podmínek (a tedy i počáteční úlohy) plyne z toho, že se nejčastěji předepisují v bodě, který reprezentuje časový počátek.

Speciálně počáteční úloha pro ODR1 je tvaru

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

a pro ODR2 pak

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Kvalitativně jiným problémem je tzv. *okrajová úloha*. Tato úloha se uvažuje zejména v případě ODR2, kdy nezávisle proměnná  $x$  má význam délky. Jde o úlohu určit řešení rovnice

$$y'' = f(x, y, y')$$

splňující tzv. *okrajové podmínky*, které mohou být např. tvaru

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

nebo

$$y'(a) = d_a, \quad y'(b) = d_b,$$

kde  $y_a, y_b, d_a, d_b$  jsou dané reálné hodnoty a  $a, b$  jsou koncové body intervalu  $I$ , ve kterém hledáme řešení ODR2. Studiu okrajových úloh pro ODR2 je věnována sekce 14.

### 5.3 Druhy řešení ODR a geometrická interpretace ODR1

Přirozenou snahou je získat všechna řešení dané ODR. To však může být pro některé nelineární ODR (tj. ty ODR, které nejsou lineární) obtížný úkol. Není totiž k dispozici univerzální kritérium, které umožňuje rozpoznat, zda nalezená řešení dané ODR jsou všechna. Úvahy provedené v příkladu 5.8 naznačují, že v lineárním případě je situace jednodušší. Pro danou LODR2 je každé její řešení tvaru (5.6), který závisí na dvou obecných konstantách  $C_1, C_2$ . Konkrétní specifikaci těchto konstant lze provést dosazením hodnot z příslušných počátečních podmínek. To motivuje zavedení následujících pojmů:

a) *Obecným řešením* LODR $n$  rozumíme funkci závisící na  $n$  obecných reálných konstantách  $C_1, \dots, C_n$  takových, že každou volbou  $C_1, \dots, C_n$  lze získat řešení uvažované rovnice.

b) *Partikulární řešení* LODR $n$  je takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant  $C_1, \dots, C_n$ .

Oba předcházející pojmy lze v podobném smyslu rozšířit i pro nelineární ODR $n$ . Toto rozšíření je však spojeno s některými komplikacemi, jejichž diskuze přesahuje rámec tohoto textu. Omezíme se proto pouze na konstatování, že v nelineárním případě nemusí obecné řešení dané ODR $n$  zahrnout všechna její řešení. Tato řešení, která nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant  $C_1, \dots, C_n$ , se nazývají *výjimečná řešení* (takových řešení může pro danou rovnici být dokonce nekonečně mnoho).

Uvedené pojmy ilustrujeme na příkladu rovnice (5.5). Jejím obecným řešením je funkce (5.6). Dosazením počátečních podmínek (5.7) do obecného řešení jsme získali partikulární řešení (5.8). Výjimečné řešení rovnice (5.5) nemá (příklad rovnice mající výjimečné řešení bude uveden později).

Nyní uvedeme několik poznámek ke geometrickému významu ODR. V případě rovnic prvního řádu nám jeho porozumění umožní získat alespoň přibližnou geometrickou představu o charakteru jednotlivých integrálních křivek dané rovnice. Skutečně, diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = f(x, y) \tag{5.11}$$

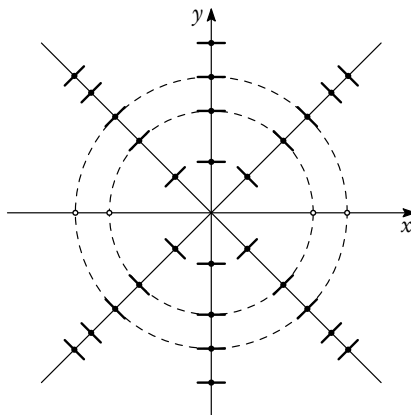
přirazuje každému bodu  $(x, y)$  definičního oboru  $\Omega$  funkce  $f$  směrnicí  $y'$  tečny příslušné integrální křivky. Tím je v  $\Omega$  dáno pole směrů, tzv. *směrové pole*. Toto směrové pole lze graficky znázornit tak, že zakreslíme dostatečně „mnoho“ bodů  $(x, y) \in \Omega$  a tečny příslušných integrálních křivek o směrnicích  $f(x, y)$  vyznačíme „krátkými“ úsečkami. Z geometrického hlediska řešit diferenciální rovnici (5.11) znamená „vepsat“ do daného směrového pole křivky tak, aby jejich tečny dané směrové pole „respektovaly“.

U rovnice druhého řádu je každému bodu  $(x, y)$  a směru  $y'$  přiřazena hodnota druhé derivace (tím je tedy předepsána křivost hledané integrální křivky). Rovnice vyššího řádu již nemají tak jednoduchou geometrickou interpretaci.

**Příklad 5.9.** Sestrojme směrové pole diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

**Řešení.** Funkce  $f(x, y) = -x/y$  je definována pro všechna reálná  $x$  a  $y$  s výjimkou bodů ležících na ose  $x$ . Položíme-li  $y' = k$ , kde  $k \in \mathbb{R}$ , obdržíme otevřené polopřímky  $x = -ky$  ( $y \neq 0$ ). Jsou to křivky, v jejichž bodech je danou rovnicí předepsána táž hodnota směrnice  $y' = k$ ; říká se jim *izokliny*. Pomocí izoklin pak snadno vidíme, že směrové pole dané rovnice má tvar znázorněný na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Izokliny a směrové pole rovnice  $y' = -x/y$

Odtud také plyne, že v horní polorovině jsou integrálními křivkami půlkružnice  $y = \sqrt{C - x^2}$ , zatímco v dolní polorovině to jsou půlkružnice  $y = -\sqrt{C - x^2}$ , kde  $C \in \mathbb{R}^+$ .

### Příklady k procvičení

**Cvičení 5.10.** Sestrojte směrové pole diferenciální rovnice:

a)  $y' = x - \sqrt{y}$ ;

b)  $y' = y - x^2$ ;

c)  $y' = y/(x - y)$ .

## 6 Základy teorie a metody řešení ODR I

V této sekci se zaměříme na diferenciální rovnice prvního řádu. Předmětem našeho zájmu budou především tyto otázky: Za jakých podmínek má příslušná počáteční úloha právě jedno (resp. alespoň jedno) řešení? Lze tato řešení nalézt v exaktním (přesném) tvaru? Pokud ne, lze je nalézt alespoň v přibližném tvaru?

### 6.1 Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy pro ODR I

Základní teoretickou otázkou v souvislosti s diferenciálními rovnicemi je problém jejich řešitelnosti, příp. jednoznačné řešitelnosti. Některé příklady, pojmy a úvahy provedené v předcházející sekci naznačily, že pokud uvažujeme diferenciální rovnici samotnou, pak jejich řešení (pokud existují) může být i nekonečně mnoho. K jednoznačnosti řešení bylo třeba doplnit počáteční podmínku (či podmínky). V dalším textu tyto úvahy postavíme na teoretický základ, a vyšetříme tedy otázku existence a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y) \tag{6.1}$$

splňujícího počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.2}$$

Odpověď na tuto otázku dává

■ **Věta 6.1 — Picardova.** *Nechť jsou splněny následující dva předpoklady:*

(P1) *Funkce  $f$  je spojitá na nějakém okolí  $O \subset \mathbb{R}^2$  bodu  $(x_0, y_0)$ ;*

(P2) *Funkce  $f$  má na  $O$  ohraničenou parciální derivaci  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .*

*Potom existuje jediné řešení  $y$  počáteční úlohy (6.1), (6.2), které je definované na nějakém intervalu obsahujícím počáteční bod  $x_0$  ve svém vnitřku.*

*Idea důkazu.* Hlavní myšlenka důkazové metody spočívá v zavedení tzv. *posloupnosti Picardových aproximací*. Členy této posloupnosti jsou funkce  $y_n$ , které definujeme pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , kde  $\delta > 0$  je vhodné (dostatečně malé) číslo, a pro všechna  $n = 0, 1, 2, \dots$  takto:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt, \\ &\dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \\ &\dots \end{aligned}$$

O této posloupnosti je potřeba postupně dokázat následující vlastnosti:

1. Jednotlivé členy Picardovy posloupnosti leží v oblasti  $O$ ;
2. Existuje  $M > 0$  takové, že platí

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M^n}{n!} |x - x_0|^n \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

3. Necht'  $n \rightarrow \infty$ . Pak Picardova posloupnost konverguje na intervalu  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  stejnoměrně k nějaké funkci  $y^*$ , která je na tomto intervalu spojitá. Takto určená funkce  $y^*$  má spojitou derivaci a navíc vyhovuje na daném intervalu diferenciální rovnici (6.1) i počáteční podmínce (6.2).

4. Funkce  $y^*$  je jediným řešením počáteční úlohy (6.1), (6.2). □

**Poznámka 6.2.** I z uvedeného nástinu důkazové metody je patrná její konstruktivnost. Metoda totiž dává návod, jak požadované řešení hledat. Ilustrujme tuto skutečnost na příkladu počáteční úlohy

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1. \tag{6.3}$$

Protože  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  a  $f(x, y) = \lambda y$ , Picardova posloupnost je pro danou úlohu tvaru

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x \lambda dt = 1 + \lambda x, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x \lambda(1 + \lambda t) dt = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!}, \\ &\dots \\ y_n(x) &= 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda x)^n}{n!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Provedeme-li limitní přechod  $n \rightarrow \infty$ , pak podle důkazu Picardovy věty je vzniklá limitní funkce této posloupnosti (v důkazu označená jako  $y^*$ ) hledaným řešením počáteční úlohy (6.3), a to na nějakém intervalu obsahujícím počátek. Otázkou samozřejmě je, zda jsme schopni tuto limitní funkci explicitně

nalézt. Ve většině případů bývá odpověď záporná. I tehdy má ale provedená konstrukce smysl, neboť hledané řešení pak můžeme určit alespoň přibližně, a to jeho aproximací pomocí vhodného členu  $y_n$  této posloupnosti (intuitivně lze očekávat, že čím bude  $n$  větší, tím bude přesnost aproximace „lepší“).

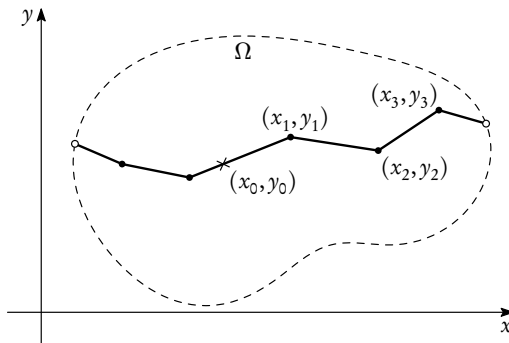
V našem speciálním případě však limitní funkci schopni určit jsme. Podle vztahu (3.17), člen  $y_n$  totiž představuje  $n$ -tý částečný součet Taylorovy řady funkce  $e^{\lambda x}$ , která je (jak se můžeme snadno přesvědčit dosazením) skutečně přesným řešením počáteční úlohy (6.3).

Když předpoklad (P2) Picardovy věty vynecháme, existence řešení bude zaručena, ne však jednoznačnost. Platí totiž tato věta:

■ **Věta 6.3 — Peanova.** *Nechť funkce  $f$  splňuje předpoklad (P1) Picardovy věty. Potom existuje alespoň jedno řešení počáteční úlohy (6.1), (6.2), které je definované na nějakém intervalu obsahujícím počáteční bod  $x_0$  ve svém vnitřku.*

*Idea důkazu.* Důkaz Peanovy věty je poměrně obtížný a nespočívá v pouhé modifikaci důkazu Picardovy věty. Zde totiž předpoklad (P2) hraje klíčovou úlohu také v důkazu existence řešení (nikoliv tedy pouze jeho jednoznačnosti). Proto je potřeba volit jiný způsob dokazování. Jednou z cest, které vedou relativně rychle k cíli, je využití věty, jež je spojována se jmény G. Ascoli a C. Arzelà. Vzhledem k náročnosti celého důkazu se omezíme na interpretaci základní myšlenky.

Uvažujme diferenciální rovnici (6.1) a počáteční podmínku (6.2). Z bodu  $(x_0, y_0)$  vedme přímku o směrnici  $f(x_0, y_0)$ . Na této přímce zvolme bod  $(x_1, y_1)$ , kde  $x_0 < x_1$  (viz obrázek 6.1) a proložme jím přímku o směrnici  $f(x_1, y_1)$ . Na ní opět zvolme bod  $(x_2, y_2)$ , kde  $x_1 < x_2$ , a celý postup opakujeme. Získáme tak lomenou čáru, kterou bychom mohli analogicky prodloužit také nalevo od bodu  $(x_0, y_0)$ . Budeme ji nazývat *Eulerovou lomenou čarou*.



Obrázek 6.1: Eulerova lomená čára (k důkazu Peanovy věty)

Z obrázku je zřejmé, že jsou-li úsečky obsažené v Eulerově lomené čáře dostatečně krátké, může tato čára být rozumnou aproximací hledané integrální křivky procházející bodem  $(x_0, y_0)$ . Navíc lze sestavit posloupnost Eulerových lomených čar, která „konverguje“ k hledané integrální křivce (pokud tato existuje). □

**Poznámka 6.4.** Picardova věta i Peanova věta mají lokální charakter. Existence řešení je totiž zaručena pouze v nějakém okolí bodu  $x_0$ . Mějme např. počáteční úlohu

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Tato úloha má podle Picardovy věty jednoznačně určené řešení, neboť

$$f(x, y) = 1 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

jsou spojité funkce pro všechna reálná  $x$  a všechna reálná  $y$ . Neplyne však odtud, že toto řešení existuje také pro všechna reálná  $x$ . Dosazením se lze snadno přesvědčit, že (jediným) řešením tohoto problému je funkce  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Předpoklad (P2) Picardovy věty lze různými způsoby oslabit, nelze ho však vynechat. Jestliže tak učiníme, máme Peanovou větou zaručenu existenci řešení, nikoliv však jeho jednoznačnost. Tuto skutečnost ilustrujeme na příkladu.

**Příklad 6.5.** Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = 3y^{2/3}, \quad (6.4)$$

$$y(0) = 0. \quad (6.5)$$

Protože funkce  $f(x, y) = 3y^{2/3}$  je spojitá na (dokonce jakémkoliv) okolí počátečního bodu  $(0, 0)$ , má podle Peanovy věty počáteční úloha (6.4), (6.5) alespoň jedno řešení.

Protože

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y^{-1/3},$$

je derivace  $\frac{\partial f}{\partial y}$  neohrazená na každém okolí bodu  $(0, 0)$  (v samotném bodu dokonce ani neexistuje), a jednoznačnost řešení tedy větou 6.1 zaručenu nemáme. Dosazením můžeme ihned ověřit, že úloha (6.4), (6.5) připouští dvě řešení, totiž  $y(x) = 0$  a  $y(x) = x^3$ . Ve skutečnosti je těchto řešení nekonečně (přesněji nespočetně) mnoho. Mohou být poskládána ze soustavy křivek

$$y(x) = (x + C)^3 \quad (6.6)$$

a nulového řešení

$$y(x) = 0 \quad (6.7)$$

tak, že uvedená řešení různě napojujeme: Necht'  $a < 0 < b$  jsou dvě libovolná reálná čísla. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} (x - a)^3 & \text{pro } x \leq a, \\ 0 & \text{pro } a < x < b, \\ (x - b)^3 & \text{pro } x \geq b \end{cases}$$

jsou také řešení úlohy (6.4), (6.5) (viz obrázek 6.2). Přesněji řečeno, jedná se o výjimečná řešení rovnice (6.4) (podle definice z odstavce 5.3). Dodejme ještě, že výjimečným řešením je i nulové řešení (6.7), zatímco soustava funkcí (6.6) představuje obecné řešení rovnice (6.4).

## 6.2 Analytické metody řešení ODR1

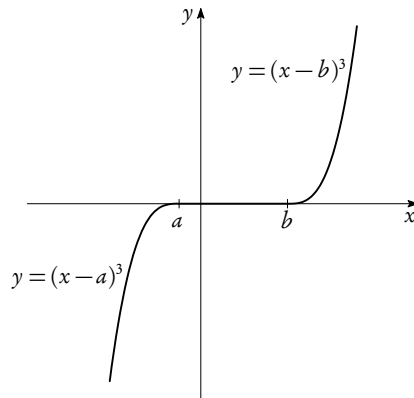
V této části uvedeme několik základních typů ODR1, jejichž řešení lze nalézt v tzv. uzavřeném tvaru. Seznámíme se přitom s metodami umožňujícími vyjádření přesného řešení dané rovnice, a to po konečném počtu kroků.

### A. ODR1 se separovanými proměnnými

Je tvaru

$$y' = g(x)h(y), \quad (6.8)$$

kde  $g$ ,  $h$  jsou funkce jedné proměnné. Platí:

Obrázek 6.2: Výjimečné řešení rovnice  $y' = 3y^{2/3}$ 

■ **Věta 6.6.** Necht' funkce  $g$ , resp.  $h$  je definovaná a spojitá na intervalu  $(a, b)$ , resp.  $(c, d)$  a necht' pro každé  $y \in (c, d)$  je  $h(y) \neq 0$ . Dále necht'  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in (c, d)$  jsou libovolné body. Pak má počáteční úloha

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (6.9)$$

právě jedno řešení  $y$  definované na nějakém intervalu  $I$ . Toto řešení je určeno vztahem

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_{x_0}^x g(s) ds \quad \text{pro každé } x \in I. \quad (6.10)$$

*Důkaz.* Předpokládejme, že funkce  $y$  je řešením úlohy (6.9) na intervalu  $I$ , tj. platí  $y'(x) = g(x)h(y(x))$  pro každé  $x \in I$  a  $y(x_0) = y_0$ . Vzhledem k tomu, že  $h(y) \neq 0$ , dostáváme po integraci od  $x_0$  do  $x$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = \int_{x_0}^x g(s) ds \quad \text{pro každé } x \in I.$$

Provedeme-li v integrálu na levé straně substituci  $t = y(s)$  a uvážíme-li, že  $y(x_0) = y_0$ , obdržíme (6.10).

Necht' nyní  $y_1, y_2$  jsou řešení počáteční úlohy (6.9) na intervalu  $I$ . Pak je

$$\int_{y_0}^{y_1(x)} \frac{ds}{h(s)} = \int_{x_0}^x g(s) ds, \quad \int_{y_0}^{y_2(x)} \frac{ds}{h(s)} = \int_{x_0}^x g(s) ds,$$

takže

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{ds}{h(s)} = 0 \quad \text{pro každé } x \in I.$$

Protože  $h(s) \neq 0$  pro  $s \in (c, d)$ , plyne odtud  $y_1(x) = y_2(x)$  pro každé  $x \in I$ . Ukázali jsme tedy, že pokud počáteční problém (6.9) má řešení, je toto řešení jediné a je dáno vztahem (6.10). Nyní ukážeme existenci tohoto řešení. Definujme funkci

$$F(x, y) := \int_{y_0}^y \frac{ds}{h(s)} - \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Z věty o implicitní funkci plyne, že v jistém okolí  $I$  bodu  $x_0$  existuje funkce  $y$  splňující relaci  $F(x, y(x)) = 0$  pro  $x \in I$ , tedy vztah (6.10). Ověříme, že tato funkce vyhovuje (6.9). Poněvadž  $F$  je spojitou funkcí a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{h(y)} \neq 0,$$

plyne z věty o implicitní funkci, že  $y$  má pro  $x \in I$  derivaci

$$y'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=y(x)} = g(x)h(y(x)).$$

Funkce  $y$  je tedy řešením počáteční úlohy (6.9) a důkaz je proveden.  $\square$

### Praktický postup

Za předpokladů uvedených v předcházejícím tvrzení je řešení počátečního problému (6.9) dáno výrazem (6.10). Vztah

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (6.11)$$

je tedy obecným řešením rovnice (6.8). Mnemotechnicky si vzorec (6.11) můžeme zapamatovat takto: V rovnici (6.8) místo  $y'$  napíšeme  $dy/dx$  a provedeme tzv. *separaci proměnných*. Výrazy s proměnnými  $x$ , resp.  $y$  od sebe oddělíme na obou stranách rovnice. Tím obdržíme formální rovnost

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx.$$

Obě strany rovnosti „integrujeme“ a na pravou stranu přepíšeme integrační konstantu, čímž obdržíme vzorec (6.11).

**Příklad 6.7.** Určeme všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{x}(2y + 1). \quad (6.12)$$

*Řešení.* Zvolíme postup popsáný v předcházející poznámce. Předpoklad  $x \neq 0$ ,  $2y + 1 \neq 0$  rozdělí rovinu na čtyři oblasti:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-1/2, \infty), & \Omega_2 &= (-\infty, 0) \times (-1/2, \infty), \\ \Omega_3 &= (-\infty, 0) \times (-\infty, -1/2), & \Omega_4 &= (0, \infty) \times (-\infty, -1/2). \end{aligned}$$

Ve všech těchto oblastech postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}(2y + 1), \\ \frac{dy}{2y + 1} &= \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{dy}{2y + 1} &= \int \frac{dx}{x}, \\ \frac{1}{2} \ln |2y + 1| &= \ln |x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Z tohoto tvaru lze hledanou funkci  $y$  vyjádřit explicitně na levé straně, čímž se získaný výsledek značně zpřehlední. Než tak učiníme, zapíšeme obecnou konstantu  $C_1$  ve tvaru  $(1/2) \ln C$ ,  $C > 0$ , což nám umožní jednoduše upravit výsledek.

Delogaritmováním a úpravou vztahu

$$\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln C, \quad C > 0$$

dostáváme

$$|2y + 1| = Cx^2, \quad C > 0.$$

Nyní přistoupíme k odstranění absolutní hodnoty. V oblastech  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  platí

$$2y + 1 = Cx^2, \quad C > 0.$$

V oblastech  $\Omega_3, \Omega_4$  je  $|2y + 1| = -(2y + 1)$ , a tedy

$$2y + 1 = Cx^2, \quad C < 0.$$

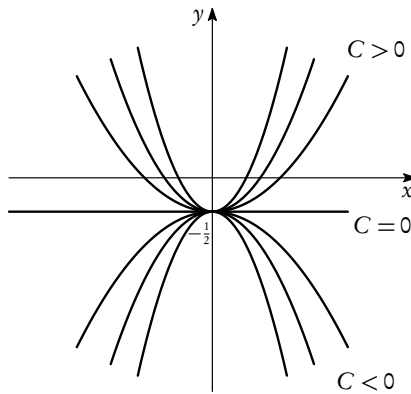
Dohromady tedy na uvedených oblastech platí

$$2y + 1 = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (6.13)$$

Nyní posoudíme případ  $2y + 1 = 0$  (tj.  $y = -1/2$ ). Dosazením do rovnice (6.12) snadno vidíme, že tato konstantní funkce je také řešením. Protože toto řešení lze obdržet ze vztahu (6.13) volbou  $C = 0$ , všechna řešení rovnice (6.12) jsou tvaru

$$y(x) = Cx^2 - \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

kde místo  $C/2$  píšeme  $C$  (je třeba si uvědomit, že uvedená řešení jsou definována buď na  $(0, \infty)$ , nebo na  $(-\infty, 0)$  vzhledem k definičnímu oboru pravé strany rovnice (6.12)). Tato řešení, která tvoří současně obecné řešení dané rovnice, představují jednoparametrickou soustavu parabol znázorněnou na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Integrální křivky rovnice  $y' = (2y + 1)/x$

Všimněme si, že každým bodem roviny, s výjimkou bodů ležících na ose  $y$ , prochází právě jedna integrální křivka dané rovnice. Jinak vyjádřeno, předepíšeme-li těmito body počáteční podmínku, bude mít odpovídající počáteční problém právě jedno řešení.

## B. ODR1 tvaru $y' = f(y/x)$

Rovnici

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.14)$$

lze snadno převést substitucí

$$y(x) = u(x)x \quad (\text{stručně: } y = ux) \quad (6.15)$$

na ODR1 se separovanými proměnnými. Vskutku, ze substituce (6.15) plyne

$$y' = u'x + u,$$

takže rovnice (6.14) přejde v rovnici

$$u'x + u = f(u)$$

neboli

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u),$$

což je ODR1 se separovanými proměnnými.

Odtud tedy dále pro  $x \neq 0$  a  $f(u) \neq u$  dostaneme rovnici v diferenciálním tvaru

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Její obecný integrál vyjadřuje vztah mezi proměnnými  $x$  a  $u$ . Ze vztahu (6.15) plyne

$$u = \frac{y}{x}.$$

Užitím tohoto vztahu v obecném integrálu dostaneme obecné řešení rovnice (6.14) v  $x$  a  $y$ .

**Příklad 6.8.** Nalezněme všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \quad (6.16)$$

*Řešení.* Rovnici (6.16) nejprve převedeme na požadovaný tvar. Úpravou pravé strany obdržíme rovnici

$$y' = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} - \left( \frac{y}{x} \right)^{-1} \right).$$

Položíme proto  $u = y/x$ , tedy  $y' = u'x + u$ , a daná rovnice se transformuje na tvar

$$u'x + u = \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right),$$

neboli

$$u' = -\frac{1}{x} \frac{u^2 + 1}{2u}. \quad (6.17)$$

Po převedení této rovnice na diferenciální tvar dostáváme

$$\frac{2u \, du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x},$$

a dále

$$\int \frac{2u}{u^2 + 1} \, du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Odtud integrací

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln|x| + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Po delogarithmování a odstranění absolutních hodnot dostáváme obecné řešení rovnice (6.17) ve tvaru

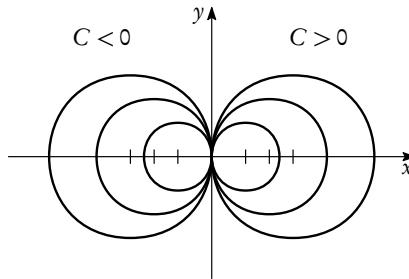
$$u^2 = \frac{C}{x} - 1, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zpětným dosazením substituce lze snadno určit obecné řešení rovnice (6.16) ve tvaru funkcí daných implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Obecné řešení tedy opět zahrnuje všechna řešení dané rovnice, a integrální křivky tvoří jednoparametrické soustavy půlkružnic se středem v bodě  $(C/2, 0)$  a poloměrem  $C/2$ .

Z obrázku 6.4 je rovněž patrné, že všemi body roviny, s výjimkou bodů ležících na souřadnicových osách, prochází právě jedna integrální křivka dané rovnice.

Obrázek 6.4: Integrální křivky rovnice  $y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$ 

### C. LODR1

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu má obecně tvar

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (6.18)$$

Někdy se též píše ve tvaru

$$y' + p(x)y = q(x),$$

tj.  $a(x) = -p(x)$ ,  $b(x) = q(x)$ . Je-li  $b(x) = 0$  pro všechna uvažovaná  $x$ , pak hovoříme o *homogenní* LODR1; v opačném případě se jedná o *nehomogenní* LODR1.

Předpokládejme dále, že funkce  $a$ ,  $b$  jsou spojité na intervalu  $I$ . Uvedeme nejobvyklejší metodu řešení rovnice (6.18), tzv. *metodu variace konstanty*. Řešení probíhá ve dvou krocích:

a) Řešíme nejprve přidruženou homogenní LODR1 ve tvaru

$$y' = a(x)y, \quad (6.19)$$

v níž můžeme separovat proměnné. Za předpokladu  $y \neq 0$  tedy dostáváme

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx,$$

a odtud po integraci

$$\ln|y| = \int a(x)dx + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Nyní užitím obvyklých úprav dostáváme obecné řešení  $y_b$  homogenní rovnice (6.19) ve tvaru

$$y_b(x) = C e^{\int a(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(volba  $C = 0$  zahrnuje vyloučený případ  $y = 0$ , který je rovněž řešením rovnice (6.19)).

b) Řešení původní nehomogenní rovnice (6.18) hledáme ve stejném tvaru, ale  $C$  již není číselná konstanta, nýbrž funkce proměnné  $x$ :

$$y(x) = C(x)u(x), \quad (6.20)$$

kde

$$u(x) := e^{\int a(x)dx}, \quad C(x) = ?$$

Obecné řešení nehomogenní LODR1 se tedy liší od obecného řešení homogenní LODR1 jen tím, že místo konstanty  $C$  nastoupí vhodná (zatím neurčená) funkce  $C(x)$ . Tu určíme tak, že vztah (6.20) dosadíme do (6.18). Protože podle (6.20)

$$y'(x) = C'(x)u(x) + C(x)u'(x),$$

dostaneme

$$C'(x)u(x) + C(x)u'(x) = a(x)C(x)u(x) + b(x),$$

čili (protože  $u$  je řešení homogenní rovnice)

$$C'(x)u(x) + C(x)\underbrace{[u'(x) - a(x)u(x)]}_{=0} = b(x);$$

odtud

$$C'(x)u(x) = b(x). \quad (6.21)$$

Protože  $u(x) > 0$ , lze rovnici (6.21) dělit  $u(x)$ , takže

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} dx + C = \int b(x)e^{-\int a(x)dx} dx + C,$$

kde  $C$  je obecná konstanta. Dosazením  $C(x)$  do vztahu (6.20) dostáváme obecné řešení rovnice (6.18), zahrnující všechna řešení této rovnice. Toto řešení je přitom definováno na intervalu  $I$ , tedy všude tam, kde jsou funkce  $a, b$  spojité.

**Příklad 6.9.** Nalezněme řešení počáteční úlohy

$$y' = \frac{1}{x}(2y + 1), \quad y(1) = 0.$$

*Řešení.* Daná rovnice již byla rozřešena v oddíle A jako rovnice se separovanými proměnnými. Současně je však i rovnicí lineární, neboť ji lze psát ve tvaru

$$y' = \frac{2}{x}y + \frac{1}{x} \quad \left(\text{tj. } a(x) = \frac{2}{x}, \quad b(x) = \frac{1}{x}\right). \quad (6.22)$$

Ilustrujme proto při řešení této rovnice také metodu variace konstanty:

a) Nejprve nalezneme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y' = \frac{2}{x}y.$$

Separací proměnných dostáváme pro  $x \neq 0$  a  $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= 2 \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, & C &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \ln|y| &= 2 \ln|x| + \ln|C|, & C &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ y_b(x) &= Cx^2, & C &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde volba parametru  $C = 0$  zahrnuje i nulové řešení  $y(x) = 0$ .

b) Metodou variace konstanty hledíme obecné řešení rovnice (6.22) ve tvaru

$$y(x) = C(x)x^2, \quad C(x) = ?$$

Neznámou funkci  $C(x)$  určíme dosazením tohoto vztahu do (6.22):

$$C'(x)x^2 + C(x)2x = \frac{2}{x}C(x)x^2 + \frac{1}{x}, \quad \text{tj.} \quad C'(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Odtud pak integrací dostáváme

$$C(x) = \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C,$$

kde  $C$  je obecná konstanta. Zpětným dosazením  $C(x)$  máme

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2x^2} + C\right)x^2 = Cx^2 - \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li nyní počáteční podmínku do obecného řešení, máme  $C = 1/2$ , a řešení daného počátečního úlohy je tedy tvaru

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad x \in (0, \infty).$$

**Poznámka 6.10.** ODR1, které jsou nelineární vzhledem k  $y$ , lze někdy s výhodou převést na LODR1 vzhledem k  $x$ . Např. rovnici

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{1}{yx - y^2}$$

můžeme psát ve tvaru

$$\frac{1}{y'} = yx - y^2.$$

Protože derivace  $x'(y)$  funkce  $x(y)$  inverzní k  $y(x)$  splňuje vztah

$$x' = \frac{1}{y'}, \quad (6.23)$$

plyne odtud

$$x' = yx - y^2,$$

což je LODR1 vzhledem k  $x$ . (Vztah (6.23) dostaneme takto: platí  $x(y(x)) = x$ ; derivováním této rovnice vzhledem k  $x$  a užitím věty o derivování složené funkce snadno dostaneme  $x'(y(x)) \cdot y'(x) = 1$ , odkud plyne (6.23).)

#### D. Bernoulliiova rovnice

Bernoulliiova rovnice je tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (6.24)$$

Poznamenejme, že v případě  $r = 0$  nebo  $r = 1$  je daná rovnice lineární, a proto budeme předpokládat  $r \neq 0$ ,  $r \neq 1$ . Necht' dále funkce  $a$ ,  $b$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ . Ukážeme, že rovnici (6.24) lze substitucí

$$u(x) = y^{1-r}(x) \quad (\text{stručně: } u = y^{1-r})$$

převést na LODR1. Vskutku, za předpokladu  $y \neq 0$  položíme  $u = y^{1-r}$ . Potom  $u' = (1-r)y^{-r}y'$ , takže Bernoulliiova rovnice se transformuje na tvar

$$u' = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

což je rovnice lineární. Tuto rovnici vyřešíme (viz oddíl C) a z jejího obecného řešení pak prostřednictvím dané substituce získáme obecné řešení původní rovnice (6.24).

Kromě řešení, která dostaneme tímto postupem, má rovnice (6.24) pro  $r > 0$  také řešení  $y(x) = 0$ .

**Příklad 6.11.** Nalezneme řešení počátečního úlohy

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad y(1) = 1.$$

**Řešení.** Daná rovnice již byla řešena v oddíle B pomocí substituce  $u = y/x$ . Lze ji však také upravit na tvar

$$y' = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} - xy^{-1} \right) \quad (\text{tj. } a(x) = \frac{1}{2x}, b(x) = -\frac{x}{2}, r = -1) \quad (6.25)$$

a řešit ji jako Bernoulliiovu rovnici substitucí  $u = y^{1-r} = y^2$ . Při dosazování substituce budeme postupovat tak, že rovnici (6.25) nejprve vydělíme faktorem  $y^r = y^{-1}$  (tedy vynásobíme  $y$ ) a poté do ní dosadíme  $u = y^2$ , resp.  $u' = 2yy'$ . Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y'y &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{x} - x \right), \\ u' &= \frac{u}{x} - x. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme metodou variace konstanty:

a) Přidruženou homogenní rovnici

$$u' = \frac{u}{x}$$

lze řešit separací proměnných, nebo další substitucí  $v = u/x$ . Oběma způsoby snadno zjistíme, že

$$u_b(x) = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Necht'

$$u(x) = C(x)x, \quad C(x) = ?$$

Dosazením do řešené lineární rovnice (6.26) máme

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} - x, \quad \text{tj.} \quad C'(x) = -1.$$

Odtud  $C(x) = -x + C$ , a obecné řešení rovnice (6.26) je tedy tvaru

$$u(x) = Cx - x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

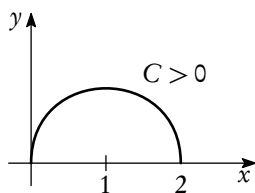
Zpětným dosazením substituce pak dostáváme

$$y^2 = Cx - x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečního bodu  $(1, 1)$  do obecného řešení dostáváme  $C = 2$ . Protože znaménko funkce  $y$  je stejné jako znaménko  $y$ -ové souřadnice počátečního bodu, hledané partikulární řešení je funkce tvaru

$$y(x) = \sqrt{2x - x^2}, \quad x \in (0, 2)$$

znázorněná na obrázku 6.5.



Obrázek 6.5: Řešení počáteční úlohy  $y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$ ,  $y(1) = 1$

Rozmyslete si přitom, proč je uvedený interval otevřený, ačkoliv krajní body tohoto intervalu náležejí do definičního oboru funkce  $y$ .

## E. Exaktní ODR1

Rovnice

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad (6.27)$$

se nazývá *exaktní rovnici*, jestliže funkce  $P$ ,  $Q$  jsou spojitě i se svými prvními parciálními derivacemi v nějaké jednoduše souvislé<sup>1</sup> oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a jestliže ve všech bodech této oblasti platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (6.28)$$

Poznamenejme, že v rovnici (6.27) není derivace  $y'$  vyjádřena explicitně (a tedy rovnice není v normálním tvaru, viz (5.10)). Za předpokladu nenulovosti funkce  $Q$  na  $\Omega$  lze (6.27) na tento tvar snadno převést příslušným vydělením. Pro určení řešení exaktní rovnice je však výhodnější přepsat (6.27) na jiný, tzv. *diferenciální tvar*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (6.29)$$

který formálně obdržíme z (6.27) náhradou  $y'$  pomocí  $dy/dx$  (tento obrat byl použit již při diskuzi řešení ODR1 se separovanými proměnnými).

Z teorie křivkového integrálu plyne, že vztah (6.28) platí tehdy a jen tehdy, když existuje nějaká funkce  $F(x, y)$  (která se nazývá *kmenovou funkcí* nebo také *potenciálem*), pro kterou je levá strana rovnice (6.29) totálním diferenciálem v oblasti  $\Omega$ , tj.

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (6.30)$$

Zkombinujeme-li (6.29) a (6.30), vidíme, že platí

$$dF(x, y) = 0,$$

a obecné řešení rovnice (6.29) je tedy dáno implicitně rovnicí

$$F(x, y) = C. \quad (6.31)$$

Poznamenejme, že požadavek, aby oblast  $\Omega$  byla jednoduše souvislá, nelze vynechat. V takovém případě by totiž k levé straně rovnice nemusela existovat kmenová funkce  $F$ .

Určení kmenové funkce  $F(x, y)$ 

Protože

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \quad (6.32)$$

porovnáním (6.30) a (6.32) dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y), \quad (6.33)$$

pokud ověříme, že platí (6.28). Tedy první krok při určování funkce  $F$  spočívá v ověření vztahu (6.28).

Máme-li vztah (6.28) ověřen, integrací prvního vztahu v (6.33) podle  $x$  dostaneme

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \quad (6.34)$$

Zbývá určit funkci  $\varphi(y)$ . Pro stručnost položíme

$$U(x, y) := \int P(x, y)dx,$$

<sup>1</sup>Zhruba řečeno, jednoduše souvislou oblastí rozumíme oblast, která neobsahuje „díry“ či „řezy“.

takže (6.34) přechází na tvar

$$F(x, y) = U(x, y) + \varphi(y). \quad (6.35)$$

Dosaďme (6.35) do druhého vztahu v (6.33). Dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) + \varphi'(y) = Q(x, y),$$

čili

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial U}{\partial y}(x, y). \quad (6.36)$$

Protože levá strana (6.36) nezávisí na  $x$ , nezávisí na  $x$  také pravá strana. Tedy integrací (6.36) vzhledem k  $y$  dostaneme

$$\varphi(y) = \int \left\{ Q(x, y) - \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right\} dy + K, \quad (6.37)$$

kde  $K$  je libovolná konstanta. Dosažením (6.37) do (6.35) dostaneme výraz pro  $F(x, y)$ . Přitom konstantu  $K$  můžeme vynechat, protože obecné řešení dané implicitně rovnicí (6.31) už obsahuje obecnou konstantu.

**Příklad 6.12.** Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{e^y}{2y - xe^y}. \quad (6.38)$$

*Řešení.* Tato rovnice není žádného z typů probíraných v předcházejících oddílech, a proto ověříme, zda ji nelze přepsat na rovnici exaktní. Prepíšeme ji proto na diferenciální tvar

$$e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0. \quad (6.39)$$

Rovnice (6.39) exaktní vskutku je, neboť funkce  $P(x, y) = e^y$ ,  $Q(x, y) = xe^y - 2y$  jsou spojitě včetně svých partiálních derivací na  $\mathbb{R}^2$  a platí zde

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Nyní určíme, ke které kmenové funkci  $F$  je výraz  $e^y dx + (xe^y - 2y) dy$  totálním diferenciálem. Podle (6.34)

$$F(x, y) = \int e^y dx + \varphi(y) = xe^y + \varphi(y).$$

Dosažením tohoto vyjádření do druhého vztahu v (6.33) máme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^y + \varphi'(y) = xe^y - 2y.$$

Odtud

$$\varphi'(y) = -2y, \quad \text{tj.} \quad \varphi(y) = -y^2 + K.$$

Tedy  $F(x, y) = xe^y - y^2 + K$ , a obecné řešení rovnice (6.38) je pak dáno implicitně vztahem (6.31), tj.

$$xe^y - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 6.13 – integrační faktor.** Pokud bychom se rozhodli diferenciální rovnici (6.39) upravit, např. vynásobením nenulovou funkcí  $e^{-y}$ , obdržíme rovnici

$$dx + (x - 2ye^{-y})dy = 0. \quad (6.40)$$

Rovnice (6.39) a (6.40) jsou ekvivalentní v tom smyslu, že mají stejná obecná řešení. Všimněme si však, že rovnice (6.40) již exaktní není; vskutku,  $P(x, y) = 1$ ,  $Q(x, y) = x - 2ye^{-y}$ , tj.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Tak jak jsme exaktnost rovnice (6.39) „pokazili“ vynásobením faktorem  $e^{-y}$ , lze tuto okolnost „napravit“ zpětným vynásobením rovnice (6.40) faktorem  $e^y$ . To nás vede k obecnější úvaze, totiž zda je možné libovolnou rovnici (6.29) vynásobit vhodnou nenulovou funkcí  $\rho(x, y)$  tak, aby vzniklá rovnice již byla exaktní.

Odpověď na tuto otázku je za předpokladu spojitě diferencovatelnosti funkcí  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  kladná, ovšem pouze v teoretické rovině. Nalezení této funkce  $\rho(x, y)$ , tzv. *integračního faktoru*, je prakticky proveditelné pouze u některých typů rovnic. U většiny rovnic je výpočet tohoto faktoru záležitostí velmi komplikovanou (je potřeba řešit parciální diferenciální rovnici).

Na závěr této sekce provedme krátké shrnutí získaných poznatků. Naučili jsme se exaktně řešit několik typů ODR1, ty však byly dosti speciální. V inženýrské praxi se naopak často setkáváme s diferenciálními rovnicemi, které žádného z těchto typů nejsou (a nelze je řešit analyticky). V takovém případě nabývají na významu přibližné metody řešení diferenciálních rovnic. Jednou z nich je metoda Picardových aproximací, jejíž pomocí jsme odvodili podmínky pro jednoznačnou řešitelnost dané počáteční úlohy. Ačkoliv otázka přibližného řešení diferenciálních rovnic je samostatnou vědní disciplínou (i samostatným výukovým kurzem), v rámci tohoto textu i předmětu se seznámíme ještě s jednou přibližnou metodou řešení diferenciálních rovnic, a to v podsekcí 9.2.

## Příklady k procvičení

**Cvičení 6.14.** Nalezněte všechna řešení daných diferenciálních rovnic se separovanými proměnnými:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y' = \frac{y^2 - y}{x}; & \text{b) } y' = \frac{1 - x^2}{xy}; \\ \text{c) } y' = e^{x+y}; & \text{d) } y' = y - y^2; \\ \text{e) } (1 + x^2)y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{xy}; & \text{f) } (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0. \end{array}$$

**Výsledky.** a)  $y(x) = 1/(1 - Cx)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = 0$ ; b)  $x^2 + y^2 = \ln x^2 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; c)  $e^x + e^{-y} = C$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ ; d)  $y(x) = e^x/(e^x + C)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = 0$ ; e)  $y^2 = Cx^2/(x^2 + 1) - 1$ ,  $C > 1$ ; f)  $(1 + y^2)/(1 - x^2) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.15.** Nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{array}{l} \text{a) } y' = (y \ln y) / \sin x, \quad y(\pi/2) = e; \\ \text{b) } y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \quad y(0) = 1; \\ \text{c) } y' + y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x, \quad y(0) = -1. \end{array}$$

**Výsledky.** a)  $y(x) = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ ; b)  $y(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4})$ ,  $x \in (-\infty, 1)$ ; c)  $y(x) = 2 - 3 \cos x$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

**Cvičení 6.16.** Nalezněte všechna řešení diferenciálních rovnic tvaru  $y' = f(y/x)$ :

$$\text{a) } y' = \frac{y^2}{x^2} - 2; \quad \text{b) } y' = \frac{x + y}{x - y};$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= \frac{2xy}{x^2 - y^2}; & \text{d) } y' - \frac{y}{x} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}; \\ \text{e) } y^2 + x^2 y' &= xy y'; & \text{f) } y' &= \frac{y}{x} + \frac{\varphi(y/x)}{\varphi'(y/x)}. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y - 2x = Cx^3(y + x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = -x$ ; b)  $\arctg \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ ; c)  $x^2 + y^2 = Cy$ ,  $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; d)  $x^2 = C^2 + 2Cy$ ,  $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; e)  $y(x) = Ce^{y/x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; f)  $Cx = \varphi(y/x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.17.** Nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } xy' &= y(\ln y - \ln x), & y(1) &= 1; \\ \text{b) } y' &= \frac{2x - y}{x + 2y}, & y(1) &= 0; \\ \text{c) } y' &= \frac{y(y - 2x)}{x(x - 2y)}, & y(1) &= 1. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = xe^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ ; b)  $y(x) = (\sqrt{5x^2 + 4} - x)/2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; c)  $y(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

**Cvičení 6.18.** Nalezněte všechna řešení daných lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a) } y' + 2y &= 4x; & \text{b) } y' + 2xy &= xe^{-x^2}; \\ \text{c) } y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y &= 1; & \text{d) } y' + y &= \cos x; \\ \text{e) } y' + y \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\cos x}; & \text{f) } y' + ay &= e^{bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = Ce^{-2x} + 2x - 1$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; b)  $y(x) = e^{-x^2}(C + x^2/2)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; c)  $y(x) = Cx^2 e^{1/x} + x^2$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; d)  $y(x) = Ce^{-x} + (\cos x + \sin x)/2$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; e)  $y(x) = C \cos x + \sin x$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; f)  $y(x) = Ce^{-ax} + e^{bx}/(a + b)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.19.** Nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } xy' - \frac{y}{x+1} &= x, & y(1) &= 0; \\ \text{b) } y' - y \operatorname{tg} x &= 1 - x \operatorname{tg} x, & y(0) &= 0; \\ \text{c) } y'(1+x^2) + 2xy &= \frac{2x}{1+x^2}, & y(0) &= -1. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = \frac{x(x-1+\ln x)}{x+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ ; b)  $y(x) = x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ; c)  $y(x) = \frac{\ln(x^2+1)-1}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.20.** Nalezněte všechna řešení daných Bernoulliových rovnic:

$$\text{a) } y' + \frac{y}{2} = \frac{x-1}{2}y^3; \quad \text{b) } y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}.$$

*Výsledky.* a)  $y^2(Ce^x + x) = 1$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = 0$ ; b)  $y(x) = e^{-2x^2}(C + x^2/2)^2$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = 0$ .

**Cvičení 6.21.** Nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } y' + \frac{y}{x} &= y^2 \ln x, & y(1) &= \frac{1}{2}; \\ \text{b) } y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} &= \frac{x}{2y}, & y(2) &= 1. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = 1/(-\frac{1}{2}x \ln^2 x + 2x)$ ,  $x \in (1/e^2, e^2)$ ; b)  $y(x) = \sqrt{(x^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - 1})}$ ,  $x \in (1, \infty)$ .

**Cvičení 6.22.** Ověřte, zda dané rovnice jsou exaktní, a nalezněte jejich obecné řešení:

$$\text{a) } (2x^3 - xy^2) + (2y^3 - x^2y)y' = 0; \quad \text{b) } y'x^2 \sin 2y - x \cos 2y - 1 = 0.$$

*Výsledky.* a)  $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ ; b)  $x^2 \cos 2y + 2x = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.23.** Nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^3 + xy^2) + (x^2y + y^3)y' &= 0, & y(-3) &= 4; \\ \text{b) } (2x + ye^{xy}) + (1 + xe^{xy})y' &= 0, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ,  $x \in (-5, 5)$ ; b)  $x^2 + y + e^{xy} = 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.24.** Nalezněte všechna řešení daných rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{y-1}{x^2y^2}; & \text{b) } y' &= ax + by + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}); \\ \text{c) } xy' - y &= x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; & \text{d) } y' &= \frac{ax + by}{cy - bx} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, ac + b^2 \neq 0). \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y^2/2 + y + \ln|y-1| + 1/x = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = 1$ ; b)  $y(x) = C e^{bx} - ax/b - (a+bc)/b^2$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; c)  $\sin y/x = Cx$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; d)  $ax^2 + 2bxy - cy^2 = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.25.** Nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2y' + xy + 1 &= 0, & y(1) &= 0; \\ \text{b) } y' &= \frac{2y^2 - x^2}{xy}, & y(1) &= 1; \\ \text{c) } y' &= xy - \frac{1}{2}x\sqrt{y}, & y(0) &= 1; \\ \text{d) } xy' + y &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}, & y(1) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = -\frac{\ln x}{x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ ; b)  $y(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ ; c)  $\sqrt{y} = \frac{1}{2}(e^{x^2/4} + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; d)  $y(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

## 7 Základy teorie ODRn

V předcházející sekci jsme se zabývali diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Nyní přistoupíme ke studiu diferenciálních rovnic vyšších řádů (ODRn), což je obecnější případ. Kromě diskuse obecného (nelineárního) případu bude důraz kladen na rovnice lineární, které jsou zobecněním lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Zajímá nás budou zejména tyto otázky: Jaké podmínky zaručí existenci a jednoznačnost řešení počáteční úlohy pro (obecně nelineární) ODRn? Existují metody, jak nelineární ODRn exaktně řešit? Jak vypadá obecná lineární ODRn? Má nějaké „rozumné“ vlastnosti, které mohou být užitečné při procesu hledání jejího řešení?

### 7.1 Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy pro ODRn

Nejobecnější tvar ODRn je

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kteřý je však (nejenom z teoretického hlediska) těžko uchopitelný, a proto v souladu se sekci 5 budeme ODRn uvažovat v normálním tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (7.1)$$

Připomeňme, že počáteční úlohou pro rovnici (7.1) rozumíme úlohu nalézt řešení této rovnice vyhovující  $n$  počátečním podmínkám

$$y(x_0) = \xi_0, \quad y'(x_0) = \xi_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \xi_{n-1}, \quad (7.2)$$

kde bod  $(x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  leží uvnitř definičního oboru funkce  $f$ .

Následující věta nám zodpoví otázku, za jakých podmínek je úloha (7.1), (7.2) jednoznačně řešitelná.

■ **Věta 7.1.** *Nechť funkce  $f = f(x, y_1, \dots, y_n)$  splňuje tyto dva předpoklady:*

(P1') *Je spojitá na nějakém okolí  $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bodu  $(x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ;*

(P2') *Má ohraničené parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial y_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) na  $O$ , tj. existuje  $L > 0$  takové, že*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_k}(P) \right| \leq L \quad \text{pro všechna } k = 1, \dots, n \quad \text{a pro všechna } P \in O.$$

*Potom existuje jediné řešení  $y$  počáteční úlohy (7.1), (7.2), které je definované na nějakém intervalu obsahujícím počáteční bod  $x_0$  ve svém vnitřku.*

**Poznámka 7.2.** Tato věta i její důkaz jsou přímým zobecněním Picardovy věty 6.1. Podobně lze na tento případ přenést i většinu komentářů, které byly za větou 6.1 uvedeny.

V sekci 6 věnované řešení ODR1 jsme se naučili analyticky vyřešit 5 typů rovnic. Nejsou to jediné případy ODR1, které lze vyřešit analyticky, nicméně již jsme konstatovali, že z množiny všech možných ODR1 umíme vyřešit pouze poměrně malou část. Lze očekávat, že v případech ODRn bude situace ještě složitější, tj. nemáme příliš mnoho nástrojů, které by vedly k nalezení přesného řešení těchto rovnic. To se pochopitelně týká především nelineárních rovnic, které umíme vyřešit pouze ve velmi speciálních případech.

Zastavme se u dvou z těchto případů, které budeme ilustrovat na ODR2. Jejich společným znakem je, že na pravé straně dané ODR2 není explicitně obsaženo buď  $y$ , nebo  $x$ ; v obou případech pak lze zkoumanou ODR2 převést na ODR1.

1. Nechť v rovnici  $y'' = f(x, y, y')$  chybí  $y$ , tj. máme

$$y'' = f(x, y').$$

Zavedeme-li substituci  $u = y'$ , potom dostaneme

$$u' = f(x, u),$$

což je ODR1. Pokud umíme tuto rovnici vyřešit, tak řešení  $y$  dostaneme integrací řešení  $u$ .

**Příklad 7.3.** Nalezněte obecné řešení rovnice  $y'' = -\frac{x}{y'}$ .

*Řešení.* Substitucí  $u = y'$  dostaneme rovnici  $u' = -\frac{x}{u}$ , což je rovnice se separovanými proměnnými:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad u \, du = -x \, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_1^2.$$

Odtud  $u(x) = \pm \sqrt{C_1^2 - x^2}$  (srovnejte s příkladem 5.9). Abychom dostali řešení  $y$ , je potřeba zintegrovat funkci  $u$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm \int \sqrt{C_1^2 - x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = C_1 \sin t \\ dx = C_1 \cos t \, dt \end{array} \right| = \pm C_1^2 \int \cos^2 t \, dt = \pm \frac{C_1^2}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= \pm \frac{C_1^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C_2 = \pm \frac{C_1^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{C_1} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arcsin \frac{x}{C_1} \right) \right) + C_2 \\ &= \pm \frac{C_1^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{C_1} + \frac{x}{C_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{C_1^2}} \right) + C_2, \quad C_1 > 0, \quad C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(v poslední rovnosti jsme využili vztahů  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$  a  $\cos(\arcsin t) = \sqrt{1 - t^2}$ ).

2. Necht' v rovnici  $y'' = f(x, y, y')$  chybí  $x$ , tj. máme

$$y'' = f(y, y').$$

Zavedme substituci  $y' = u$ , kde  $u$  chápeme jako funkci řešení  $y$ , tj. máme  $y'(x) = u(y(x))$ . Odtud podle vzorce o derivaci složené funkce

$$y'' = \frac{d}{dx}(u(y)) = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u \quad \text{a tedy} \quad u \frac{du}{dy} = f(y, u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{f(y, u)}{u},$$

což je opět ODR1. Pokud z této rovnice umíme získat řešení  $u$  v explicitním tvaru, tak druhým krokem je vyřešení další ODR1, a to rovnice se separovanými proměnnými  $y' = u(y)$ .

**Příklad 7.4.** Vyřešte rovnici  $y'' = \frac{2(y')^2 + y'}{y}$ .

*Řešení.* Výše uvedená substituce  $y' = u(y)$  převádí rovnici na ODR1 ve tvaru

$$u' = \frac{2u^2 + u}{yu} = \frac{1}{y}(2u + 1) \quad (\text{kde } u' = \frac{du}{dy}).$$

To je rovnice se separovanými proměnnými jejíž řešení je

$$u(y) = Cy^2 - \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

viz příklad 6.7. Jako druhý krok je potřeba vyřešit rovnici se separovanými proměnnými:

$$y' = C_1 y^2 - \frac{1}{2}.$$

Pro  $C_1 = 0$  je řešením funkce  $y(x) = -x/2 + C_2$ . Pro  $C_1 \neq 0$  pak máme

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2dy}{2C_1 y^2 - 1} = dx. \quad (7.3)$$

Necht' nejprve  $C_1 > 0$ . Potom, rozkladem na parciální zlomky,

$$\frac{2dy}{2C_1 y^2 - 1} = \left( \frac{-1}{\sqrt{2C_1}y + 1} + \frac{1}{\sqrt{2C_1}y - 1} \right) dy = dx$$

a integrací

$$-\frac{1}{\sqrt{2C_1}} \ln(\sqrt{2C_1}y + 1) + \frac{1}{\sqrt{2C_1}} \ln(\sqrt{2C_1}y - 1) = x - C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

tj.

$$\ln \frac{\sqrt{2C_1}y - 1}{\sqrt{2C_1}y + 1} = \sqrt{2C_1}(x - C_2).$$

Odtud, úpravou,

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \frac{1}{1 - e^{\sqrt{2C_1}(x - C_2)}}.$$

Pro  $C_1 < 0$  pak integrací rovnice (7.3) dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{-2C_1}} \operatorname{arctg} \sqrt{-2C_1}y = C_2 - x,$$

což po úpravě dává

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2C_1}} \operatorname{tg}(\sqrt{-2C_1}(C_2 - x)).$$

Celkově tedy

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \frac{1}{1 - e^{\sqrt{2C_1}(x-C_2)}}, & C_1 > 0, C_2 \in \mathbb{R}, \\ -\frac{x}{2} + C_2, & C_2 \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{\sqrt{-2C_1}} \operatorname{tg}(\sqrt{-2C_1}(C_2 - x)), & C_1 < 0, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## Příklady k procvičení

**Cvičení 7.5.** Nalezněte řešení počáteční úlohy

$$xy'' + 2y' + x = 1, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1.$$

*Výsledky.*  $y(x) = 5/2 - 5/(6x) + x/2 - x^2/6$ .

## 7.2 Základy teorie lineárních ODRn

Obraťme nyní pozornost k lineárním rovnicím, které představují v rámci ODRn nejdůležitější třídu.

**Definice 7.6.** *Lineární rovnici n-tého řádu (LODRn) rozumíme rovnici*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \quad (7.4)$$

Funkce  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  se nazývají koeficienty rovnice a funkce  $b$  pravá strana rovnice. O všech těchto funkcích předpokládáme, že jsou definovány na nějakém intervalu  $I$  a jsou zde spojité. Je-li  $b(x) = 0$  pro všechna  $x \in I$ , hovoříme o *homogenní LODRn* (též *rovnici bez pravé strany* nebo *zkrácené rovnici*), v opačném případě hovoříme o *nehomogenní rovnici* (též *rovnici s pravou stranou* nebo *nezkrácené rovnici*).

**Poznámky 7.7.** a) Takto napsaná rovnice není přímo v normálním tvaru, pokud ale převedeme všechny členy kromě prvního na pravou stranu, tak už její normální tvar obdržíme:

$$y^{(n)} = \underbrace{-a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \dots - a_1(x)y' - a_0(x)y}_{f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})} + b(x).$$

b) Lze uvažovat i mírně obecnější případ než (7.4), kdy lineární rovnici píšeme ve tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Pokud však předpokládáme, že vedoucí koeficient  $a_n$  je nenulový (pro všechna  $x \in I$ ), pak lze tímto koeficientem dělit a tedy převést tuto rovnici na tvar (7.4) a naopak.

Jednoznačnou řešitelnost počáteční úlohy (7.4), (7.2) samozřejmě řeší Picardova věta 7.1. Užitím jiné důkazové techniky však lze, analogicky jako v případě LODR1, dokázat globální jednoznačnou řešitelnost. Přesněji, platí:

■ **Věta 7.8.** *Necht' všechny koeficienty  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  a pravá strana  $b$  jsou spojité funkce na intervalu  $I$  a  $x_0 \in I$ ,  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Potom má počáteční úloha (7.4), (7.2) jediné řešení, které je definováno na celém intervalu  $I$ .*

Naším hlavním cílem v souvislosti s lineárními ODRn je naučit se tyto rovnice exaktně řešit. To však nepůjde tak snadno, jako v případě LODR1. Nejprve se budeme muset seznámit se strukturou množiny řešení lineárních ODRn.

Naše úvahy provedeme nejprve pro příslušnou homogenní rovnici, tedy rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (7.5)$$

(koeficienty  $a_0, \dots, a_{n-1}$  uvažujeme stále jako spojité funkce na  $I$ ). Stejně jako pro další úvahy je následující tvrzení.

■ **Věta 7.9.** Jsou-li funkce  $u_1 = u_1(x), u_2 = u_2(x), \dots, u_k = u_k(x)$  ( $k$  je libovolné přirozené číslo) řešenými rovnice (7.5) a  $C_1, C_2, \dots, C_k$  jsou libovolné konstanty (mohou být i komplexní), potom také funkce

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_k u_k, \quad (7.6)$$

kteřou nazýváme lineární kombinací řešení  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , je řešením rovnice (7.5).

*Důkaz.* Jsou-li  $u_1, \dots, u_k$  řešenými rovnice (7.5) na intervalu  $I$ , potom platí

$$u_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)u_i'(x) + a_0(x)u_i(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I \text{ a } i = 1, \dots, k.$$

Násobením  $i$ -té rovnice konstantou  $C_i$  dostaneme

$$C_i u_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)C_i u_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)C_i u_i'(x) + a_0(x)C_i u_i(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I \text{ a } i = 1, \dots, k.$$

Sečteme získané vztahy od  $i = 1$  do  $i = k$ :

$$\sum_{i=1}^k C_i u_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \sum_{i=1}^k C_i u_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \sum_{i=1}^k C_i u_i'(x) + a_0(x) \sum_{i=1}^k C_i u_i(x) = 0. \quad (7.7)$$

Podle (7.6) je

$$y = \sum_{i=1}^k C_i u_i, \quad y' = \sum_{i=1}^k C_i u_i', \quad \dots, \quad y^{(n)} = \sum_{i=1}^k C_i u_i^{(n)}.$$

Dosažením těchto vztahů do (7.7) dostaneme, že  $y$  (dána vztahem (7.6)) je řešením rovnice (7.5) na intervalu  $I$ .  $\square$

V teorii LODR $n$  má velkou důležitost pojem *lineárně nezávislých funkcí*.

**Definice 7.10.** Necht'  $f_1, f_2, \dots, f_k$  jsou reálné, popř. komplexní funkce reálné proměnné  $x$ , které jsou definovány na intervalu  $I$ . Říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu  $I$  *lineárně nezávislé*, jestliže vztah

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_k f_k(x) = 0, \quad x \in I,$$

kde  $C_1, C_2, \dots, C_k$  jsou konstanty, platí pouze v případě  $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$ .

V opačném případě (tj. když alespoň jedno  $C_i \neq 0, i \in \{1, \dots, k\}$ ) říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu  $I$  *lineárně závislé*.

**Poznámka 7.11.** Podmínku lineární nezávislosti lze vyslovit také tak, že žádnou z uvažovaných funkcí nelze vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí zbývajících. Otázka zní, jak jednoduše poznat, zda funkce jsou lineárně nezávislé. V případě dvojice funkcí je to snadné; stačí se podívat, zda jedna funkce je násobkem druhé, či není. V případě tří a více funkcí (podobně jako v případě číselných vektorů) to již tak zřejmé není a je tedy žádoucí mít k dispozici nějaké kritérium, kterým lze jednoduše o lineární nezávislosti rozhodnout. Toto kritérium bude vysloveno ve větě 7.13, dříve však zavedeme nový pojem, tzv. wronskián.

**Definice 7.12 — wronskiánu.** Necht' funkce  $f_1, f_2, \dots, f_k$  jsou na intervalu  $I$  alespoň  $(k-1)$ -krát spojitě derivovatelné. Potom determinant

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

se nazývá *wronskián* nebo *Wronského determinant funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_k$  na intervalu  $I$* .

■ **Věta 7.13.** Necht' wronskián funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_k$  na intervalu  $I$  je nenulový v alespoň jednom bodě intervalu  $I$ , tj. existuje  $x_0 \in I$  takové, že  $W(x_0) \neq 0$ . Potom funkce  $f_1, f_2, \dots, f_k$  jsou lineárně nezávislé na  $I$ .

*Důkaz.* Necht'  $C_1, C_2, \dots, C_k$  jsou takové konstanty, že pro každé  $x \in I$  platí

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_k f_k(x) = 0. \quad (7.8)$$

Je potřeba ukázat, že nenulovost wronskiánu v bodě  $x_0$  zaručí, že všechny konstanty  $C_1, C_2, \dots, C_k$  v této rovnosti budou nulové. Derivováním (7.8) až do řádu  $n-1$  (připomeňme předpoklad, že všechny funkce mají na  $I$  derivace až do řádu  $k-1$ ) dostaneme (spolu s rovnicí (7.8)) soustavu

$$\begin{aligned} C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_k f_k(x) &= 0, \\ C_1 f_1'(x) + C_2 f_2'(x) + \dots + C_k f_k'(x) &= 0, \\ C_1 f_1''(x) + C_2 f_2''(x) + \dots + C_k f_k''(x) &= 0, \\ &\dots \\ C_1 f_1^{(k-1)}(x) + C_2 f_2^{(k-1)}(x) + \dots + C_k f_k^{(k-1)}(x) &= 0, \end{aligned}$$

psáno maticově

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o soustavu  $n$  lineárních rovnic s řešením  $C_1, C_2, \dots, C_k$  pro libovolný bod  $x \in I$ , a tedy také pro bod  $x_0$ . Wronskián  $W(x_0)$  představuje determinant matice soustavy: protože je podle předpokladu nenulový, soustava má podle Frobeniovy věty jediné řešení, a tím musí být nulové řešení (pravá strana je totiž nulová). Tím je důkaz hotov.  $\square$

**Poznámky 7.14.** a) Větu lze vyslovit také tak (transpozice implikace), že jsou-li  $f_1, f_2, \dots, f_k$  lineárně závislé funkce na  $I$  (které jsou zde  $(k-1)$ -krát derivovatelné), pak  $W(x) = 0$  pro všechna  $x \in I$ . Avšak pozor! Z nulovosti wronskiánu na  $I$  neplyne lineární závislost funkcí. Jinak řečeno podmínka  $W(x_0) \neq 0$  je postačující podmínkou pro lineární nezávislost funkcí, nikoliv nutnou. Např. dvojice funkcí

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

je na  $\mathbb{R}$  lineárně nezávislá (zřejmě nemůže platit  $f_2(x) = C f_1(x)$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a vhodnou konstantu  $C$ ), ale  $W(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Skutečně, je-li  $x > 0$ , pak

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{pmatrix} = 0.$$

Je-li  $x < 0$ , pak

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{pmatrix} = 0.$$

V bodě  $x = 0$  jsou příslušné jednostranné derivace nulové, celkově tedy platí  $W(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Větu nelze aplikovat v případě funkcí, které nemají dostatečný počet derivací na  $I$ . V takovém případě nezbývá, než se pokusit rozhodnout přímo z definice lineární nezávislosti.

Dále uvažujme  $n$ -tici funkcí, které jsou lineárně nezávislé na  $I$  a zároveň jsou zde partikulárními řešeními rovnice (7.5). Potom se již nemůže stát, že by taková  $n$ -tice připustila nulový wronskián v nějakém bodě intervalu  $I$ . Přesněji, platí:

■ **Věta 7.15.** *Nechť funkce  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou řešeními rovnice (7.5) na intervalu  $I$ . Pak jsou tyto funkce lineárně nezávislé na  $I$ , právě když*

$$W(x) \neq 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

*Důkaz.* Předně je dobré si uvědomit, že wronskián funkcí  $u_1, u_2, \dots, u_n$  na intervalu  $I$  existuje. Tyto funkce jsou totiž podle předpokladu řešeními rovnice (7.5), a proto musí být derivovatelné až do řádu  $n$  (tedy i do řádu  $n-1$ ).

⇐: Je-li  $W(x) \neq 0$  (v každém bodě  $x \in I$ ), pak podle věty 7.13 jsou  $u_1, u_2, \dots, u_n$  lineárně nezávislé.

⇒: Tuto implikaci dokážeme sporem. Nechť řešení  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou lineárně nezávislá. Předpokládejme, že existuje bod  $x_0 \in I$  tak, že  $W(x_0) = 0$ . Potom soustava

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

má pro  $x = x_0$  má nenulové řešení  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (matice soustavy je singulární), tj. existuje index  $k$  takový, že

$$C_k \neq 0. \quad (7.10)$$

Položme  $z(x) := C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x)$ . Potom ze soustavy (7.9) plyne

$$z(x_0) = 0, \quad z'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(x_0) = 0. \quad (7.11)$$

Funkce  $z$  je podle věty 7.9 řešením rovnice (7.5) a podle věty 7.8 má počáteční úloha (7.5), (7.11) jediné řešení na  $I$ , které však vzhledem k počátečním podmínkám (7.11) musí být identicky rovno nule, tj.  $z(x) = 0$  pro všechna  $x \in I$ . Odtud, vzhledem k definici funkce  $z$ , dostáváme

$$z(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Protože však funkce  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou lineárně nezávislé na  $I$ , platí  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ , což je spor se vztahem (7.10). Předpoklad existence bodu  $x_0$ , ve kterém je wronskián nulový, tedy byl chybný, a musí platit  $W(x) \neq 0$  v každém bodě  $x \in I$ . □

**Poznámka 7.16.** Jsou-li  $u_1, u_2, \dots, u_n$  řešení homogenní rovnice (7.5), pak lze jejich wronskián psát ve tvaru

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt} \quad \text{pro } x \in I,$$

kde  $x_0$  je libovolný (ale pevný) bod z intervalu  $I$ . Tomuto tvrzení se říká Liouvilleova věta.

Pomocí věty 7.15 již půjde snadno dokázat hlavní výsledek této podsekcce:

■ **Věta 7.17.** *Nechť  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou řešení homogenní LODR $_n$  (tj. rovnice (7.5)) na intervalu  $I$ , která jsou zde lineárně nezávislá. Potom každé řešení  $y$  této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru*

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x), \quad (7.12)$$

kde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  jsou vhodné konstanty.

*Důkaz.* Podle věty 7.9 je funkce  $y$  daná vztahem (7.12) řešením rovnice (7.5). Ukážeme, že se touto funkcí dá při vhodné volbě konstant  $C_1, C_2, \dots, C_n$  vyjádřit každé řešení rovnice (7.5). Zvolme tedy řešení předepsáním počátečních podmínek

$$y(x_0) = \xi_0, \quad y'(x_0) = \xi_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \xi_{n-1}, \quad (7.13)$$

kde  $x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  jsou libovolná (ale pevná) čísla, přičemž  $x_0 \in I$ . Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) + \dots + C_n u_n(x_0) &= \xi_0, \\ C_1 u_1'(x_0) + C_2 u_2'(x_0) + \dots + C_n u_n'(x_0) &= \xi_1, \\ &\dots \\ C_1 u_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 u_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n u_n^{(n-1)}(x_0) &= \xi_{n-1}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Protože řešení  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou lineárně nezávislá, wronskián těchto funkcí je podle věty 7.15 nenulový v každém bodě  $x \in I$ , a tedy i v bodě  $x_0$ . Je tedy  $W(x_0) \neq 0$ , což znamená, že soustava (7.14) má jediné řešení. Jinak řečeno, jakákoliv volba hodnot  $x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  určí jednoznačně hodnoty konstant  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , které pomocí vztahu (7.12) jednoznačně určí požadované řešení. Tím je důkaz hotov.  $\square$

**Definice 7.18 — fundamentálního systému řešení.** Každá  $n$ -tice lineárně nezávislých řešení rovnice (7.5) na  $I$  se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (7.5) na  $I$ .

**Poznámky 7.19.** a) Věta 7.17 předpokládá existenci lineárně nezávislých řešení  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (tedy fundamentálního systému řešení) rovnice (7.5) na  $I$ . Poznamenejme, že tato  $n$ -tice vždy existuje. Přesněji vyjádřeno, tato řešení stačí uvažovat tak, aby postupně vyhovovala počátečním podmínkám

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= 1, & u_1'(x_0) &= 0, & \dots, & u_1^{(n-1)}(x_0) &= 0, \\ u_2(x_0) &= 0, & u_2'(x_0) &= 1, & \dots, & u_2^{(n-1)}(x_0) &= 0, \\ & & & & & & \dots \\ u_n(x_0) &= 0, & u_n'(x_0) &= 0, & \dots, & u_n^{(n-1)}(x_0) &= 1. \end{aligned}$$

Při takové volbě je  $W(x_0) = 1$ , což zaručí lineární nezávislost (viz větu 7.13).

b) Vztah (7.12) je současně vyjádřením obecného řešení rovnice (7.5). Větu 7.17 lze tedy volně formulovat tak, že k určení obecného řešení rovnice (7.5) stačí nalézt  $n$  lineárně nezávislých řešení dané rovnice. V následující sekci se naučíme nalézt tato řešení pro speciální případ rovnice (7.5).

V druhé části této podsekcce se zabýváme strukturou množiny řešení nehomogenní LODRn. Připomeňme, že se jedná o rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (7.15)$$

(funkce  $a_0, \dots, a_{n-1}, b$  jsou spojité na intervalu  $I$ ), přičemž pravá strana  $b$  není identicky rovna nule na  $I$ . Uvedeme zde dvě základní strukturální vlastnosti této nehomogenní rovnice, které budou užitečné při procesu hledání jejího obecného řešení.

■ **Věta 7.20.** *Nechť  $u_1, u_2, \dots, u_n$  je fundamentální systém řešení homogenní LODRn (7.5) a  $y_p$  je nějaké partikulární řešení nehomogenní LODRn (7.15). Pak obecné řešení rovnice (7.15) lze napsat ve tvaru*

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x) + y_p(x). \quad (7.16)$$

*Důkaz.* Protože  $y_p$  je řešení rovnice (7.15), platí

$$y_p^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x) = b(x) \quad \text{pro } x \in I. \quad (7.17)$$

Zavedme substituci  $u = y - y_p$ , kde  $y$  je řešení (7.15). Pak  $y' = u' + y_p', y'' = u'' + y_p'', \dots, y^{(n)} + u^{(n)} + y_p^{(n)}$ . Dosazením těchto vztahů do (7.15) dostaneme

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) + y_p^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)(u^{(n-1)}(x) + y_p^{(n-1)}(x)) + \dots \\ + a_1(x)(u'(x) + y_p'(x)) + a_0(x)(u(x) + y_p(x)) = b(x) \quad \text{pro } x \in I \end{aligned}$$

a po přerovnání

$$(u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x)) + (y_p^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x)) = b(x) \quad \text{pro } x \in I.$$

Protože výraz ve druhých závorkách je podle (7.17) roven funkci  $b$ , musí platit, že výraz v prvních závorkách je nulový, tj.  $u$  je řešení rovnice

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0.$$

Tato rovnice však má podle věty 7.17 obecné řešení

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x).$$

Protože  $y = u + y_p$ , dostáváme vztah (7.16). □

Z výpočetního hlediska je velmi důležité i druhé tvrzení.

■ **Věta 7.21 — princip superpozice.** *Nechť v rovnici (7.15) lze pravou stranu  $b$  rozložit na součet*

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_k(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7.18)$$

a nechť  $y_{p_j}$  je partikulární řešení rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = b_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (7.19)$$

jejíž levá strana je totožná s levou stranou rovnice (7.15). Potom

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_k}(x) \quad (7.20)$$

je partikulární řešení rovnice (7.15).

*Důkaz.* Stačí dokázat, že funkce  $y_p$  daná vztahem (7.20) vyhovuje rovnici (7.15). Z předpokladu, že  $y_{p_j}$  je řešením rovnice (7.19), plyne

$$y_{p_j}^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_{p_j}^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y_{p_j}'(x) + a_0(x)y_{p_j}(x) = b_j(x) \quad \text{pro } x \in I. \quad (7.21)$$

Sečtením rovnic (7.21) od  $j = 1$  do  $j = k$  a užitím (7.18) dostaneme

$$\left( \sum_{j=1}^k y_{p_j}(x) \right)^{(n)} + a_{n-1}(x) \left( \sum_{j=1}^k y_{p_j}(x) \right)^{(n-1)} + \dots + a_1(x) \left( \sum_{j=1}^k y_{p_j}(x) \right)' + a_0(x) \sum_{j=1}^k y_{p_j}(x) = b(x),$$

což jsme chtěli dokázat. □

## 8 Metody řešení lineárních ODRn s konstantními koeficienty

V této sekci využijeme teoretických výsledků sekce předcházející a zodpovíme následující otázky: Lze exaktně řešit libovolnou homogenní (resp. nehomogenní) lineární ODRn? Pokud ne, lze ji řešit alespoň v nějakých speciálních případech?

Odpověď na první otázku je poměrně jednoduchá a - záporná. To se týká i homogenního případu, kde sice víme, že k nalezení všech řešení příslušné homogenní lineární ODRn stačí nalézt  $n$  lineárně nezávislých řešení, neexistuje ale obecná metoda vedoucí k jejich určení. Taková metoda však existuje alespoň pro důležitou speciální třídu rovnic typu (7.5), kdy koeficienty  $a_0, \dots, a_{n-1}$  jsou konstantní.

## 8.1 Homogenní lineární ODRn s konstantními koeficienty

Systematicky probereme rovnice typu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

kde  $a_{n-1}, \dots, a_0$  jsou reálné konstanty. Tato rovnice se nazývá homogenní lineární ODRn s konstantními koeficienty. Poznamenejme, že z úvah v sekci 7.2 plyne, že každé řešení této rovnice lze prodloužit na celou množinu  $\mathbb{R}$ . Princip jejího řešení vysvětlíme nejprve pro rovnici druhého řádu.

### Případ $n = 2$

Partikulární řešení rovnice

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{8.1}$$

budeme hledat ve tvaru

$$u(x) = e^{\lambda x}, \tag{8.2}$$

kde číslo  $\lambda$  je třeba určit. Dosazením (8.2) do (8.1) dostaneme

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0,$$

a po zkrácení nenulovým výrazem  $e^{\lambda x}$  máme

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{8.3}$$

Rovnici (8.3) nazýváme *charakteristickou rovnicí* diferenciální rovnice (8.1).

Podle vzorce pro řešení kvadratické rovnice jsou kořeny rovnice (8.3) tvaru

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}. \tag{8.4}$$

Nyní jsou tři možnosti podle znaménka diskriminantu:

a) Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou reálné různé (tj.  $a_1^2 - 4a_0 > 0$ ). Podle (8.2) získáváme dvě partikulární řešení

$$u_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad u_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

pro jejichž wronskián platí

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0,$$

kde  $x$  je libovolné. Podle vět 7.15 a 7.17 je obecné řešení rovnice (8.1) tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

b) Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou reálné stejné, tj.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_*$  (případ  $a_1^2 - 4a_0 = 0$ ). V tomto případě z (8.4) plyne

$$2\lambda_* + a_1 = 0. \tag{8.5}$$

Vztah (8.2) nám dává jedno partikulární řešení

$$u_1(x) = e^{\lambda_* x}.$$

S pomocí (8.5) ukážeme, že

$$u_2(x) = x e^{\lambda_* x}$$

je také partikulární řešení rovnice (8.1). Skutečně,

$$u_2'(x) = e^{\lambda_* x} + \lambda_* x e^{\lambda_* x} = (1 + \lambda_* x) e^{\lambda_* x},$$

$$u_2''(x) = \lambda_* e^{\lambda_* x} + (\lambda_* e^{\lambda_* x} + \lambda_*^2 x e^{\lambda_* x}) = (2\lambda_* + \lambda_*^2 x) e^{\lambda_* x}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} u_2''(x) + a_1 u_2'(x) + a_0 u_2(x) &= e^{\lambda_* x} [(2\lambda_* + \lambda_*^2 x) + (1 + \lambda_* x) a_1 + a_0 x] \\ &= e^{\lambda_* x} \left[ \underbrace{x(\lambda_*^2 + a_1 \lambda_* + a_0)}_{=0} + \underbrace{(2\lambda_* + a_1)}_{=0} \right] = 0; \end{aligned}$$

v posledním vztahu jsme užili (8.3) a (8.5). Pro wronskián v tomto případě platí

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_* x} & x e^{\lambda_* x} \\ \lambda_* e^{\lambda_* x} & e^{\lambda_* x} + \lambda_* x e^{\lambda_* x} \end{pmatrix} = e^{2\lambda_* x} \neq 0,$$

kde  $x$  je libovolné. Podle vět 7.15 a 7.17 je obecné řešení rovnice (8.1) tvaru

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_* x}.$$

c) Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou imaginární, tj.  $\lambda_1 = \mu + i\nu$ ,  $\lambda_2 = \mu - i\nu$ , kde  $\nu \neq 0$  (případ  $a_1^2 - 4a_0 < 0$ ). V tomto případě nám vztah (8.2) a Eulerova formule (viz poznámku 3.23) dávají tato partikulární řešení ve tvaru komplexních funkcí reálné proměnné  $x$ :

$$\begin{aligned} u_1^*(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{(\mu+i\nu)x} = e^{\mu x} e^{i\nu x} = e^{\mu x} (\cos \nu x + i \sin \nu x), \\ u_2^*(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^{(\mu-i\nu)x} = e^{\mu x} e^{-i\nu x} = e^{\mu x} (\cos \nu x - i \sin \nu x). \end{aligned}$$

Tato dvě řešení jsme záměrně označili hvězdičkou, poněvadž nejsou příliš uspokojivá v tom smyslu, že hledáme řešení s hodnotami v reálném (nikoliv komplexním) oboru. Podle věty 7.9 víme, že libovolná lineární kombinace dvou řešení je opět řešením dané rovnice. K tomu, abychom z této dvojice nereálných řešení obdrželi dvojici reálných (lineárně nezávislých) řešení, stačí položit

$$u_1(x) = \frac{1}{2}(u_1^*(x) + u_2^*(x)), \quad u_2(x) = \frac{1}{i2}(u_1^*(x) - u_2^*(x)),$$

což vede na dvojici reálných funkcí

$$u_1(x) = e^{\mu x} \cos \nu x, \quad u_2(x) = e^{\mu x} \sin \nu x.$$

Pro wronskián v tomto případě platí

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\mu x} \cos \nu x & e^{\mu x} \sin \nu x \\ \mu e^{\mu x} \cos \nu x - \nu e^{\mu x} \sin \nu x & \mu e^{\mu x} \sin \nu x + \nu e^{\mu x} \cos \nu x \end{pmatrix} = \nu e^{2\mu x} \neq 0,$$

kde  $x$  je libovolné (připomínáme, že v tomto případě je  $b \neq 0$ ), a dvojice řešení  $u_1, u_2$  je tedy lineárně nezávislá. Podle vět 7.15 a 7.17 je obecné řešení rovnice (8.1) v tomto případě tvaru

$$y(x) = e^{\mu x} (C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x).$$

### Případ obecného $n$

V případě homogenní LODR $n$  s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (8.6)$$

hledáme opět partikulární řešení ve tvaru (8.2). Jeho dosazením do (8.6) dostáváme charakteristickou rovnici

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (8.7)$$

Konstrukci potřebných  $n$  lineárně nezávislých řešení rovnice (8.6) provedeme opět pomocí kořenů charakteristické rovnice (8.7), a to s využitím následující věty.

■ **Věta 8.1.** a) Ke každému  $k$ -násobnému reálnému kořenu  $\lambda = \lambda_*$  charakteristické rovnice (8.7) přísluší právě  $k$  lineárně nezávislých partikulárních řešení rovnice (8.6) tvaru

$$u_1(x) = e^{\lambda_* x}, \quad u_2(x) = x e^{\lambda_* x}, \quad \dots, \quad u_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda_* x}.$$

b) Ke každému  $k$ -násobnému imaginárnímu kořenu  $\lambda = \mu + iv$  (a zároveň jeho komplexně sdruženému kořenu  $\bar{\lambda} = \mu - iv$ , který má také násobnost  $k$ ) přísluší právě  $2k$  lineárně nezávislých partikulárních řešení rovnice (8.6) tvaru

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\mu x} \cos vx, & u_2(x) &= x e^{\mu x} \cos vx, & \dots, & & u_k(x) &= x^{k-1} e^{\mu x} \cos vx, \\ u_{k+1}(x) &= e^{\mu x} \sin vx, & u_{k+2}(x) &= x e^{\mu x} \sin vx, & \dots, & & u_{2k}(x) &= x^{k-1} e^{\mu x} \sin vx. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Je zobecněním postupu užitého v případě  $n = 2$ . □

Aplikujeme-li předcházející větu na každý kořen (8.7), obdržíme požadovaných  $n$  lineárně nezávislých řešení diferenciální rovnice (8.6), tedy fundamentální systém řešení této rovnice.

**Poznámka 8.2.** V aplikacích se můžeme setkat i s diferenciálními rovnicemi, jejichž vedoucí koeficient u nejvyšší derivace hledané funkce není roven jedné (je ale samozřejmě nenulový). V případě homogenní LODRn s konstantními koeficienty jde o tvar

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Tuto rovnici můžeme buďto vydělit jejím vedoucím koeficientem  $a_n$ , čímž obdržíme výše analyzovaný tvar (8.6), nebo ji řešíme přímo pomocí odpovídající charakteristické rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Nyní budeme výše popsané algoritmy řešení ilustrovat na příkladech.

**Příklady 8.3.** a) Řešme diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \tag{8.8}$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice je tvaru  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$  a má dva různé reálné kořeny  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Odtud tedy dostáváme, že funkce

$$u_1(x) = e^{-3x}, \quad u_2(x) = e^x$$

jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (8.8). Obecné řešení pak má tvar

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Řešme počáteční úlohu

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  má dvojnásobný kořen  $\lambda_{1,2} = 2$ . Proto je obecné řešení dané rovnice tvaru

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

K tomu, abychom mohli dosadit druhou z počátečních podmínek, je třeba derivovat obecné řešení; tedy

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2(1 + 2x)e^{2x}.$$

Dosažením počátečních podmínek pak máme

$$1 = y(0) = C_1, \quad 0 = y'(0) = 2C_1 + C_2, \quad \text{tj. } C_1 = 1, \quad C_2 = -2.$$

Příslušné partikulární řešení je pak tvaru

$$y(x) = (1 - 2x)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

c) Určeme řešení počátečního problému

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0.$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice  $\lambda^4 - 1 = 0$  má kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i$ . Odtud dostáváme obecné řešení dané rovnice ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečních podmínek do obecného řešení a jeho derivací

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x,$$

$$y''(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x,$$

$$y'''(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x$$

dostáváme  $C_1 = C_2 = 1/2$ ,  $C_3 = C_4 = 0$ . Řešením dané počáteční úlohy je proto funkce

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 8.4.** Již bylo výše uvedeno, že v případě homogenních lineárních ODR $n$  s nekonstantními koeficienty neexistuje obecný algoritmus vedoucí k nalezení exaktního řešení. V některých speciálních případech tyto rovnice řešit lze, a to většinou pomocí vhodné substituce, která danou rovnici převede na tvar, který již řešitelný je (např. na rovnici s konstantními koeficienty). Pro většinu případů však analytické metody řešení neexistují. Jako ilustraci uveďme tzv. Airyho rovnici

$$y'' - xy = 0,$$

kteřou lze z formálního hlediska považovat patrně za nejjednodušší homogenní lineární ODR2 s nekonstantními koeficienty (přesněji s nekonstantním koeficientem). Z výsledků předcházející sekce vyplývá, že k nalezení obecného řešení Airyho rovnice stačí nalézt její dvě lineární nezávislá řešení. Ta však nalézt neumíme (jedním z důvodů je i to, že nenulová řešení této rovnice nepatří mezi elementární funkce – jedná se o tzv. vyšší funkce). Nicméně k otázce řešení Airyho rovnice se ještě vrátíme, a to hned v sekci následující.

## 8.2 Nehomogenní lineární ODR $n$ s konstantními koeficienty

V této části rozšíříme postupy vedoucí k nalezení exaktního řešení i na rovnice nehomogenní. Budeme se tedy zabývat rovnicemi ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x), \quad (8.9)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  jsou reálné konstanty a  $b$  je spojitá nenulová funkce na nějakém intervalu  $I$ .

Věta 7.20 říká, že každé řešení rovnice (8.9) lze psát ve tvaru

$$y = C_1u_1 + C_2u_2 + \dots + C_nu_n + y_p,$$

kde funkce  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tvoří fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice (ten jsme se naučili určit v předcházející podsekci) a  $y_p$  je libovolné partikulární řešení dané nehomogenní rovnice (8.9). Stručněji řečeno, pro vyjádření obecného řešení  $y$  rovnice (8.9) platí vztah

$$y = y_h + y_p,$$

kde  $y_h$  je obecné řešení příslušné homogenní rovnice a  $y_p$  je libovolné partikulární řešení dané nehomogenní rovnice. V následujícím textu si popíšeme dvě metody, které řešení  $y_p$  umožňují nalézt. První bude *metoda neurčitých koeficientů*, která je poměrně jednoduchá, ale je omezena na pravé strany speciálního tvaru. Druhá metoda je analogií k metodě variace konstanty, se kterou jsme se seznámili v sekci 6 odstavci C.

### Metoda neurčitých koeficientů

Touto metodou se hledá partikulární řešení  $y_p$  v případě některých speciálních typů pravé strany  $b$  rovnice (8.9). Jde o tyto dva základní typy:

a) Funkce  $b$  je dána vztahem

$$b(x) = e^{\mu x} P_m(x), \quad (8.10)$$

kde  $\mu$  je dané reálné číslo a  $P_m$  je polynom tvaru

$$P_m(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m \quad (c_m \neq 0),$$

kde  $c_0, c_1, \dots, c_m$  jsou daná reálná čísla.

V tomto případě hledáme  $y_p$  ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\mu x} Q_m(x) \equiv x^k e^{\mu x} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m),$$

kde koeficienty  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  je třeba určit a kde  $k$  je násobnost kořene  $\lambda = \mu$  charakteristické rovnice

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (8.11)$$

Není-li číslo  $\mu$  kořenem rovnice (8.11), potom klademe  $k = 0$  (protože násobnost kořene  $\lambda = \mu$  je v tomto případě nulová). Poznamenejme, že případ pravé strany  $b(x) = P_m(x)$  je speciálním případem pravé strany (8.10), kdy  $\mu = 0$ .

b) Funkce  $b$  je dána obecněji vztahem

$$b(x) = e^{\mu x} (P_m(x) \cos \nu x + P_m^*(x) \sin \nu x) \quad (\nu \neq 0), \quad (8.12)$$

kde  $\mu, \nu$  jsou daná reálná čísla a  $P_m, P_m^*$  polynomy tvaru

$$P_m(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m, \quad P_m^*(x) = c_0^* + c_1^* x + \dots + c_m^* x^m, \quad (8.13)$$

kde  $c_0, c_1, \dots, c_m$  a  $c_0^*, c_1^*, \dots, c_m^*$  jsou daná čísla. Požaduje se, aby alespoň jeden z koeficientů  $c_m$  a  $c_m^*$  u mocniny  $x^m$  byl různý od nuly (z tohoto požadavku plyne, že jeden z polynomů  $P_m, P_m^*$  může být identicky roven nule).

V tomto případě hledáme  $y_p$  ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\mu x} [Q_m(x) \cos \nu x + R_m(x) \sin \nu x],$$

kde

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m, \\ R_m(x) &= \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m \end{aligned}$$

jsou polynomy, jejichž koeficienty  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  a  $\beta_0, \dots, \beta_m$  je třeba určit a kde  $k$  je násobnost kořene  $\lambda = \mu \pm i\nu$  charakteristické rovnice (8.11). Není-li číslo  $\mu \pm i\nu$  kořenem rovnice (8.11), potom klademe  $k = 0$  (protože násobnost kořene  $\lambda = \mu \pm i\nu$  je v tomto případě nulová). Příklad pravé strany  $b(x) = e^{\mu x} P_m(x)$  by byl speciálním případem pravé strany (8.12), kdybychom připustili  $\nu = 0$ .

**Příklad 8.5.** Řešme rovnici

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1. \quad (8.14)$$

**Řešení:** Charakteristická rovnice (8.11) má v tomto případě tvar

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

a tedy dvojnásobný kořen  $\lambda = 1$ . Pro obecné řešení příslušné homogenní LODR2 platí

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

Nyní sestavíme tvar, ve kterém budeme hledat řešení  $y_p$ . Protože  $b(x) = x^2 + 1$ , je  $a = 0$ . Číslo  $\lambda = a = 0$  není kořenem charakteristické rovnice, takže  $k = 0$ . Podle návodu tedy hledáme  $y_p$  ve tvaru

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

kde neznámé koeficienty  $A, B, C$  je třeba určit: Platí

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A.$$

Dosazením  $y_p, y_p', y_p''$  do (8.14) dostaneme

$$\underbrace{2A}_{y_p''(x)} - 2 \underbrace{(2Ax + B)}_{y_p'(x)} + \underbrace{(Ax^2 + Bx + C)}_{y_p(x)} = x^2 + 1,$$

neboli

$$Ax^2 + (B - 4A)x + (2A - 2B + C) = x^2 + 1.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin  $x$  dostaneme tři rovnice pro tři neznámé  $A, B, C$ :

$$A = 1, \quad B - 4A = 0, \quad 2A - 2B + C = 1.$$

Tedy  $A = 1, B = 4, C = 7$ , takže

$$y_p(x) = x^2 + 4x + 7.$$

Obecné řešení rovnice (8.14) tedy je

$$y(x) = y_b(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2x)e^x + x^2 + 4x + 7, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 8.6.** Najděme obecné řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x. \quad (8.15)$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice (8.11) je v tomto případě

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

a má tedy kořeny  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ . Odtud

$$y_b(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Navrhne tvar pro  $y_p$ . Výraz (8.10) má nyní tvar

$$b(x) = e^x P_1(x) = xe^x.$$

Protože  $a = 1$  je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (tj.  $k = 1$ ), hledáme podle návodu partikulární řešení  $y_p$  rovnice (8.15) ve tvaru

$$y_p(x) = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx),$$

kde koeficienty  $A, B$  je třeba určit. Je proto nutné vypočítat derivace  $y_p'$  a  $y_p''$ , dosadit výrazy pro  $y_p'', y_p', y_p$  do (8.15), vydělit získanou rovnicí výrazem  $e^x$  a porovnat koeficienty u stejných mocnin  $x$ . Po nepřímém složitém výpočtu zjistíme, že  $A = -\frac{1}{2}$  a  $B = -1$ . Tedy

$$y_p(x) = -\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x.$$

Obecné řešení rovnice (8.15) tedy je

$$y(x) = y_b(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + e^x \left(C_2 - \frac{1}{2}x^2 - x\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 8.7.** Najděme obecné řešení rovnice

$$y'' + y = 2 \sin x. \quad (8.16)$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice (8.11) má v tomto případě tvar

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

a tedy komplexně sdružené kořeny  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . Řešení příslušné homogenní LODR2 je proto tvaru

$$y_b(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nalezneme  $y_p$ . Protože výraz (8.12) má v tomto příkladu tvar

$$b(x) = e^0 P_0^*(x) \sin x = 2 \sin x,$$

je  $\mu \pm iv = 0 \pm i = \pm i$  jednoduchým kořenem charakteristické rovnice. Proto podle návodu hledáme partikulární řešení  $y_p$  rovnice (8.16) ve tvaru

$$y_p(x) = x(A \cos x + B \sin x) = Ax \cos x + Bx \sin x,$$

Odtud  $y_p'(x) = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x$ , takže

$$y_p''(x) = -2A \sin x - Ax \cos x + 2B \cos x - Bx \sin x.$$

Dosazením výrazů pro  $y_p''$  a  $y_p$  do (8.16) dostaneme

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 2 \sin x.$$

Tedy  $A = -1$ ,  $B = 0$  a hledané partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -x \cos x.$$

Obecné řešení rovnice (8.16) pak je

$$y(x) = y_b(x) + y_p(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 8.8.** Tvar řešení  $y_p$ , navržený metodou neurčitých koeficientů, lze sestavit i formálně jiným způsobem, než bylo popsáno výše. Jde o postup, který lépe vystihuje podstatu metody neurčitých koeficientů. Ilustrujme hlavní myšlenku na případě, kdy pravou stranou rovnice (8.9) je postupně polynom, exponenciála, příp. sinus nebo kosinus. Pro tyto případy lze tvar pro  $y_p$  navrhnout předběžně takto:

$$\begin{aligned} b(x) = P_m(x) &\Rightarrow y_p = A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0, & A_i =? \\ b(x) = K e^{\mu x} &\Rightarrow y_p(x) = A e^{\mu x}, & A =? \\ b(x) = K_1 \cos vx + K_2 \sin vx &\Rightarrow y_p = A \cos bx + B \sin bx, & A, B =? \end{aligned}$$

Pozor! Takto získaný tvar pro  $y_p$  je třeba ještě modifikovat v případech, kdy nějaký člen v navrženém tvaru pro  $y_p$  je obsažen také jako člen v  $y_b$ . V takovém případě je nutné celý předpokládaný tvar řešení  $y_p$  násobit opakovaně faktorem  $x$ , dokud  $y_p$  nemá žádný společný člen s  $y_b$ .

Právě popsany postup bude ilustrován v následujícím příkladu. Současně zde ukážeme, jak jednoduše se dá využít principu superpozice (viz větu 7.21).

**Příklad 8.9.** Řešme rovnici

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1 + e^x. \quad (8.17)$$

*Řešení.* Především poznamenejme, že příslušná homogenní LODR2 již byla řešena v příkladu 8.5, odkud máme

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Pravou stranu rovnice (8.17) si rozložíme na součet dvou funkcí

$$b_1(x) = x^2 + 1, \quad b_2(x) = e^x$$

a užijeme větu 7.21. Rovnici s pravou stranou  $b_1(x)$  jsme také řešili v příkladu 8.5; její partikulární řešení je tvaru

$$y_{p_1}(x) = x^2 + 4x + 7.$$

Zbývá určit partikulární řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^x. \quad (8.18)$$

Provedeme postup zmíněný v poznámce 8.8. Protože  $b_2(x) = e^x$ , budeme řešení  $y_{p_2}$  předpokládat nejprve ve tvaru  $y_{p_2}(x) = Ae^x$ . Tento člen je však obsažen v  $y_h$  jako  $C_1 e^x$  (označení konstanty zde není podstatné). Vynásobíme proto tento tvar faktorem  $x$ , čímž dostáváme  $Axe^x$ . I tento výraz je však zahrnut v  $y_h$  (jako  $C_2 x e^x$ ). Opakované násobení  $x$  dává

$$y_{p_2}(x) = Ax^2 e^x, \quad A = ?$$

Teprve toto vyjádření  $y_{p_2}$  lze považovat za konečné (tento člen již není součástí  $y_h$ ). Odtud derivací dostáváme

$$y'_{p_2}(x) = 2Axe^x + Ax^2 e^x, \quad y''_{p_2}(x) = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x.$$

Dosazením  $y_{p_2}$ ,  $y'_{p_2}$ ,  $y''_{p_2}$  do rovnice (8.18) dostaneme po zkrácení funkcí  $e^x$  a jednoduchých úpravách  $A = 1/2$ . Tedy

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x,$$

a odtud dohromady

$$y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^x + x^2 + 4x + 7, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### Metoda variace konstant

Podobně jako v případě LODR1 (podsekce 6.2, oddíl C) budeme hledat řešení rovnice (8.9) ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)u_1(x) + \dots + C_n(x)u_n(x), \quad (8.19)$$

kde funkce  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tvoří fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice a funkce  $C_1, C_2, \dots, C_n$  je třeba určit. Funkce (8.19) musí splňovat rovnici (8.9) – to je však jen jedna podmínka pro  $n$  neznámých funkcí  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ . Musíme tedy stanovit dalších  $n - 1$  nezávislých podmínek pro tyto funkce. Derivujme proto (8.19):

$$y'(x) = C'_1(x)u_1(x) + \dots + C'_n(x)u_n(x) + C_1(x)u'_1(x) + \dots + C_n(x)u'_n(x).$$

Jako první podmínku stanovme

$$C'_1(x)u_1(x) + \dots + C'_n(x)u_n(x) = 0. \quad (P_1)$$

Tedy předchozí vztah se redukuje na vztah

$$y'(x) = C_1(x)u'_1(x) + \dots + C_n(x)u'_n(x). \quad (D_1)$$

Derivujme (D<sub>1</sub>):

$$y''(x) = C'_1(x)u'_1(x) + \dots + C'_n(x)u'_n(x) + C_1(x)u''_1(x) + \dots + C_n(x)u''_n(x)$$

a jako druhou podmínku stanovme

$$C_1'(x)u_1'(x) + \dots + C_n'(x)u_n'(x) = 0, \quad (P_2)$$

takže

$$y''(x) = C_1(x)u_1''(x) + \dots + C_n(x)u_n''(x). \quad (D_2)$$

Jestliže obecně stanovíme  $k$ -tou podmínku, kde  $k = 1, \dots, n-1$ , ve tvaru

$$C_1'(x)u_1^{(k-1)}(x) + \dots + C_n'(x)u_n^{(k-1)}(x) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad (P_k)$$

potom

$$y^{(k)}(x) = C_1(x)u_1^{(k)}(x) + \dots + C_n(x)u_n^{(k)}(x) \quad (k = 1, \dots, n-1). \quad (D_k)$$

Derivací vztahu  $(D_k)$  pro  $k = n-1$  dostaneme

$$y^{(n)}(x) = C_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)u_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)u_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)u_n^{(n)}(x). \quad (D_n)$$

Dosazením (8.19) a derivací  $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$  do rovnice (8.9) dostaneme

$$\begin{aligned} & [C_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)u_n^{(n-1)}(x)] \\ & + \sum_{k=1}^n C_k(x) \underbrace{[u_k^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u_k^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)u_k'(x) + a_0(x)u_k(x)]}_{=0} = b(x) \end{aligned}$$

tedy společně s  $(P_1), (P_2), \dots, (P_{n-1})$  dostáváme tuto soustavu rovnic pro  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ :

$$\begin{aligned} C_1'(x)u_1(x) + \dots + C_n'(x)u_n(x) &= 0, \\ C_1'(x)u_1'(x) + \dots + C_n'(x)u_n'(x) &= 0, \\ &\dots \\ C_1'(x)u_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)u_n^{(n-2)}(x) &= 0, \\ C_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)u_n^{(n-1)}(x) &= b(x). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Determinant matice této soustavy je wronskián  $W(x)$ , který je vzhledem k lineární nezávislosti partikulárních řešení  $u_1, \dots, u_n$  přidružené homogenní rovnice různý od nuly pro všechna  $x \in I$ . Soustava (8.20) je tedy jednoznačně řešitelná na celém intervalu  $I$ , a lze ji vyřešit např. pomocí Cramerova pravidla: Necht'  $W_k(x)$  je determinant, který dostaneme, když  $k$ -tý sloupec wronskiánu  $W(x)$  nahradíme pravou stranou soustavy (8.20). Potom

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}, \quad \dots, \quad C_n'(x) = \frac{W_n(x)}{W(x)}$$

a integrací

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + C_1, \quad \dots, \quad C_n(x) = \int \frac{W_n(x)}{W(x)} dx + C_n, \quad (8.21)$$

kde  $C_1, \dots, C_n$  jsou obecné konstanty. Dosazením (8.21) do (8.19) dostaneme obecné řešení rovnice (8.9).

**Příklad 8.10.** Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0. \quad (8.22)$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice příslušné homogenní LODR2 je tvaru

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

a má dvojnásobný reálný kořen  $\lambda_{1,2} = 1$ . Odtud

$$y_b(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Obecné řešení rovnice (8.22) tedy budeme hledat podle (8.19) ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)x e^x, \quad C_1(x), C_2(x) = ? \quad (8.23)$$

Abychom neznámé funkce  $C_1, C_2$  určili, musíme nejprve vyřešit soustavu (8.20) pro  $C_1'(x), C_2'(x)$  ve tvaru

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)x e^x &= 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(1+x)e^x &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

K vyřešení této soustavy není potřeba užití Cramerova pravidla, stačí zkrátit dané rovnice členem  $e^x$  a odečíst první rovnici od druhé. Odtud

$$C_1'(x) = -1, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Integrací těchto vztahů dostáváme

$$C_1(x) = \int (-1) dx = -x + C_1, \quad C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2.$$

Dosažením do (8.23) tedy máme obecné řešení ve tvaru

$$y(x) = (-x + C_1)e^x + (\ln x + C_2)x e^x = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kde místo  $C_2 - 1$  píšeme opět  $C_2$ .

Kdybychom při integraci funkcí  $C_1'(x), C_2'(x)$  nepsali integrační konstanty, pak po dosažení do tvaru (8.21) dostáváme partikulární řešení  $y_p$  rovnice (8.22). Hledané obecné řešení  $y$  pak určíme podobně jako u metody neurčitých koeficientů pomocí vztahu  $y = y_b + y_p$ . Z tohoto hlediska je tedy metoda variace konstant další metodou pro určení  $y_p$ .

**Poznámky 8.11.** a) Metoda variace konstant funguje i v případě nekonstantních koeficientů, tj. v případě rovnice (7.15), vyžaduje však znalost fundamentálního systému řešení příslušné homogenní rovnice, který lze pro nekonstantní koeficienty málokdy získat.

b) V případě, kdy rovnice (8.9) je psána s vedoucím koeficientem  $a_n$ , tj. ve tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

pak se soustava (8.20) modifikuje na

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x)/a_n \end{pmatrix}.$$

c) Ačkoli má metoda variace konstant jednoduše čitelný algoritmus, není příliš praktická z početního hlediska, neboť kromě řešení soustavy lineárních rovnic zahrnuje výpočet  $n$  integrálů, viz vztahy (8.21) (tyto integrály nemusí být vůbec jednoduché určit). Pokud to tedy tvar pravé strany dovoluje, preferujeme užití metody neurčitých koeficientů.

## Příklady k procvičení

**Cvičení 8.12.** Dvojici funkcí  $u_1(x) = x^2$ ,  $u_2(x) = \cos 2x$  doplňte tak, aby tvořila fundamentální systém řešení nějaké homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty. Jakého nejmenšího řádu tato rovnice bude?

*Výsledky.*  $u_3(x) = \sin 2x$ ,  $u_4(x) = 1$ ,  $u_5(x) = x$ ,  $n = 5$ .

**Cvičení 8.13.** Nalezněte obecné řešení daných diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y'' + y' - 2y = 0; & \text{b) } 4y'' - 8y' + 5y = 0; \\ \text{c) } y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \neq 0); & \text{d) } y^{(4)} - 2y'' + y = 0. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; b)  $y(x) = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; c)  $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; d)  $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$ ,  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 8.14.** Nalezněte řešení daných počátečních problémů:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 4y'' + 4y' + y = 0, & y(0) = 2, y'(0) = 0; \\ \text{b) } y^{(4)} - y''' + y'' - y' = 0, & y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = e^{-x/2}(2 + x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $y(x) = \frac{1}{2}(e^x + \cos x + \sin x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 8.15.** Metodou neurčitých koeficientů nalezněte obecné řešení daných diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y'' + y = x^3; & \text{b) } 2y'' + y' - y = 2e^x; \\ \text{c) } y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x); & \text{d) } y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x; \\ \text{e) } y'' + y = 4x \sin x; & \text{f) } y'' - y' - 2y = \cosh 2x; \\ \text{g) } 2y'' + 5y' = \cos^2 x; & \text{h) } y'' - 7y' + 6y = \sin x + e^x; \\ \text{i) } y'' + y' - 2y = \sqrt{e^x} - 2e^x + 1; & \text{j) } y''' + 9y' = 2x + \cos 3x + e^{3x}. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^3 - 6x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; b)  $y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x} + e^x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; c)  $y(x) = e^x(C_1 + x + 2x^2) + C_2 e^{2x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; d)  $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2 \cos x + \sin x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; e)  $y(x) = (C_1 - x^2) \cos x + (C_2 + x) \sin x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; f)  $y(x) = (C_1 + x/6)e^{2x} + C_2 e^{-x} + e^{-2x}/8$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; g)  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + x/10 + 5 \sin 2x/164 - \cos 2x/41$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; h)  $y(x) = C_1 e^{6x} + (C_2 - x/5)e^x + 5 \sin x/74 + 7 \cos x/74$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; i)  $y(x) = (C_1 - 2x/3)e^x + C_2 e^{-2x} - 4\sqrt{e^x}/5 - 1/2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; j)  $y(x) = C_1 + (C_2 - x/18) \cos 3x + C_3 \sin 3x + x^2/9 + e^{3x}/54$ ,  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 8.16.** Metodou neurčitých koeficientů nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y'' + y = \sin \omega x \quad (\omega > 0), & y(0) = 0, y'(0) = 1; \\ \text{b) } y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}, & y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = \frac{1}{2}(3 \sin x - x \cos x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pro  $\omega = 1$ ,  $y(x) = \frac{1-\omega-\omega^2}{1-\omega^2} \sin x + \frac{1}{1-\omega^2} \sin \omega x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pro  $\omega \neq 1$ ; b)  $y(x) = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 8.17.** Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení daných diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}; & \text{b) } y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x; \\ \text{c) } y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}; & \text{d) } y'' + y = \operatorname{tg} x. \end{array}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + (C_2 - x - \operatorname{cotg} x/2) \sin 2x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; b)  $y(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x + x^2 \ln x/2 - 3x^2/4)$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; c)  $y(x) = e^x(C_1 + x) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; d)  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \frac{1+\sin x}{\cos x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 8.18.** Metodou variace konstant nalezněte řešení daných počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } y'' + 4y &= \frac{1}{\sin 2x}, & y(\pi/4) &= 0, & y'(\pi/4) &= 0; \\ \text{b) } y'' - 2y' + y &= e^x \operatorname{arctg} x, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = (\pi/8 - x/2) \cos 2x + \ln |\sin 2x| \sin 2x/4$ ,  $x \in (0, \pi/2)$ ; b)  $y(x) = e^x(x^2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x - x \ln(x^2 + 1) + x)/2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 9 Metoda Laplaceovy transformace a Taylorových řad

V předcházející sekci jsme se naučili řešit lineární diferenciální ODR $n$  s konstantními koeficienty. Cílem této sekce bude diskuse následujících otázek: Existují nějaké další alternativní metody řešení těchto typů diferenciálních rovnic? Pokud ano, jedná se jen o jiný způsob řešení daného typu rovnic, nebo tyto metody mohou být užitečné i v širším smyslu?

### 9.1 Laplaceova transformace

V základních kurzech matematiky jsme se již setkali se situacemi, kdy jsme nějakým funkcím přiřadili jistým pevně daným způsobem jiné funkce, např. funkci její derivaci. Takovému procesu se často říká transformace, právě z důvodu, že původní funkce se transformuje (mění) na jinou funkci, obvykle tak, aby tato nová funkce byla z pohledu další manipulace výhodnější. Laplaceova transformace, která patří mezi tzv. integrální transformace (definuje se totiž určitým integrálem, který závisí na parametru), nachází uplatnění v mnoha oborech technické praxe, studenti se s ní ještě setkají minimálně v kurzu věnovanému automatizaci. V našem výkladu bude Laplaceova transformace aplikována při řešení lineárních diferenciálních rovnic  $n$ -tého řádu. Transformace funguje totiž tak, že převádí LODR $n$  s konstantními koeficienty na algebraickou rovnici.

**Definice 9.1 — Laplaceovy transformace.** Necht'  $f$  je reálná funkce definována na  $\langle 0, \infty \rangle$ . Potom Laplaceova transformace funkce  $f$  je funkce  $\mathcal{L}\{f\}$  daná vztahem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

pro všechna (obecně komplexní) čísla  $s$ , pro která tento nevlastní integrál konverguje. Výraz  $\mathcal{L}\{f\}$  pak nazýváme Laplaceovým obrazem funkce  $f$ .

**Poznámka 9.2.** Uvedený integrál nemusí obecně existovat pro žádná  $s$  nebo existuje pouze pro malý počet těchto bodů.

**Příklad 9.3.** Určeme Laplaceovy obrazy funkcí 1 a  $x$ .

*Řešení.*

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} [e^{-sx}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} + \frac{1}{s}.$$

Aby byl integrál konvergentní, musí být limita v poslední rovnosti konečná. Napišeme-li komplexní číslo  $s$  jako  $s = u + iv$ , pak užitím Eulerovy formule platí  $e^{-sx} = e^{-(u+iv)x} = e^{-ux} e^{-ivx} = e^{-ux} (\cos vx - i \sin vx)$ . Protože funkce  $\cos vx$ ,  $\sin vx$  jsou ohraničené pro libovolné hodnoty  $v$  a  $x$ , o limitě rozhodne člen  $e^{-ux}$ . Tato limita bude nulová, je-li  $u > 0$  a nekonečná, je-li  $u < 0$ . Přeznačíme-li  $\operatorname{Re} s = u$  (reálná část komplexního čísla  $s$ ), máme

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{je-li } \operatorname{Re} s > 0.$$

Podobně

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \int_0^{\infty} x e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{l} x = u \quad e^{-sx} = v' \\ 1 = u' \quad -e^{-sx}/s = v \end{array} \right| = -\left[ \frac{x}{s} e^{-sx} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s^2},$$

je-li  $\operatorname{Re} s > 0$ .

**Poznámka 9.4.** Matematickou indukcí lze dále ukázat, že  $\mathcal{L}\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Příklad 9.5.** Určeme Laplaceovy obrazy funkcí  $\cos ax$  a  $\sin ax$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ .

**Řešení.** Spočítejme nejprve Laplaceovy obrazy funkcí  $e^{\pm iax}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{\pm iax}\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{\pm iax} e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(\pm ia - s)x} dx = \frac{1}{\pm ia - s} [e^{(\pm ia - s)x}]_0^{\infty} = \frac{1}{\pm ia - s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\pm ia - s)x} + \frac{1}{s \mp ia}. \end{aligned}$$

Za předpokladu  $\operatorname{Re} s > 0$  je limita v poslední rovnosti nulová, tedy

$$\mathcal{L}\{e^{\pm iax}\}(s) = \frac{1}{s \mp ia}.$$

Z Eulerova vzorce  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  dále plyne  $\cos ax = \frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})$  a  $\sin ax = \frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})$ . Odtud ihned

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos ax\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{iax}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-iax}\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s + ia + s - ia}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin ax\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})\right\}(s) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{iax}\}(s) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-iax}\}(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{s + ia - s + ia}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Postupovat lze také následovně. S využitím integrace per-partes (dvakrát) máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos ax\}(s) &= \int_0^{\infty} \cos ax e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{l} \cos ax = u' \quad e^{-sx} = v \\ \frac{1}{a} \sin ax = u \quad -se^{-sx} = v' \end{array} \right| = \frac{1}{a} [\sin ax e^{-sx}]_0^{\infty} \\ &+ \frac{s}{a} \int_0^{\infty} \sin ax e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{l} \sin ax = u' \quad e^{-sx} = v \\ -\frac{1}{a} \cos ax = u \quad -se^{-sx} = v' \end{array} \right| = -\frac{s}{a^2} [\cos ax e^{-sx}]_0^{\infty} \\ &- \frac{s^2}{a^2} \int_0^{\infty} \cos ax e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathcal{L}\{\cos ax\}(s) \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{s}{a^2} \implies \mathcal{L}\{\cos ax\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Analogicky je možné obdržet výsledek pro funkci  $\sin ax$ .

**Příklad 9.6.** Určeme Laplaceův obraz funkce  $e^{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

*Řešení.* Podle definice je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ax}\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{ax} e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} e^{(a-s)x} dt = \frac{1}{a-s} [e^{(a-s)x}]_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{(a-s)x} - 1) \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{pro } \operatorname{Re} s > a.\end{aligned}$$

**Poznámka 9.7.** Předchozí příklad naznačuje, jaké (postačující) podmínky je třeba klást na funkci  $f$ , aby Laplaceův obraz existoval (na dostatečně velké množině). Tyto jsou formulovány v následujícím tvrzení.

■ **Věta 9.8 — o existenci Laplaceovy transformace.** *Nechť funkce  $f$  je po částech spojitá na  $\langle 0, \infty \rangle$ , přičemž existují kladné reálné konstanty  $K, a$  takové, že  $|f(x)| \leq K e^{ax}$  na nějakém intervalu  $\langle x_0, \infty \rangle$ ,  $x_0 \geq 0$  (v tomto případě řekneme, že funkce je exponenciálně omezená). Potom  $\mathcal{L}\{f\}$  je definována pro všechna  $\operatorname{Re} s > a$ . Navíc,  $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$ .*

V tabulce níže jsou uvedeny Laplaceovy obrazy vybraných funkcí – jsou to právě ty funkce, které hrají důležitou roli při řešení LODRn s konstantními koeficienty (předpokládáme přitom  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

Tabulka 9.1: Laplaceova transformace vybraných funkcí

| $f(x), x \geq 0$ | $\mathcal{L}\{f\}(s)$                             | $f(x), x \geq 0$ | $\mathcal{L}\{f\}(s)$                                      |
|------------------|---|------------------|--|
| 1                | $\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s > 0$            | $\sin ax$        | $\frac{a}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re} s > 0$             |
| $x$              | $\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re} s > 0$          | $\cos ax$        | $\frac{s}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re} s > 0$             |
| $x^n$ ,          | $\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re} s > 0$     | $e^{ax} \sin bx$ | $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} s > a$         |
| $e^{ax}$ ,       | $\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re} s > a$          | $e^{ax} \cos bx$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} s > a$       |
| $x e^{ax}$ ,     | $\frac{1}{(s-a)^2}, \operatorname{Re} s > a$      | $x \sin ax$      | $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \operatorname{Re} s > 0$       |
| $x^n e^{ax}$ ,   | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \operatorname{Re} s > a$ | $x \cos ax$      | $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \operatorname{Re} s > 0$ |

Aby mohla být Laplaceova transformace aplikována, musíme umět provést také zpětný proces, tj. dané komplexní funkci  $F(s)$  přiřadit reálnou funkci  $f(x)$ .

**Definice 9.9 — inverzní Laplaceovy transformace.** Je-li  $F$  komplexní funkce, potom *inverzní Laplaceovou transformací* funkce  $F$  nazveme reálnou funkci  $f$ , pro kterou platí  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ . Pro tuto inverzní transformaci přitom užíváme označení  $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ .

**Poznámka 9.10.** Například,  $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\}(x) = 1$ . Otázkou však zůstává, zda nemůže existovat i jiná funkce  $f$ , která dá Laplaceův obraz  $1/s$ , tj. zda je inverzní Laplaceova transformace jednoznačná. Omezíme-li se na spojitě funkce, následující věta říká, že další taková funkce není.

■ **Věta 9.11 — Lerchova.** *Jsou-li funkce  $f, g$  spojitě na  $\langle 0, \infty \rangle$ , přičemž  $\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$ , pak  $f(x) = g(x) \forall x \in \langle 0, \infty \rangle$ .*

**Poznámka 9.12.** Jinak řečeno, dvě různé spojitě funkce nemohou mít stejný Laplaceův obraz. Kdybychom vynechali předpoklad spojitosti, tak tvrzení neplatí, nicméně funkce mající stejný Laplaceův obraz by se nelišily „příliš mnoho“. Poznamenejme ještě, že inverzní Laplaceovu transformaci je možné

vyjádřit vzorcem

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{sx} ds \quad \text{pro všechna } s \in \mathbb{C} \text{ taková, že } \operatorname{Re} s > c,$$

přičemž  $c$  je vhodné reálné číslo. Tento vzorec představuje speciální křivkový integrál v komplexní rovině a z praktického hlediska není příliš použitelný (vede obvykle ke složitým výpočtům). Vzhledem k jednoznačnosti transformace tedy využíváme spíše „slovníku“ Laplaceovy transformace, viz tabulku 9.1.

### Vlastnosti Laplaceovy transformace

Zabývejme se nyní několika důležitými vlastnostmi, které budou využity při řešení LODR $n$ . Vhodnost použití transformace pro lineární úlohy je dána vlastností

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Jinak řečeno, Laplaceova transformace součtu je součet Laplaceových transformací a totéž platí i pro násobení reálným skalárem – hovoříme o *linearitě Laplaceovy transformace*. Tato vlastnost je přímým důsledkem linearitě integrálu (a byla již využita v příkladu 9.5). Je snadné ověřit, že také inverzní Laplaceova transformace je v tomto smyslu lineární.

Nechť funkce  $f$  je spojitá na  $(0, \infty)$ , je exponenciálně omezená, a její derivace je po částech spojitá. Potom platí

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0).$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^\infty f'(x)e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{l} f'(x) = u' \quad e^{-sx} = v \\ f(x) = u \quad -se^{-sx} = v' \end{array} \right| = [f(x)e^{-sx}]_0^\infty \\ &+ s \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx = s\mathcal{L}\{f\}(s) + \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{-sx} - f(0) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Podobně, předpokládáme-li navíc, že  $f$  má spojitě derivace do řádu  $n-1$  a  $f^{(n)}$  je po částech spojitá, přičemž tyto derivace jsou exponenciálně omezené do řádu  $n-1$ , pak matematickou indukcí lze snadno ukázat

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Této vlastnosti využíváme při řešení počátečních úloh pro LODR $n$ . Postupujeme přitom tak, že provedeme Laplaceovu transformaci obou stran rovnice, což vede na algebraickou rovnici, ze které vyjádříme  $\mathcal{L}\{y\}(s)$ . Pak aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci, čímž dostaneme původní řešení.

Naopak, užitím věty o derivaci podle parametru, pro derivaci Laplaceova obrazu platí

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{-xf(x)\}(s) \quad \text{a} \quad \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n x^n f(x)\}(s).$$

**Příklad 9.13.** Metodou Laplaceovy transformace vyřešme počáteční úlohu

$$y'' + 6y' + 9y = 8xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

*Řešení.* Označíme-li  $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ , potom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\}(s) &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s - 0, \\ \mathcal{L}\{y'\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1. \end{aligned}$$

Laplaceův obraz zadané rovnice tedy je

$$s^2 Y(s) - s + 6(sY(s) - 1) + 9Y(s) = \frac{8}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s)(s^2 + 6s + 9) = s + 6 + \frac{8}{(s+1)^2}.$$

Odtud, pomocí rozkladu na parciální zlomky máme

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+6}{s^2+6s+9}}_{Z_1} + \underbrace{\frac{8}{(s+1)^2(s^2+6s+9)}}_{Z_2} = \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{Z_1} + \frac{3}{(s+3)^2} + \underbrace{\frac{2}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}}_{Z_2} = \frac{3}{s+3} + \frac{5}{(s+3)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}.$$

Podle tabulky 9.1 (s využitím linearity inverzní Laplaceovy transformace) dostáváme

$$y(x) = 3e^{-3x} + 5xe^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

### Konvoluce funkcí

V případě Laplaceovy transformace neplatí  $\mathcal{L}\{f \cdot g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s)$ , tj. Laplaceova transformace součinu není součin Laplaceových transformací (např.  $1/s = \mathcal{L}\{1\}(s) = \mathcal{L}\{1 \cdot 1\}(s) \neq 1/s \cdot 1/s$ ). Tuto vlastnost však splňuje tzv. konvoluce funkcí ( $f * g$ ), která je pro funkce  $f, g$  definované na  $\langle 0, \infty \rangle$  dána vztahem

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(t)g(x-t)dt, \quad x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Konvoluce je komutativní, tj.  $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ . Poznamenejme, že postačující podmínkou pro existenci konvoluce ( $f * g$ ) na  $\langle 0, \infty \rangle$  je po částech spojitost obou funkcí  $f, g$  na  $\langle 0, \infty \rangle$ . Necht'  $f, g$  jsou navíc exponenciálně omezené. Potom platí

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s).$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^\infty \left( \int_0^x f(t)g(x-t)dt \right) e^{-sx} dx = \int_0^\infty \left( \int_t^\infty f(t)g(x-t)e^{-sx} dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left( \int_t^\infty g(x-t)e^{-sx} dx \right) dt = |x-t=u| = \int_0^\infty f(t) \left( \int_0^\infty g(u)e^{-s(u+t)} du \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \cdot \int_0^\infty g(u)e^{-su} du = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s). \end{aligned}$$

Při řešení předcházejícího příkladu šlo postupovat také tak, že zlomek  $Z_2$  chápeme jako součin

$$\frac{8}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s^2+6s+9} = \frac{8}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{(s+3)^2}$$

a tedy inverzí je konvoluce

$$8xe^{-x} * xe^{-3x} = 8 \int_0^x te^{-t}(x-t)e^{-3(x-t)} dt = 8xe^{-3x} \int_0^x te^{2t} dt - 8e^{-3x} \int_0^x t^2 e^{2t} dt.$$

Integrací per-partes po úpravě máme  $8xe^{-x} * xe^{-3x} = 2xe^{-3x} + 2e^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}$ . Odtud

$$y(x) = \underbrace{e^{-3x} + 3xe^{-3x}}_{Z_1} + \underbrace{2xe^{-3x} + 2e^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}}_{Z_2} = 3e^{-3x} + 5xe^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

Obdrželi jsme tedy řešení ve stejném tvaru jako v příkladu 9.13.

Již víme, že obecné řešení nehomogenní LODR $n$  s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b \quad (9.1)$$

lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + \dots + C_nu_n(x) + y_p(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

kde funkce  $u_1, \dots, u_n$  tvoří fundamentální systém řešení (tj. nějakou  $n$ -tici lineárně nezávislých řešení) příslušné homogenní LODRn a  $y_p$  je nějaké řešení nehomogenní LODRn. Z předcházejících úvah vyplývá, že řešení  $y_p$  lze vyjádřit jako konvoluci pravé strany rovnice s určitým řešením příslušné homogenní rovnice. Přesněji, platí následující tvrzení:

■ **Věta 9.14.** *Nechť  $u$  je řešení homogenní LODRn s konstantními koeficienty (tj. rovnice (8.6)) vyhovující počátečním podmínkám*

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \dots, \quad u^{(n-2)}(0) = 0, \quad u^{(n-1)}(0) = 1.$$

Potom funkce

$$y_p(x) = (u * b)(x)$$

je partikulárním řešením rovnice (9.1) (zde předpokládáme, že  $b$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$  nebo alespoň na  $\langle 0, \ell \rangle$ ,  $\ell > 0$ ). Navíc platí  $y_p^{(k)}(0) = 0$  pro  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Poznamenejme ještě, že přímým důsledkem Laplaceovy transformace konvoluce (položíme-li  $g(x) = 1$ ) je vztah

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} (s) = \mathcal{L}\{1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f\}(s).$$

**Příklad 9.15.** Metodou Laplaceovy transformace vyřešme počáteční úlohu

$$y'' + y = \sin \omega x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

*Řešení.* Laplaceova transformace rovnice dává  $s^2 Y(s) - s \cdot 0 - 1 + Y(s) = \omega / (s^2 + \omega^2)$  ( $Y$  opět značí Laplaceův obraz řešení  $y$ ). Odtud

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{\omega}{(s^2 + 1)(s^2 + \omega^2)}.$$

Uvažujme nejprve případ  $\omega \neq 1$ . Rozkladem druhého sčítance na parciální zlomky dostaneme

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2 - 1 + \omega}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Podle tabulky 9.1 máme

$$y(x) = \frac{\omega^2 - 1 + \omega}{\omega^2 - 1} \sin x - \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin \omega x.$$

Je-li  $\omega = 1$ , potom

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}.$$

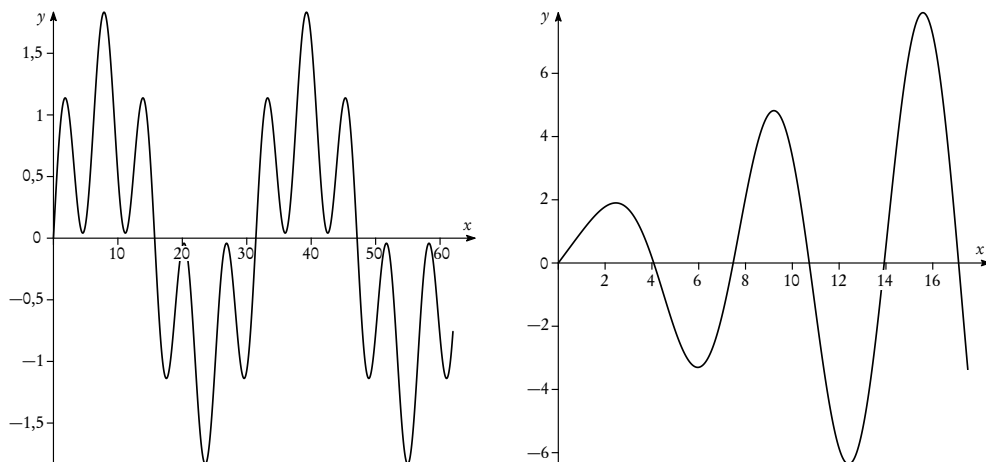
Tento tvar představuje součet dvou parciálních zlomků, avšak druhý sčítanec není obsažen v tabulce 9.1. Lze jej však upravit na tvar

$$Y(s) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Odtud již, vzhledem k tabulce 9.1, dostáváme

$$y(x) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

**Poznámka 9.16.** Představuje-li proměnná  $x$  čas, pak předchozí počáteční úlohu lze fyzikálně interpretovat jako „odezvu“ harmonického oscilátoru bez tlumení, ale s působící vnější (periodicky se měnící) silou úměrnou  $\sin \omega x$ . Na počátku byla výchylka oscilátoru nula (oscilátor prochází rovnovážnou polohou), rychlost byla jedna a oscilátor kmitá s jistou úhlovou frekvencí. Pokud úhlová frekvence působící síly není v rezonanci s vlastními kmity soustavy, tj.  $\omega \neq 1$ , potom se celková amplituda kmitů s ubíhajícím časem nemění, viz obrázek 9.1 vlevo (odpovídá  $\omega = 1/5$ ). Naopak, působí-li budící síla na stejné frekvenci jako vlastní kmity oscilátoru, tj.  $\omega = 1$ , celková amplituda kmitů s časem neustále narůstá, viz obrázek 9.1 vpravo. Tento stav v praxi není žádoucí, vzniká například, je-li v konstrukci špatně uložena otáčející se hřídel (dochází k rezonanci konstrukce, což může vést k havárii).



Obrázek 9.1: Závislost výchylky oscilátoru na čase s vnější periodickou silou, která působí na jiné frekvenci než vlastní kmity (vlevo), a která působí na stejné frekvenci jako vlastní kmity (vpravo)

Dodejme ještě, že problematika kmitů harmonického oscilátoru bude podrobně diskutována v následující aplikační sekci v příkladu 10.5.

**Příklad 9.17.** Metodou Laplaceovy transformace určíme obecné řešení rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}.$$

**Řešení.** Vzorec pro Laplaceův obraz derivace „očekává“ počáteční podmínky předepsané v bodě nula. Protože tyto nyní nejsou zadány, píšme obecně  $y(0) = K_1$ ,  $y'(0) = K_2$ , kde  $K_1, K_2$  jsou libovolné konstanty. Potom

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sK_1 - K_2 + 3sY(s) - 3K_1 + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1} \\ \Rightarrow Y(s)(s^2 + 3s + 2) &= K_1(s+3) + K_2 + \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Odtud, pomocí rozkladu na parciální zlomky,

$$\begin{aligned} Y(s) &= K_1 \frac{s+3}{s^2+3s+2} + K_2 \frac{1}{s^2+3s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} \\ &= K_1 \left( \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) + K_2 \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)} \\ &= (2K_1 + K_2 - 1) \frac{1}{s+1} - (K_1 + K_2 - 1) \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Označíme-li  $C_1 := 2K_1 + K_2 - 1$  a  $C_2 := -K_1 - K_2 + 1$ , potom podle tabulky 9.1 máme

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x e^{-x}.$$

### Řešení rovnice s nekonstantními koeficienty typu polynom

Bez hlubšího výkladu naznačme postup řešení tohoto typu rovnice na následujícím příkladu.

**Příklad 9.18.** Vyřešme počáteční úlohu  $y'' + xy' - 2y = 4$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$  metodou Laplaceovy transformace.

**Řešení.** Laplaceův obraz rovnice je

$$s^2 Y(s) - s(-1) - 0 - \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y'\}(s) - 2Y(s) = \frac{4}{s},$$

tedy

$$s^2 Y(s) + s - \frac{d}{ds}(sY(s) + 1) - 2Y(s) = \frac{4}{s} \quad \Rightarrow \quad s^2 Y(s) + s - Y(s) - sY'(s) - 2Y(s) = \frac{4}{s}$$

a po úpravě

$$Y' + \left(\frac{3}{s} - s\right)Y = 1 - \frac{4}{s^2},$$

což je LODR1. Obecné řešení této rovnice je

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{C e^{s^2/2}}{s^3}.$$

Za předpokladu, že řešení je exponenciálně omezené, máme podle věty 9.8  $Y(s) \rightarrow 0$  pro  $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$ , tedy  $C = 0$ . Inverze  $Y(s)$  nyní je  $y(x) = x^2 - 1$ .

### Řešení LODRn s nespojitou pravou stranou

V partiích zabývajících se LODRn jsme vždy předpokládali, že všechny funkce vystupující v rovnici (včetně pravých stran u lineárních rovnice) jsou spojitě. V úlohách technické praxe je toto však často omezující. Typickým příkladem vedoucím na nespojitost je zatížení nosníku v jednom bodě nebo na jeho části. Zabývejme se tedy nyní situací, kdy pravá strana u LODRn je nespojitá. Zdůrazněme, že v takovém případě nelze hovořit o klasickém řešení ve smyslu zavedeném v příslušných partiích o ODRn; obvykle používáme obrátu *zobecněné řešení*. Zhruba řečeno, zobecnění zde bude ve smyslu, že budeme požadovat spojitost řešení, ale derivace tohoto řešení nám budou stačit pouze po částech spojitě.

**Příklad 9.19.** Vyřešme počáteční úlohu  $y'' - y' = u_a(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , kde

$$u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < a, \\ 1 & \text{pro } a \leq x < \infty. \end{cases}$$

**Řešení.** Řešme úlohu nejprve na intervalu  $(0, a)$ . Charakteristická rovnice je  $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$ . Odtud  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ , tedy  $u_1(x) = 1$ ,  $u_2(x) = e^x$  a obecné řešení je  $y(x) = C_1 + C_2 e^x$ . Z počátečních podmínek získáme partikulární řešení  $y(x) = e^x - 1$ . V bodě  $a$  tedy budou funkční hodnota a hodnota derivace  $y(a) = e^a - 1$  a  $y'(a) = e^a$ . Tyto hodnoty poslouží jako počáteční podmínky pro rovnici uvažovanou na druhé části, tj. na intervalu  $(a, \infty)$ . Metodou neurčitých koeficientů řešení  $y_p$  hledáme ve tvaru  $y_p(x) = Ax$ . Dosazením máme  $A = -1$ , obecné řešení rovnice tedy je  $y(x) = C_1 + C_2 e^x - x$ . Z počátečních podmínek  $y(a) = e^a - 1$ ,  $y'(a) = e^a$  dostaneme  $y(x) = a - 2 + (1 + e^{-a})e^x - x$ . Celkově,

$$y(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{na } (0, a), \\ (1 + e^{-a})e^x - x + a - 2 & \text{na } (a, \infty). \end{cases} \quad (9.2)$$

Takto „napojené“ řešení je včetně první derivace spojitě, ale jeho druhá derivace je nespojitá v bodě  $a$ .

Funkce  $u_a$  z předchozího příkladu se nazývá *jednotkový skok v bodě  $a$*  (též *Heavisideova funkce*). Platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_a\}(s) &= \int_0^{\infty} u_a(x)e^{-sx} dx = \int_a^{\infty} e^{-sx} dx = |x-a=t| = \int_0^{\infty} e^{-s(a+t)} dt \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = e^{-sa} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.\end{aligned}$$

Je-li  $f$  definována na  $(0; \infty)$ , potom posunutou funkcí  $f_a$ ,  $a > 0$ , budeme rozumět funkci

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{pro } x \geq a, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq x < a. \end{cases}$$

Platí  $f_a(x) = u_a(x)f(x-a)$  a pro Laplaceovu transformaci máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_a\}(s) &= \int_0^{\infty} f_a(x)e^{-sx} dx = \int_a^{\infty} f(x-a)e^{-sx} dx = |x-a=t| = \int_0^{\infty} f(t)e^{-s(t+a)} dt \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}\{f\}(s).\end{aligned}\tag{9.3}$$

**Příklad 9.20.** Vyřešme počáteční úlohu  $y'' - y' = u_a(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  metodou Laplaceovy transformace.

**Řešení.** Laplaceův obraz rovnice je  $s^2Y(s) - 1 - sY(s) = e^{-sa}s^{-1}$ . Odtud

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - s} + e^{-sa} \frac{1}{s(s^2 - s)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + e^{-sa} \left( -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \right)$$

Inverze dává

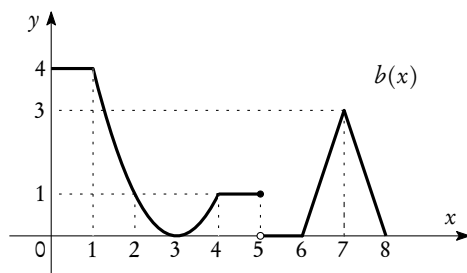
$$y(x) = -1 + e^x + u_a(x)(-1 - (x-a) + e^{x-a}),$$

což je jinak zapsané vyjádření (9.2). Vidíme, že v tomto případě je použití metody Laplaceovy transformace efektivnější než klasické metody.

**Příklad 9.21.** Vyřešme počáteční úlohu

$$y' + 2y = b(x), \quad y(0) = 0,$$

kde funkce  $b$  je znázorněna na obrázku 9.2.



Obrázek 9.2: Nespojité pravá strana rovnice

**Řešení.** Pomocí funkce  $u_a$  lze pravou stranu  $b$  napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}b(x) &= 4u_0(x) - 4u_1(x) + (x-3)^2(u_1(x) - u_4(x)) + u_4(x) - u_5(x) \\ &\quad + 3(x-6)(u_6(x) - u_7(x)) - 3(x-8)(u_7(x) - u_8(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4u_0(x) - 4u_1(x) + [(x-1) - 2]^2 u_1(x) - [(x-4) + 1]^2 u_4(x) + u_4(x) - u_5(x) \\
&\quad + 3(x-6)u_6(x) - 3[(x-7) + 1]u_7(x) - 3[(x-7) - 1]u_7(x) + 3(x-8)u_8(x) \\
&= 4u_0(x) - 4u_1(x) + (x-1)^2 u_1(x) - 4(x-1)u_1(x) + 4u_1(x) - (x-4)^2 u_4(x) \\
&\quad - 2(x-4)u_4(x) - u_4(x) + u_4(x) - u_5(x) + 3(x-6)u_6(x) - 3(x-7)u_7(x) - 3u_7(x) \\
&\quad - 3(x-7)u_7(x) + 3u_7(x) + 3(x-8)u_8(x) \\
&= 4u_0(x) + (x-1)^2 u_1(x) - 4(x-1)u_1(x) - (x-4)^2 u_4(x) - 2(x-4)u_4(x) - u_5(x) \\
&\quad + 3(x-6)u_6(x) - 6(x-7)u_7(x) + 3(x-8)u_8(x).
\end{aligned}$$

Laplaceova transformace rovnice dává

$$\begin{aligned}
sY(s) + 2Y(s) &= \frac{4}{s} + e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} - \frac{4}{s^2} \right) - e^{-4s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) - e^{-5s} \frac{1}{s} \\
&\quad + e^{-6s} \frac{3}{s^2} - e^{-7s} \frac{6}{s^2} + e^{-8s} \frac{3}{s^2}.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
Y(s) &= (4 - e^{-5s}) \frac{1}{s(s+2)} + (-4e^{-s} - 2e^{-4s} + 3e^{-6s} - 6e^{-7s} + 3e^{-8s}) \frac{1}{s^2(s+2)} \\
&\quad + (2e^{-s} - 2e^{-4s}) \frac{1}{s^3(s+2)}.
\end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky máme

$$\begin{aligned}
Y(s) &= (4 - e^{-5s}) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \\
&\quad + (-4e^{-s} - 2e^{-4s} + 3e^{-6s} - 6e^{-7s} + 3e^{-8s}) \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2} \right) \\
&\quad + (2e^{-s} - 2e^{-4s}) \frac{1}{8} \left( \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s+2} \right) \\
&= \left( 2 + e^{-s} + \frac{1}{2}e^{-4s} - \frac{1}{2}e^{-5s} - \frac{3}{4}e^{-6s} + \frac{3}{2}e^{-7s} - \frac{3}{4}e^{-8s} \right) \frac{1}{s} \\
&\quad + \left( -\frac{5}{2}e^{-s} - \frac{1}{2}e^{-4s} + \frac{3}{2}e^{-6s} - 3e^{-7s} + \frac{3}{2}e^{-8s} \right) \frac{1}{s^2} + (e^{-s} - e^{-4s}) \frac{1}{s^3} \\
&\quad + \left( -2 - \frac{5}{4}e^{-s} - \frac{1}{4}e^{-4s} + \frac{1}{2}e^{-5s} + \frac{3}{4}e^{-6s} - \frac{3}{2}e^{-7s} + \frac{3}{4}e^{-8s} \right) \frac{1}{s+2}.
\end{aligned}$$

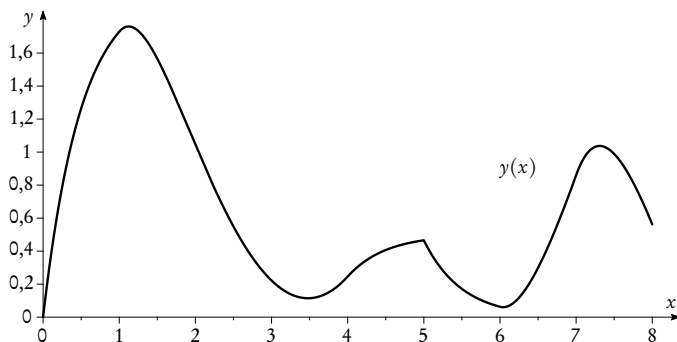
Inverze dává

$$\begin{aligned}
y(x) &= 2u_0(x) + u_1(x) + \frac{1}{2}u_4(x) - \frac{1}{2}u_5(x) - \frac{3}{4}u_6(x) + \frac{3}{2}u_7(x) - \frac{3}{4}u_8(x) - \frac{5}{2}u_1(x)(x-1) \\
&\quad - \frac{1}{2}u_4(x)(x-4) + \frac{3}{2}u_6(x)(x-6) - 3u_7(x)(x-7) + \frac{3}{2}u_8(x)(x-8) + \frac{1}{2}u_1(x)(x-1)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}u_4(x)(x-4)^2 - 2e^{-2x} - \frac{5}{4}u_1(x)e^{-2(x-1)} - \frac{1}{4}u_4(x)e^{-2(x-4)} + \frac{1}{2}u_5(x)e^{-2(x-5)} \\
&\quad + \frac{3}{4}u_6(x)e^{-2(x-6)} - \frac{3}{2}u_7(x)e^{-2(x-7)} + \frac{3}{4}u_8(x)e^{-2(x-8)}.
\end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned}
y(x) &= (u_0(x) - u_2(x))(-2e^{-2x} + 2) + (u_1(x) - u_4(x)) \left( -\left( 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{25}{4} \right) \\
&\quad + (u_4(x) - u_5(x)) \left( -\left( \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (u_5(x) - u_6(x)) \left( -\left( -\frac{1}{2}e^{10} + \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} \right) \\
& + (u_6(x) - u_7(x)) \left( -\left( -\frac{3}{4}e^{12} - \frac{1}{2}e^{10} + \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{39}{4} \right) \\
& + (u_7(x) - u_8(x)) \left( -\left( \frac{3}{2}e^{14} - \frac{3}{4}e^{12} - \frac{1}{2}e^{10} + \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} - \frac{3}{2}x + \frac{51}{4} \right).
\end{aligned}$$



Obrázek 9.3: Průběh řešení z příkladu 9.21

Průběh řešení je znázorněn na obrázku 9.3. Z tohoto obrázku je zřejmé, že řešení je spojité, avšak derivace už není spojitá.

**Poznámka 9.22.** V technické praxi je třeba také často modelovat situace, kdy pravá strana obsahuje tzv. impulsy (impuls si představme např. jako úder kladivem, kdy na velmi malém časovém intervalu dojde k zatížení o určité velikosti). Tyto impulsy lze matematicky popsat pomocí zvláštní „funkce“ zvané Diracova funkce (též delta funkce) definované předpisem

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} - \{0\}, \end{cases}$$

a zároveň splňující

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Všimněme si, že slovo funkce je v uvozovkách, o funkci v klasickém smyslu (tj. o zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ ) se zřejmě nejedná. Požadavek, aby její integrál přes reálnou osu byl roven jedné není nepřirozený. Diracovu funkci si totiž můžeme představit jako „limitu“ posloupnosti

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x \in \langle 0, 1/n \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

přičemž pro každý prvek této posloupnosti platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = n \int_0^{1/n} dx = 1.$$

Pro Laplaceovu transformaci Diracovy funkce platí  $\mathcal{L}\{\delta\}(s) = 1$ . Tuto vlastnost lze opět zdůvodnit pomocí posloupnosti  $\delta_n$ , potřebná matematická argumentace jde však nad rámec tohoto učebního textu.

Diracova funkce  $\delta$  představuje impuls v bodě  $x = 0$ , impuls v bodě  $a \geq 0$  je modelován funkcí  $\delta_a(x) := \delta(x - a)$  (máme tedy  $\delta_0(x) = \delta(x)$ ) a podle výše uvedené vlastnosti (9.3) platí  $\mathcal{L}\{\delta_a\}(s) = e^{-sa}$ . Série impulsů v bodech  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < \infty$  o velikostech  $c_1, c_2, \dots, c_n$  potom bude popsána pravou stranou ve tvaru  $\sum_{i=1}^n c_i \delta_{a_i}(x)$ .

## 9.2 Metoda Taylorových řad

V této podsektci se seznámíme s řešením obyčejných diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad. Princip metody spočívá v tom, že řešení dané rovnice hledáme ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě, v jehož okolí je toto řešení definováno (obvykle se jedná o bod, v němž je předepsána počáteční podmínka, příp. počáteční podmínky). Ilustrujme tuto metodu na následujících příkladech.

**Příklad 9.23.** Pomocí mocninné řady určíme řešení počáteční úlohy

$$y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1. \quad (9.4)$$

*Řešení.* Počáteční podmínka je předepsána v bodě  $x_0 = 0$ , a proto hledáme řešení  $y$  úlohy (9.4) ve tvaru součtu mocninné řady

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots, \quad a_k = ? \quad (9.5)$$

K určení koeficientů  $a_k$  této řady je třeba podle vztahu

$$a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \quad (9.6)$$

(viz úvahy v sekci 3.2 vedoucí k definici 3.13) určit hodnotu funkce  $y$  a všech jejích derivací v bodě  $x_0 = 0$ . Podle počáteční podmínky platí  $y(0) = 1$ , a odtud dále podle (9.4)  $y'(x) = -2xy(x)$ , tj.  $y'(0) = 0$ .

Hodnoty  $y^{(k)}(0)$  pro  $k = 2, 3, \dots$  nyní určíme opakovanou derivací zadané rovnice a následným dosazením bodu  $x_0 = 0$ . Provedme tedy alespoň první tři výpočty:

$$\begin{aligned} y''(x) = -2y(x) - 2xy'(x) &\Rightarrow y''(0) = -2, \\ y'''(x) = -4y'(x) - 2xy''(x) &\Rightarrow y'''(0) = 0, \\ y^{(4)}(x) = -6y''(x) - 2xy'''(x) &\Rightarrow y^{(4)}(0) = 12. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Z provedených výpočtů tedy podle (9.6) dostáváme

$$a_0 = \frac{1}{0!} = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-2}{2!} = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{12}{4!} = \frac{1}{2}.$$

Úspěšnost této metody tedy zřejmě závisí na možnosti vyjádřit hodnotu  $y^{(k)}(0)$  pro libovolné přirozené  $k$ . Toto vyjádření je však proveditelné pouze ve speciálních případech, a proto se obvykle spokojíme s výpočtem  $y^{(k)}(0)$  (a tedy i koeficientů  $a_k$ ) pro konečný počet hodnot  $k$ . Dosazením takto určených koeficientů do (9.5) a následným zanedbáním všech zbývajících členů řady, jejichž koeficienty nebyly vypočteny, získáme (Taylorův) polynom představující přibližné řešení daného problému.

V našem případě tedy dostáváme přibližné vyjádření řešení  $y$  ve tvaru

$$y(x) \approx P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Otázkou odhadu chyby této náhrady se zde zabývat nebudeme. Intuitivně je však zřejmé, že tento odhad je ovlivněn jednak stupněm příslušného Taylorova polynomu a jednak hodnotou  $x$  (tedy vzdáleností daného bodu od středu mocninné řady (9.5), v němž je předepsána počáteční podmínka).

Vraťme se však v daném příkladu ještě jednou k výpočtu koeficientů  $a_k$  mocninné řady (9.5). Ukázali jsme, že k určení všech hodnot  $a_k$  je třeba stanovit  $y^{(k)}(0)$  pro libovolné přirozené  $k$ , což je v obecném případě prakticky neproveditelné. Počáteční úloha (9.4) je však velmi speciální a vyjádření libovolné derivace svého řešení umožňuje. Zobecněním výpočtů provedených v (9.7) snadno zjistíme, že

$$y^{(2k)}(0) = (-1)^k 2^k (2k - 1)!!, \quad y^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \text{pro všechna } k = 1, 2, \dots$$

Odtud dosazením do (9.6) dostáváme

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^k (2k - 1)!!}{(2k)!} = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad a_{2k+1} = 0 \quad \text{pro všechna } k = 1, 2, \dots$$

a řešení  $y$  počáteční úlohy (9.4) tedy lze podle (9.5) vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad (9.8)$$

Nyní je třeba ještě ověřit, že řada (9.8) vskutku konverguje k funkci představující řešení problému (9.4), a to včetně určení oboru konvergence. V případě řady (9.8) to však nebude nutné, neboť tato řada je identická s řadou (3.25) odvozenou v příkladu 3.22 jako rozvoj funkce  $e^{-x^2}$  na intervalu  $(-\infty, \infty)$ . O tom, že je tato funkce vskutku řešením počáteční úlohy (9.4) se snadno přesvědčíme jejím dosazením do (9.4), příp. vyřešením příslušné LODR1.

**Příklad 9.24.** Pomocí mocninné řady určíme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = 0. \quad (9.9)$$

*Řešení.* Rovnice (9.9) je lineární homogenní ODR2 s konstantními koeficienty, a tedy každé její řešení je definováno na  $(-\infty, \infty)$ . Obecné řešení (9.9) proto můžeme opět hledat ve tvaru mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ , tedy ve tvaru (9.5). Jelikož obecný tvar řešení každé ODR2 obsahuje dvě obecné konstanty, lze očekávat, že dvě konstanty ve vyjádření (9.5) zůstanou neurčeny.

V souladu s postupem popsaným v příkladu 9.23 vypočteme hodnoty  $y^{(k)}(0)$ . Protože v bodě  $x_0 = 0$  nejsou uvedeny počáteční podmínky předepisující hodnoty  $y(0)$  a  $y'(0)$ , nelze specifikovat  $a_0, a_1$ ; podle (9.6) pouze platí

$$a_0 = y(0), \quad a_1 = y'(0).$$

K určení hodnoty  $y''(0)$  využijeme rovnici (9.9). Odtud

$$y''(0) = -y(0) = -a_0.$$

Opakovanou derivací rovnice (9.9) a následným dosazením  $x = 0$  pak máme

$$y'''(0) = -y'(0) = -a_1, \quad y^{(4)}(0) = -y''(0) = a_0, \quad y^{(5)}(0) = -y'''(0) = a_1, \dots$$

Odtud podle (9.5) a (9.6) dostáváme obecné řešení  $y$  rovnice (9.9) ve tvaru nekonečné řady

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 - \dots$$

Lze ukázat, že uvedená řada konverguje absolutně pro každé  $x \in (-\infty, \infty)$ , a podle věty 1.28 ji tedy lze libovolně přerovnat. Platí proto (s přihlédnutím k větám 1.18 a 1.19) vyjádření

$$y(x) = a_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + a_1 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right).$$

Řady uvedené v předcházejícím vyjádření jsou ale rozvoje funkcí  $\cos x$ ,  $\sin x$  (viz větu 3.16). Platí tedy známý závěr, že obecné řešení rovnice (9.9) lze psát ve tvaru

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x,$$

kde  $a_0, a_1$  jsou libovolné reálné konstanty.

Předcházející dva příklady byly snadno řešitelné i přímými analytickými metodami, se kterými jsme se seznámili dříve. Na závěr této sekce proto zvolíme příklad rovnice, kterou exaktně řešit nelze.

**Příklad 9.25.** Uvažujme Airyho rovnici

$$y'' - xy = 0, \quad (9.10)$$

kteřá byla v předcházející sekci zmíněna jako příklad homogenní lineární ODR2 s nekonstantním koeficientem. K nalezení obecného řešení Airyho rovnice jsme potřebovali určit její dvě lineárně nezávislá řešení, která však určit neumíme. Pokusíme se proto na tuto rovnici aplikovat metodu Taylorových řad.

Poněvadž stejně jako v předcházejícím příkladu nemáme předepsány počáteční podmínky, tak opět podle (9.6) píšeme

$$a_0 = y(0), \quad a_1 = y'(0).$$

Hodnotu  $y''(0)$  vypočteme pomocí (9.10). Odtud  $y''(0) = 0$ . Nyní se pokusíme stanovit hodnotu  $y^{(k)}(0)$  pro obecné  $k$ . Opakovanou derivací (9.10) máme

$$y''' = y + xy', \quad y^{(4)} = 2y' + xy'', \quad y^{(5)} = 3y' + xy''', \quad \dots$$

Tedy

$$y^{(k)} = (k-2)y^{(k-3)} + xy^{(k-2)}, \quad \text{tj. } y^{(k)}(0) = (k-2)y^{(k-3)}(0), \quad k = 3, 4, \dots$$

Pro výpočet hodnoty  $y^{(k)}(0)$  pro obecné  $k$  jsme tedy sestavili rekurentní vztah, ke kterému přistupují výše uvedené startovací hodnoty

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1, \quad y''(0) = 0.$$

Odtud

$$y^{(3k)}(0) = (3k-2)!!!a_0, \quad y^{(3k+1)}(0) = (3k-1)!!!a_1, \quad y^{(3k+2)}(0) = 0, \quad k = 3, 4, \dots,$$

kde význam opakovaného faktoriálu nejjednodušeji vysvětlíme příkladem – 11 !!! := 11.8.5.2 (čtenář si může snadno ověřit, že pro jednotlivé hodnoty  $k = 3, 4, \dots$  skutečně tento předpis odpovídá výše odvozenému rekurentnímu vztahu doplněnému o zmíněné tři startovací hodnoty). Odtud můžeme již snadno pomocí (9.6) vypočítat koeficienty  $a_k$  příslušné Taylorovy řady. Tuto řadu pak můžeme (po malé úpravě) zachytit ve tvaru

$$y(x) = a_0 \left( 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4.1}{6!}x^6 + \frac{7.4.1}{9!}x^9 + \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{5.2}{7!}x^7 + \frac{8.5.2}{10!}x^{10} + \dots \right),$$

kde  $a_0, a_1$  jsou libovolné reálné konstanty (přepis této řady do sumačního zápisu je již pouze formální věc a nebudeme ho zde provádět). Zdůrazníme tedy, že se nám podařilo nalézt zápis obecného řešení Airyho rovnice ve tvaru Taylorovy řady (závislé na dvou obecných konstantách  $a_0, a_1$ ), ačkoliv analyticky tuto rovnici řešit neumíme. Je to tedy typický případ toho, kdy je funkce (v našem případě řešení Airyho rovnice) dána ve tvaru nekonečné mocninné řady, přičemž její explicitní vyjádření ve tvaru elementární funkce neznáme (v daném případě ani neexistuje).

## Příklady k procvičení

**Cvičení 9.26.** Ukažte, že platí vztah  $\mathcal{L}\{f(ax)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(x)\}\left(\frac{s}{a}\right)$ ,  $a > 0$ , tzv. *pravidlo zvětšení (podobnosti)*.

**Cvičení 9.27.** Metodou Laplaceovy transformace řešte následující počáteční úlohy:

- $y'' - 16y' + 64y = 6xe^{8x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;
- $y''' + 2y'' + y' = -2xe^{-2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ ;
- $y'' - 3y' + 2y = 2\delta_1(x) + \delta_2(x) + 3(u_3(x) - u_4(x))$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Výsledky.** a)  $y(x) = e^{8x} - 8xe^{8x} + x^3e^{8x}$ ; b)  $y(x) = -\frac{44}{27}e^{-x} - \frac{7}{9}e^{-x}x + \frac{7}{54}e^{2x} - \frac{1}{9}xe^{2x} + \frac{7}{2}$ ; c)  $y(x) = e^{2x} - e^x + 2u_1(x)(e^{2x-2} + e^{x-1}) + u_2(x)(e^{2x-4} - e^{x-2}) + \frac{3}{2}u_3(x)(1 - 2e^{-x-3} + e^{2x-6}) + \frac{3}{2}u_4(x)(-1 + 2e^{-x-4} - e^{2x-8})$ .

**Cvičení 9.28.** Metodou Laplaceovy transformace nalezněte obecné řešení následujících rovnic:

- $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$ ;
- $y''' + y'' = 1 - 6x^2e^{-x}$ ;
- $y'' + 4y' + 4 = e^{2x} + 4\delta_0(x) - \delta_1(x) + 2\delta_3(x) - u_1(x)$ .

**Výsledky.** a)  $y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + (1 - x - x^2)e^x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; b)  $y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - (2x^3 + 12x^2 + 36x + 48)e^{-x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; c)  $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{16}e^{2x} + u_0(x)4xe^{-2x} + \frac{1}{4}u_1(x)[(3 - 2x)e^{-2x+2} - 1] + 2u_3(x)(x - 3)e^{-2x+6}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

## 10 Některé aplikace ODR

Samotný název této sekce již naznačuje otázku, která nás zde bude zajímat: K čemu mohou být užitečné diferenciální rovnice? K tomu ihned poznamenejme, že nemůže být ambicí těchto skript takovou otázku hlouběji zodpovědět, protože rozsah aplikací diferenciálních rovnic je skutečně mimořádně bohatý. Příklady uvedené v této sekci proto formulují pouze několik základních ilustrativních problémů z různých vědních oblastí, a to ve formě jednoduchých slovních úloh. Matematická formalizace těchto úloh přitom vede na obvyčejné diferenciální rovnice, které jsme s našimi dosavadními poznatky schopni exaktně řešit.

### 10.1 Několik aplikací ODR1

V této podsekci uvedeme několik základních aplikací ODR1, se zaměřením na typy ODR1 probrané v sekci 6.

**Příklad 10.1 — volný pád.** Hmotný bod padá z výšky  $h_0 > 0$  s nulovou počáteční rychlostí. Najdeme jeho výšku  $h(t)$  nad zemí v čase  $t$ , předpokládáme-li, že odpor vzduchu je úměrný čtverci rychlosti.

**Řešení.** Zavedeme vertikální osu  $x$  orientovanou směrem dolů a necht'  $x(t)$  vyjadřuje závislost délky  $x$  proběhnuté dráhy na čase  $t$ . Po určení  $x(t)$  požadovanou výšku  $h(t)$  snadno stanovíme pomocí vztahu

$$h(t) = h_0 - x(t). \quad (10.1)$$

Přistoupíme tedy k určení  $x(t)$ . Na hmotný bod působí dvě síly: gravitační síla ( $= mg$ ) a odpor vzduchu ( $= kv^2 = k(\dot{x})^2$ , kde  $k > 0$  je koeficient úměrnosti). Obě síly mají vzájemně opačný smysl, a budou se tedy odečítat. Vzhledem k orientaci osy  $x$  je výsledná vnější síla působící na hmotný bod tvaru  $F = mg - k(\dot{x})^2$ . Podle druhého Newtonova zákona pak platí

$$m\ddot{x} = mg - k(\dot{x})^2.$$

Tato rovnice je ODR2 a přísluší jí dvě počáteční podmínky tvaru

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (10.2)$$

Protože však síla  $F$  (tedy pravá strana dané diferenciální rovnice) závisí pouze na rychlosti bodu  $\dot{x}$  a nikoliv na jeho poloze  $x$ , lze tuto ODR2 snadno převést substitucí  $v = \dot{x}$  (viz také podsekcce 7.1) na tvar

$$m\dot{v} = mg - kv^2$$

neboli

$$\dot{v} = g - \alpha^2 v^2 \quad (\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0), \quad (10.3)$$

což je ODR1 se separovanými proměnnými. Separací proměnných tedy dostáváme

$$\frac{dv}{g - \alpha^2 v^2} = dt.$$

Poznamenejme, že zřejmě  $\dot{v} > 0$ , a proto  $g - \alpha^2 v^2 > 0$  (opačný případ nemá fyzikální smysl). Rozložíme na parciální zlomky a integrujeme:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{dv}{\sqrt{g} - \alpha v} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{dv}{\sqrt{g} + \alpha v} = \int dt,$$

tedy

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{g}} \ln(\sqrt{g} - \alpha v) + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{g}} \ln(\sqrt{g} + \alpha v) = t + C.$$

Z důvodu snadnějších úprav určíme konstantu  $C$  již nyní, a to dosazením podmínky  $v(0) = \dot{x}(0) = 0$  (viz (8.2)) do tohoto implicitního tvaru. Dostáváme  $C = 0$ , a odtud úpravou

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + \alpha v}{\sqrt{g} - \alpha v} &= t, \\ \frac{\sqrt{g} + \alpha v}{\sqrt{g} - \alpha v} &= e^{2\alpha\sqrt{g}t}, \\ v &= \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \frac{e^{2\alpha\sqrt{g}t} - 1}{e^{2\alpha\sqrt{g}t} + 1}. \end{aligned}$$

Rozšířením čitatele i jmenovatele zlomku výrazem  $e^{-\alpha\sqrt{g}t}$  lze vyjádření pro rychlost  $v$  upravit na přehledný tvar

$$v(t) = \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \operatorname{tgh}(\alpha\sqrt{g}t).$$

Obdrželi jsme tedy vyjádření závislosti rychlosti hmotného bodu na čase  $t$ . Zpětným dosazením do vztahu  $\dot{x} = v$  dostáváme

$$x(t) = \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \int \operatorname{tgh}(\alpha\sqrt{g}t) dt = \frac{1}{\alpha^2} \ln \cosh(\alpha\sqrt{g}t) + C_1.$$

Dosazením podmínky  $x(0) = 0$  (viz (10.2)) máme  $C_1 = 0$ . Dosadíme-li dále za  $\alpha$  (viz (10.3)), platí

$$x(t) = \frac{m}{k} \ln \cosh \sqrt{\frac{kg}{m}} t.$$

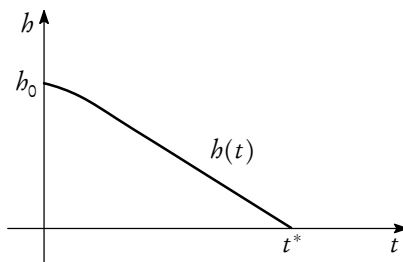
K úplnému rozřešení dané úlohy zbývá určit okamžik  $t^*$ , kdy hmotný bod dopadne na zemský povrch (a pohyb bodu tedy již nepokračuje). Hledáme tedy  $t^* > 0$  takové, aby  $x(t^*) = h_0$ . Z tohoto vztahu máme po úpravě

$$t^* = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argcosh} e^{h_0 k/m}. \quad (10.4)$$

Podle (10.1) je tedy výška  $h$  daného bodu na zemi dána vztahem

$$h(t) = h_0 - \frac{m}{k} \ln \cosh \sqrt{\frac{kg}{m}} t, \quad t \in \langle 0, t^* \rangle,$$

kde okamžik  $t^*$  je dán výrazem (10.4) (viz obrázek 10.1).



Obrázek 10.1: Výška hmotného nad zemí v závislosti na čase

**Příklad 10.2 — Newtonův zákon ochlazování.** Podle tohoto zákona je rychlost ochlazování daného tělesa na vzduchu přímo úměrná rozdílu teploty  $T$  tělesa a teploty  $T_v$  vzduchu. Řešme tuto úlohu: Je-li teplota vzduchu  $T_v = 20^\circ\text{C}$  a těleso se za 20 minut ochladilo z počáteční teploty  $T_0 = 100^\circ\text{C}$  na  $60^\circ\text{C}$ , za jak dlouho se ochladí na  $30^\circ\text{C}$ ?

*Řešení.* Označíme-li  $k > 0$  koeficient úměrnosti, pak teplota  $T(t)$  tělesa v čase  $t$  je řešením počáteční úlohy

$$\dot{T} = -k(T - T_v), \quad T(0) = T_0.$$

Chápeme-li  $T_v$  obecně jako funkci času  $t$ , je daná rovnice LODR1. Je-li však speciálně  $T_v$  konstantní (jako v našem případě), je to také rovnice se separovanými proměnnými. V takovém případě bývá obvykle výhodnější řešit rovnici metodou separace proměnných (viz příklady v oddíle A a C sekce 6).

Řešíme tedy počáteční problém

$$\dot{T} = -k(T - 20), \quad T(0) = 100,$$

kde konstanta  $k > 0$  zůstává prozatím nespécifikována. Za předpokladu  $T \neq 20$  (který je v našem případě zřejmě splněn) napíšeme rovnici v diferenciálním tvaru

$$\frac{dT}{T - 20} = -k dt.$$

Odtud integrací a obvyklými úpravami

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T - 20} &= -k \int dt, \\ \ln |T - 20| &= -kt + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ T &= Ce^{-kt} + 20, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

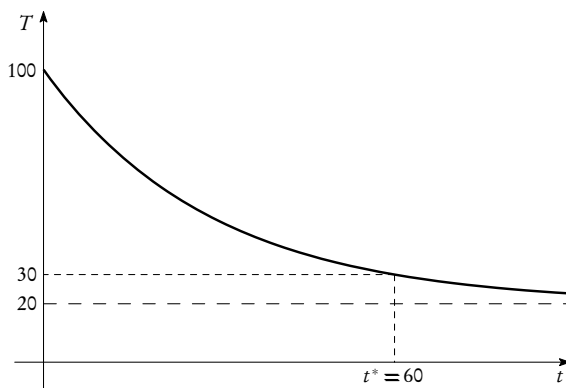
Poznamenejme současně, že v řešené úloze má fyzikální smysl pouze volba  $C > 0$ . Obecné řešení tedy obsahuje dvě nespécifikované konstanty  $C, k$ . K jejich určení máme k dispozici kromě počáteční podmínky  $T(0) = 100$  také vztah  $T(20) = 60$ . Dosazením těchto podmínek do obecného řešení obdržíme

$$C = 80, \quad k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Závislost teploty  $T$  na čase  $t$  je tedy vyjádřena vztahem

$$T(t) = 80e^{(-t \ln 2)/20} + 20 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} + 20, \quad (10.5)$$

který je znázorněn na obrázku 10.2.



Obrázek 10.2: Ochlazení tělesa na vzduchu v závislosti na čase

Hledaný časový okamžik  $t^*$ , v němž se teplota tělesa ochladí na  $30^\circ\text{C}$ , je řešením rovnice  $T(t^*) = 30$ . Odtud podle (10.5) snadno určíme  $t^* = 60$ . Vzhledem ke zvoleným jednotkám proto dostáváme, že požadované ochlazení nastane za jednu hodinu.

**Příklad 10.3 — logistická rovnice.** Je tvaru

$$\dot{y} = ky - ay^2, \quad (10.6)$$

kde  $k, a > 0$  jsou reálné konstanty. Tato rovnice popisující populační růst je ODR1 se separovanými proměnnými, ale také Bernoulliovou rovnicí (kde  $r = 2$ ). Za předpokladu  $y \neq 0$  proto zavedeme substituci  $u = 1/y$ , tj.  $\dot{u} = -\dot{y}/y^2$ . Při dosazování substitute do rovnice zvolíme postup popsáný v oddíle D podsekcce 6.2.

Dělíme rovnici (10.6) výrazem  $y^2$  a dostáváme

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = k \frac{1}{y} - a,$$

tedy

$$\dot{u} = -ku + a. \quad (10.7)$$

Lineární rovnici (10.7) vyřešíme opět ve dvou krocích:

a) Separací proměnných v příslušné homogenní rovnici

$$\dot{u} = -ku$$

dostáváme za předpokladu  $u \neq 0$

$$\frac{du}{u} = -k dt.$$

Odtud po integraci máme

$$\ln|u| = -kt + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Užitím obvyklých úprav pak dostáváme obecné řešení dané homogenní rovnice ve tvaru

$$u_h(t) = Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Necht'  $u(t) = C(t)e^{-kt}$ ,  $C(t) = ?$  Dosadíme do (10.7):

$$\dot{C}(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt} = -kC(t)e^{-kt} + a, \quad \text{tj.} \quad \dot{C}(t) = ae^{kt}.$$

Odtud integrací  $C(t) = \frac{a}{k}e^{kt} + C$ , tj.

$$u(t) = \frac{a}{k} + Ce^{-kt}.$$

Každé nenulové řešení logistické rovnice tedy lze psát ve tvaru

$$y(t) = \frac{1}{a/k + Ce^{-kt}} = \frac{k}{a + Cke^{-kt}}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (10.8)$$

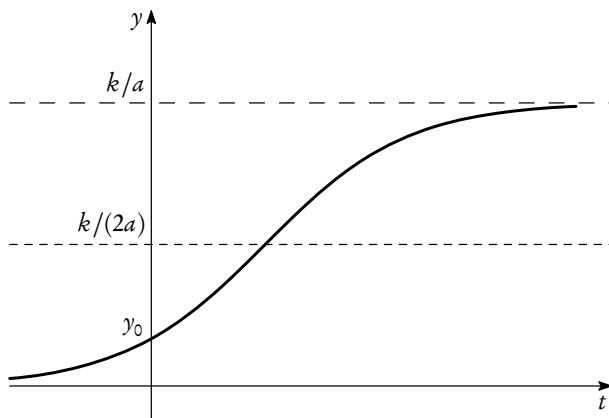
Uvažujeme-li navíc počáteční podmínku

$$y(0) = y_0 \in (0, k/a), \quad (10.9)$$

pak lze specifikovat  $C = (k - ay_0)/(ky_0)$ . Dosazením této hodnoty do (10.8) a následnou úpravou lze řešení počáteční úlohy (10.6), (10.9) zapsat v přehlednější formě

$$y(t) = \frac{k}{2a} + \frac{k}{2a} \operatorname{tgh} \frac{k}{2}(t - \tau), \quad \tau = \frac{1}{k} \ln \frac{k - ay_0}{ay_0}.$$

Na obrázku 10.3 je znázorněna tato tzv. *demografická (logistická) křivka* popisující zákon vzrůstu a mající tvar hyperbolické tangenty. Křivka je souměrná podle inflexního bodu a probíhá v pásu mezi asymptotami  $y = 0$ ,  $y = k/a$ . Tento problém budeme ještě z jiného pohledu diskutovat v příkladu 13.3.



Obrázek 10.3: Demografická křivka

**Příklad 10.4 — ortogonální trajektorie.** Uvažujme jednoparametrickou soustavu křivek v rovině tvaru

$$F(x, y, C) = 0, \quad (10.10)$$

kde  $C$  je parametr. *Ortogonalní trajektorii* soustavy (10.10) nazveme každou křivku, která všechny křivky soustavy (10.10), které protíná, protíná pod pravým úhlem.

Určeme ortogonální trajektorie soustavy křivek

$$y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (10.11)$$

*Řešení.* Soustavu (10.11) tvoří paraboly a osa  $x$ . Bodem  $(x_0, y_0)$ , kde  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$  prochází parabola  $y = (y_0/(x_0)^2)x^2$ . Tečna k této parabole sestrojena v bodě  $(x_0, y_0)$  má směrnici  $2y_0/x_0$ . Křivka  $y = \varphi(x)$  procházející bodem  $(x_0, y_0)$  (tj.  $y_0 = \varphi(x_0)$ ) protíná v tomto bodě uvažovanou parabolu pod pravým úhlem právě tehdy, když platí

$$\frac{2y_0}{x_0} \varphi'(x_0) = -1, \quad \text{tj.} \quad \frac{2\varphi(x_0)\varphi'(x_0)}{x_0} = -1.$$

Má-li tedy křivka  $y = \varphi(x)$  v každém svém bodě  $(x_0, y_0)$ , kde  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$ , protínat parabolu soustavy (10.11), která tímto bodem prochází, pod pravým úhlem, musí být funkce  $\varphi$  řešením diferenciální rovnice

$$\frac{2yy'}{x} = -1, \quad \text{tedy} \quad y' = -\frac{x}{2y}.$$

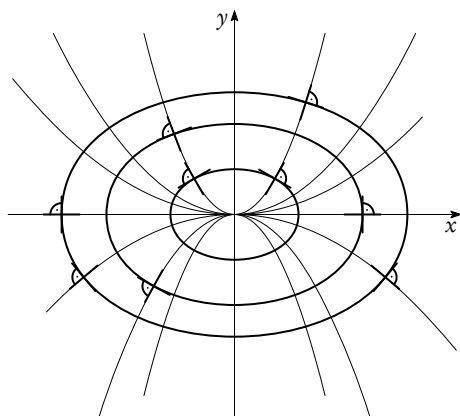
To je rovnice se separovanými proměnnými, ale lze ji řešit i substitucí  $u = y/x$ . Oběma způsoby se snadno přesvědčíme, že integrální křivky této rovnice jsou dány vztahem

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C^2, \quad \text{tj.} \quad \frac{x^2}{2C^2} + \frac{y^2}{C^2} = 1, \quad C \neq 0.$$

Soustavou ortogonálních trajektorií k dané soustavě (10.11) je tedy jednoparametrický systém elips, kde poměr velikosti hlavní a vedlejší poloosy činí  $\sqrt{2}$  (viz obrázek 10.4).

Výpočty jsme prováděli za předpokladu  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$ ; lze však snadno ověřit, že každá z uvažovaných elips protíná pod pravým úhlem také osu  $x$ . Ortogonální trajektorii soustavy (10.11) je také přímka  $x = 0$ , tj. osa  $y$ .

Podobnými úvahami (i když poněkud obecnějšími) lze ukázat, že při hledání ortogonálních trajektorií soustavy křivek (10.10) lze zvolit tento

Obrázek 10.4: Ortogonální trajektorie k soustavě parabol  $y = Cx^2$ **Praktický postup:**

Vztah (10.10) zderivujeme podle  $x$  (proměnnou  $y$  zde chápeme jako funkci proměnné  $x$ ) a z obou rovnic vyloučíme parametr  $C$ . Tím sestavíme ODR1 ve tvaru

$$y' = f(x, y),$$

jejímž obecným řešením je (10.10).

Soustava ortogonálních trajektorií soustavy (10.10) je pak dána obecným řešením diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

**10.2 Několik aplikací ODR2**

V této podsekci uvedeme několik úloh, jejichž matematická formalizace vede k sestavení počáteční úlohy pro ODR2.

**Příklad 10.5 — harmonický oscilátor.** S harmonickým oscilátorem (někdy hovoříme též o lineárním oscilátoru) jsem se setkali již v příkladech 5.8, 9.15 a poznámce 9.16. Protože se jedná o jeden z nejdůležitějších matematických modelů vůbec, rozeberme jej podrobně ještě jednou. Uvažujme hmotný bod o hmotnosti  $m$ , na který působí síla  $F_1$  úměrná výchylce  $y$  z rovnovážné polohy  $y = 0$  a působící proti směru výchylky (tj.  $F_1 = -ky$ ,  $k > 0$ ). Podle druhého Newtonova zákona je pohyb bodu popsán diferenciální rovnicí

$$m\ddot{y} = -ky,$$

neboli

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0. \quad (10.12)$$

V dynamice se konstanta  $k$  nazývá *tuhost pružiny* a pohyb popsáný rovnicí (10.12) *vlastní netlumené kmitání* (nebo také *harmonické kmitání*). Rovnice (10.12) je homogenní LODR2, přičemž její charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Odtud dostáváme kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Obecné řešení rovnice 10.12 je pak podle sekce 8 tvaru

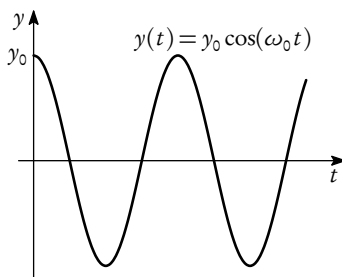
$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  (resp.  $A \geq 0, -\pi \leq \varphi < \pi$ ) jsou konstanty dané počátečními podmínkami pohybu. Poznamenejme, že obě vyjádření obecného řešení jsou ekvivalentní, a to na základě vztahů

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi.$$

Harmonický pohyb bývá obvykle popisován pomocí vztahu obsahujícího konstanty  $A, \varphi$ , přičemž  $A$  je amplituda,  $\varphi$  fázový posun a  $\omega_0$  úhlová frekvence (též kruhová frekvence). Veličina  $T = 2\pi/\omega_0$  pak udává dobu jedné periody pohybu.

Je-li nyní bod na počátku pohybu v poloze  $y_0$  a má nulovou počáteční rychlost, pak realizujeme počáteční podmínky  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0$ . Odpovídající partikulární řešení má tvar  $y = y_0 \cos(\omega_0 t)$  (viz obrázek 10.5).



Obrázek 10.5: Harmonický pohyb (výchylka oscilátoru v závislosti na čase)

Je-li pohyb hmotného bodu brzděn další silou  $F_2$ , která je úměrná rychlosti bodu (tj.  $F_2 = -l\dot{y}$ ,  $l > 0$ ), pak diferenciální rovnice pohybu je

$$m\ddot{y} = -ky - l\dot{y},$$

tj.

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad b = \frac{l}{2m}. \quad (10.13)$$

Pohyb popsany rovnicí (10.13) se nazývá *vlastní tlumené kmitání*. Řešení zřejmě závisí na kořenech charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (10.14)$$

které určíme jako  $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ . Podle výsledků sekce 8 tedy dostáváme tři kvalitativně odlišné případy:

a) Je-li  $b > \omega_0$ , pak rovnice (10.14) má dva různé reálné kořeny  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , a obecné řešení rovnice (10.13) je proto tvaru

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{tzv. nadkritický útlum}).$$

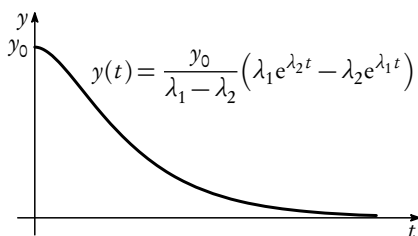
Volíme-li počáteční podmínky  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0$ , pak dostáváme partikulární řešení

$$y(t) = \frac{y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}),$$

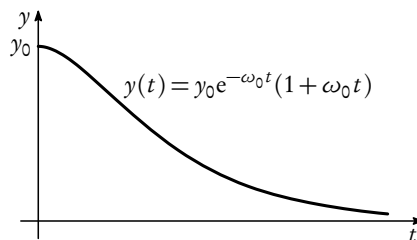
znázorněné na obrázku 10.6.

b) Je-li  $b = \omega_0$ , pak obecné řešení rovnice (10.13) je tvaru

$$y(t) = e^{-\omega_0 t} (C_1 t + C_2) \quad (\text{tzv. kritický útlum}).$$



Obrázek 10.6: Nadkritický útlum oscilátoru



Obrázek 10.7: Kritický útlum oscilátoru

Při počátečních podmínkách  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  dostáváme řešení

$$y(t) = y_0 e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t),$$

znázorněné na obrázku 10.7.

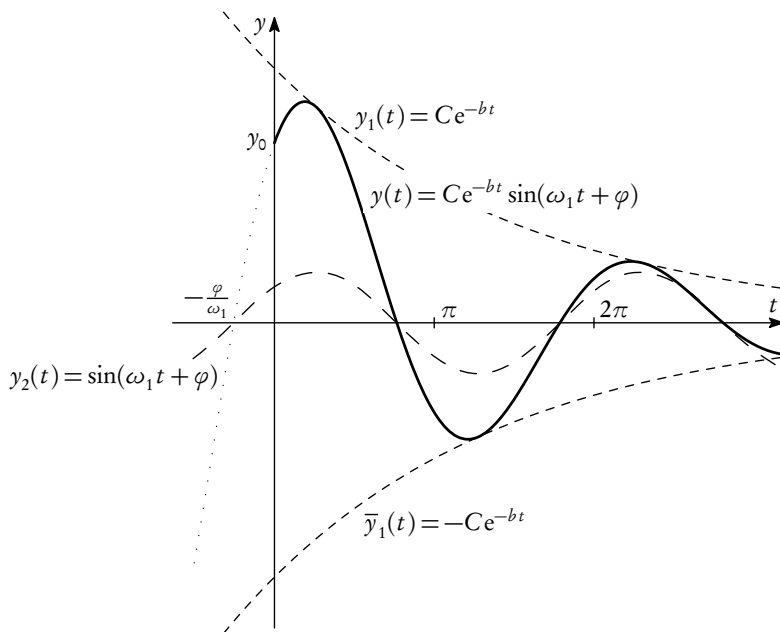
c) Je-li  $b < \omega_0$  a označíme-li  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ , je obecné řešení rovnice (10.13) tvaru

$$y(t) = e^{-bt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) = C e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (\text{tzv. } \textit{oscilatorický útlum}).$$

Doba kmitu  $T = 2\pi/\omega_1$  je přitom nyní větší než u netlumeného kmitání. Volíme-li opět  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , pak dosazením těchto podmínek do obecného řešení lze konstanty  $C$ ,  $\varphi$  specifikovat pomocí vztahů

$$C \cos \varphi = \frac{y_0 b}{\omega_1}, \quad C \sin \varphi = y_0.$$

Uvedené vyjádření pro  $y$  je tedy rovnicí tlumeného harmonického pohybu, kde amplituda  $C e^{-bt}$  je funkcí času a s rostoucím časem klesá (viz obrázek 10.8).



Obrázek 10.8: Oscilatorický útlum oscilátoru

Působí-li nyní na pohyb hmotného bodu periodicky se měnící síla  $F_3(t) = P \sin \omega t$ , pak tento pohyb nazýváme *vytlučeným kmitáním*. Pro *netlučené vytloučené kmitání* tedy dostáváme diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin \omega t. \quad (10.15)$$

Řešení této nehomogenní LODR2 lze nalézt snadno metodou neurčitých koeficientů. Příslušná homogenní LODR2 je rovnice (10.12), a odtud podle předcházející části

$$y_h(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Nyní navrhneme tvar pro  $y_p$ . Postupovat přitom budeme podle poznámky 8.8. Odtud snadno dostáváme, že pro  $\omega \neq \omega_0$  předpokládáme

$$y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B = ?$$

Po dosazení derivací

$$\dot{y}_p(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \quad \ddot{y}_p(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

do (10.15) dostáváme

$$A(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \omega t + B(-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega t = \frac{P}{m} \sin \omega t.$$

Porovnání koeficientů:

$$\begin{aligned} \cos \omega t : \quad A(-\omega^2 + \omega_0^2) = 0 & \Rightarrow A = 0, \\ \sin \omega t : \quad B(-\omega^2 + \omega_0^2) = \frac{P}{m} & \Rightarrow B = \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

Odtud pro  $\omega \neq \omega_0$  dostáváme obecné řešení rovnice (10.15) ve tvaru

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + B \sin \omega t, \quad (10.16)$$

kde konstanty  $C$ ,  $\varphi$  jsou dány počátečními podmínkami a

$$B = \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (10.17)$$

Pro  $\omega = \omega_0$  (případ tzv. *rezonance*) je třeba výše navržený tvar pro  $y_h$  násobit proměnnou  $t$ , a proto předpokládáme

$$y_p(t) = Dt \cos \omega_0 t + Et \sin \omega_0 t, \quad D, E = ?$$

Odtud

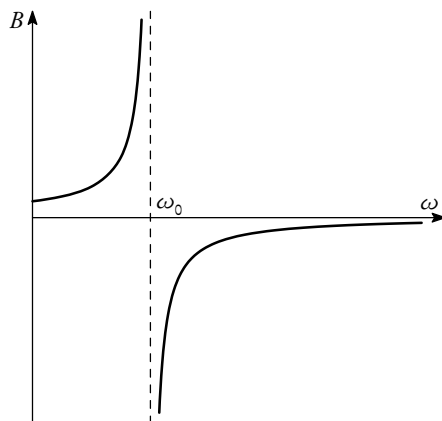
$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) &= (D + E\omega_0 t) \cos \omega_0 t + (-D\omega_0 t + E) \sin \omega_0 t, \\ \ddot{y}_p(t) &= (-D\omega_0^2 t + 2E\omega_0) \cos \omega_0 t + (-2D\omega_0 - E\omega_0^2 t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

a po dosazení do (10.15)

$$(-D\omega_0^2 t + 2E\omega_0) \cos \omega_0 t + (-2D\omega_0 - E\omega_0^2 t) \sin \omega_0 t + \omega_0^2 [Dt \cos \omega_0 t + Et \sin \omega_0 t] = \frac{P}{m} \sin \omega_0 t.$$

Odtud úpravou a porovnáním koeficientů dostáváme  $E = 0$ ,  $D = -P/(2m\omega_0)$ . Pro  $\omega = \omega_0$  je tedy obecné řešení rovnice (10.15) tvaru

$$y(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{P}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t.$$



Obrázek 10.9: Rezonanční křivka

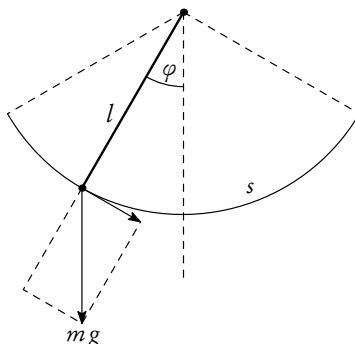
Všimněme si, že toto řešení (popisující případ  $\omega = \omega_0$ ) je neohraničenou funkcí, a to na rozdíl od vztahu (10.16) (popisujícího případ  $\omega \neq \omega_0$ ). Závislost  $B$  na  $\omega$  je podle vztahu (10.17) znázorněna na obrázku 10.9 jako tzv. *rezonanční křivka*.

Snadno se přesvědčíme, že diferenciální rovnice pro *vynucené tlumené kmitání* je tvaru

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin \omega t.$$

Analýzu řešení této rovnice lze promyslet analogicky, jak jsme učinili v předcházejících případech.

**Příklad 10.6 — matematické kyvadlo.** Mějme kuličku o hmotnosti  $m$  zavěšenou na nehmotném a neroztažitelném vlákně délky  $l$ . Sestavíme diferenciální rovnici popisující pohyb kuličky, přičemž tento pohyb vyjadřujeme jako funkci okamžité úhlové výchylky  $\varphi$  v závislosti na čase  $t$ , tj.  $\varphi = \varphi(t)$ .



Obrázek 10.10: Matematické kyvadlo

Gravitační sílu rozložíme do směru tečny a normály. Její složka ve směru normály pohyb nevyvolá, protože vlákno je neroztažitelné. Složka gravitační síly ve směru tečny je  $-mg \sin \varphi$  (působí proti směru výchylky). Dále předpokládáme, že odpor prostředí je zanedbatelný. Podle obrázku 10.10 je  $s = l\varphi$ , tedy  $\dot{s} = l\dot{\varphi}$ , a odtud podle druhého Newtonova zákona platí

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi,$$

neboli

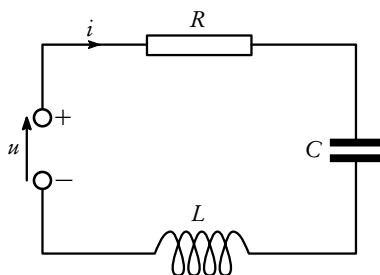
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Tato rovnice je nelineární ODR2, jejíž řešení nelze analyticky popsat pomocí elementárních funkcí. Uvažujeme-li však pouze malé výchylky  $\varphi$  od vertikální osy, lze provést tzv. linearizaci a tuto nelineární rovnici nahradit na základě vztahu  $(\sin \varphi)/\varphi \rightarrow 1$  pro  $\varphi \rightarrow 0$  lineární ODR2 tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

což je rovnice stejného typu jako (10.12).

**Příklad 10.7 — R–L–C elektrický obvod.** Najděme funkci  $i = i(t)$  popisující závislost intenzity elektrického proudu protékajícího elektrickým obvodem (viz obrázek 10.11), který se skládá z ohmického odporu  $R$ , kondenzátoru s kapacitou  $C$  a cívky s indukčností  $L$  v sériovém zapojení, je-li tento obvod připojen na zdroj střídavého napětí  $u = U \sin \omega t$  ( $U$  je amplituda a  $\omega$  úhlová frekvence).



Obrázek 10.11: R–L–C elektrický obvod

Příslušnou diferenciální rovnici lze odvodit takto: Napětí na odporu  $R$  je podle Ohmova zákona rovno  $Ri$ , napětí na kondenzátoru  $q/C$ , kde  $q$  je náboj na kondenzátoru. Podle Faradayova indukčního zákona se v cívce indukuje napětí

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt},$$

takže podle druhého Kirchhoffova zákona

$$Ri + \frac{1}{C}q = -L \frac{di}{dt} + U \sin \omega t.$$

Pro proud procházející kondenzátorem platí  $i = dq/dt$ , takže derivováním poslední rovnice dostaneme

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = -L \frac{d^2 i}{dt^2} + U \omega \cos \omega t,$$

neboli

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = U \omega \cos \omega t,$$

což je nehomogenní LODR2 pro hledanou funkci  $i = i(t)$ . Tuto rovnici lze opět snadno řešit metodou neurčitých koeficientů.

### Příklady k procvičení

**Cvičení 10.8.** Na klidné vodě se pohybuje motorový člun rychlostí  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ . Po vypnutí motoru začne rychlost člunu klesat, až po 40 sekundách dosáhne hodnoty  $v_1 = 2 \text{ ms}^{-1}$ . Voda klade pohybujícímu se člunu odpor, který je přímo úměrný jeho okamžité rychlosti. Určete rychlost  $v_2$  člunu 2 minuty po vypnutí motoru.

*Výsledky.*  $v_2 = 0,08 \text{ ms}^{-1}$ .

**Cvičení 10.9.** Závislost mezi rychlostí  $v$  střely a uraženou dráhou  $l$  v hlavní děla je v balistice dána vztahem  $v = \frac{al^n}{b+ln}$ , kde  $v = \frac{dl}{dt}$  a  $n < 1$ . Nalezněte závislost mezi časem  $t$  a uraženou dráhou  $l$  v hlavní.

*Výsledky.*  $t = \frac{1}{a} \left( l + \frac{bl^{1-n}}{1-n} \right)$ .

**Cvičení 10.10.** Nalezněte funkci  $i : t \rightarrow i(t)$  popisující závislost intenzity elektrického proudu v sériovém obvodu  $R$ - $L$  s konstantním napětím  $u$  na čase  $t$  (viz příklad 5.5a), měříme-li čas od okamžiku, kdy byl k obvodu připojen zdroj napětí.

*Výsledky.*  $i(t) = \frac{u}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$ ,  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ .

**Cvičení 10.11.** Střela vnikla do dřevěné desky rychlostí  $v_0 = 200 \text{ ms}^{-1}$  a vylétla z ní rychlostí  $v_1 = 80 \text{ ms}^{-1}$ . Deska, jejíž tloušťka je  $h = 0,1 \text{ m}$ , klade pronikající střele odpor, který je přímo úměrný druhé mocnině rychlosti střely. Určete čas  $t_1$ , za který střela proletí deskou.

*Výsledky.*  $t_1 = 0,00082 \text{ s}$ .

**Cvičení 10.12.** Průhyb  $y$  převodového řemene ve stavu klidu je dán rovnicí

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = p \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2},$$

kde  $H$ ,  $p$  jsou dané konstanty. Nalezněte vyjádření pro průhyb řemene.

*Výsledky.*  $y(x) = \cosh C_1 e^{px/H} + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 10.13.** Rychlost rozpadu radia je přímo úměrná množství dosud nerozpadlého radia. Určete funkci  $R : t \rightarrow R(t)$ , která popisuje závislost množství nerozpadlého radia na čase  $t$ . Kolik procent původního množství  $R_0$  radia se rozpadne za 200 let, jestliže radium má poločas rozpadu 1590 let? (Poločas rozpadu radioaktivní látky je doba, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky.)

*Výsledky.*  $R(t) = R_0 e^{-k_0 t}$ ,  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ , kde  $k_0 = (\ln 2)/1590$ ; 8,5 %.

**Cvičení 10.14.** Kapka vody s počáteční hmotností  $M$  gramů padá ve vzduchu, rozprašuje se a ztrácí každou sekundu  $m$  gramů své hmotnosti. Odpor prostředí je přitom úměrný rychlosti pohybující se kapky (koeficient úměrnosti je  $k > 0$ ,  $k \neq m$ ). Určete závislost rychlosti pohybu kapky na čase  $t$ , jestliže na počátku pohybu byla rychlost kapky nulová.

*Výsledky.*  $v(t) = \frac{g}{m-k} \left\{ M \left( 1 - \frac{m}{M} t \right)^{k/m} + m t - M \right\}$ ,  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ .

**Cvičení 10.15.** Nalezněte křivky s vlastností, že podíl vzdáleností počátku souřadnic od tečny a od normály je v libovolném bodě roven dané konstantě  $k$ .

*Výsledky.*  $C e^{k \arctg y/x} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ .

**Cvičení 10.16.** Určete ortogonální trajektorie těchto soustav křivek:

a)  $xy = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ;    b)  $x^2 + y^2 = C y$ ,  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Výsledky.* a)  $y^2 - x^2 = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ;    b)  $x^2 + y^2 = C x$ ,  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Cvičení 10.17.** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po přímce z bodu  $A$  do bodu  $B$  působením konstantní síly  $F$ . Odpor prostředí je úměrný vzdálenosti pohybujícího se bodu od bodu  $B$  a na začátku pohybu (v bodě  $A$ ) je roven  $f$  ( $f < F$ ). Počáteční rychlost hmotného bodu je nulová. Za jakou dobu dorazí hmotný bod do bodu  $B$ , je-li vzdálenost  $A$  a  $B$  rovna  $l$ ?

$$\text{Výsledky. } T = \sqrt{\frac{lm}{f}} \ln \frac{F + \sqrt{f(2F-f)}}{F-f}.$$

**Cvičení 10.18.** Je-li osa hřídele turbíny ve vodorovné poloze a neleží-li těžiště disku upevněného na hřídel na ose hřídele, pak průhyb  $y$  osy hřídele při jeho rotaci je dán diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left( \frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) y = g \cos \omega t + \omega^2 e,$$

kde  $m$  je hmotnost disku,  $\alpha$  je konstanta závislá na způsobu upevnění konců osy hřídele,  $\omega$  je úhlová rychlost rotace a  $e$  je výstřednost těžiště disku. Určete obecné řešení této diferenciální rovnice (pro  $1/(m\alpha) \neq \omega^2$ ).

**Výsledky.** Je-li  $\frac{1}{m\alpha} > \omega^2$ , pak  $y(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{g}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{e\omega^2}{k^2}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , kde  $k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega^2$ . Je-li  $\frac{1}{m\alpha} < \omega^2$ , pak  $y(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k^2 + \omega^2} \cos \omega t - \frac{e\omega^2}{k^2}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , kde  $k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}$ .

**Cvičení 10.19.** Řetěz o délce 6 m klouže se stolu, přičemž na počátku pohybu visel se stolu 1 m řetězu. Předpokládejme, že síla, která na pohyb řetězu působí, je úměrná délce visícího řetězu (tření přitom zanedbáváme). Za jakou dobu sklouzne se stolu celý řetěz?

$$\text{Výsledky. } T = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6 + \sqrt{35}).$$

## 11 Základy teorie soustav ODR

V inženýrské praxi se se soustavami obvyčejných diferenciálních rovnic (SODR) setkáváme především v úlohách souvisejících s mechanikou. Příkladem může být úloha popsat dráhu hmotného bodu pohybujícího se v prostoru vlivem působení dané síly, přičemž je známa počáteční poloha a počáteční rychlost tohoto bodu (viz příklad 11.4). V dalším textu uvidíme, že bez újmy na obecnosti se stačí zabývat pouze soustavami diferenciálních rovnic prvního řádu (SODR1). Tyto soustavy zobecňují pojem jedné (skalární) diferenciální rovnice prvního řádu, a to v odlišném smyslu, než tak činily diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu. Proto je přirozené se zabývat těmito otázkami: Existuje nějaká souvislost mezi SODR1 a ODR $n$ ? Pokud ano, jak se promítá do základních otázek týkajících se základů teorie soustav nelineárních a lineárních ODR1?

### 11.1 Druhy řešení soustav ODR1 a jejich geometrický význam

Většina základních pojmů souvisejících se soustavami diferenciálních rovnic prvního řádu je přímým zobecněním pojmů ze sekce 5.

**Definice 11.1.** a) Soustavu  $n$  diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{11.1}$$

kde funkce  $f_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) jsou definovány na  $(n+1)$ -rozměrné oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , nazýváme *normální soustavou obvyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (SODR1)*.

b) *Řešením* normální soustavy (11.1) nazýváme každou  $n$ -tici funkcí tvaru

$$y_1 = u_1(x), y_2 = u_2(x), \dots, y_n = u_n(x), \tag{11.2}$$

kteří jsou spojitě derivovatelné v nějakém intervalu  $I$  a po dosazení vyhovují dané soustavě (11.1) pro všechna  $x \in I$ .

c) Úlohu určit řešení soustavy (11.1), které vyhovuje  $n$  počátečním podmínkám

$$y_1(x_0) = \xi_1, y_2(x_0) = \xi_2, \dots, y_n(x_0) = \xi_n, \quad (11.3)$$

kde  $(x_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega$  je libovolný, ale pevně daný bod, nazýváme *počáteční úlohou*.

**Poznámka 11.2 – Druhy řešení SODR1 a jejich geometrická interpretace.** Pojmy obecné, partikulární a výjimečné řešení zavádíme v podobném smyslu jako v případě skalární ODR. Zatímco počet obecných konstant vystupujících v obecném řešení skalární ODR závisel na jejím řádu, v případě SODR1 je toto číslo dáno počtem rovnic v soustavě.

Nyní ukážeme, že geometricky lze řešení SODR1 interpretovat dvojím způsobem. Jednak jako množinu všech bodů  $(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , kde  $x \in I$ . Taková množina se nazývá *integrální křivka* soustavy (11.1). Tento pojem je tedy přímým rozšířením pojmu integrální křivka, který byl zaveden jako graf řešení skalární ODR. Uvedené řešení však lze také chápat jako množinu všech bodů  $(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ , kde  $x \in I$ , tedy jako křivku v  $\mathbb{R}^n$  danou parametrickými rovnicemi

$$y_1 = u_1(x), y_2 = u_2(x), \dots, y_n = u_n(x), \quad x \in I.$$

Tato křivka se nazývá (*fázová*) *trajektorie* rovnice (11.1) a množina  $\mathbb{R}^n$ , v níž jsou hodnoty (stavy) řešení zobrazeny, se nazývá *fázový (stavový) prostor*. Souvislost mezi těmito pojmy je následující: fázová trajektorie je průmětem integrální křivky do fázového prostoru.

**Příklad 11.3.** Ilustrujme výše uvedené pojmy na příkladu soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2, \\ y_2' &= y_1. \end{aligned}$$

V příkladu 12.8 uvidíme, že obecným řešením této soustavy je dvojice funkcí

$$y_1(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x, \quad y_2(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

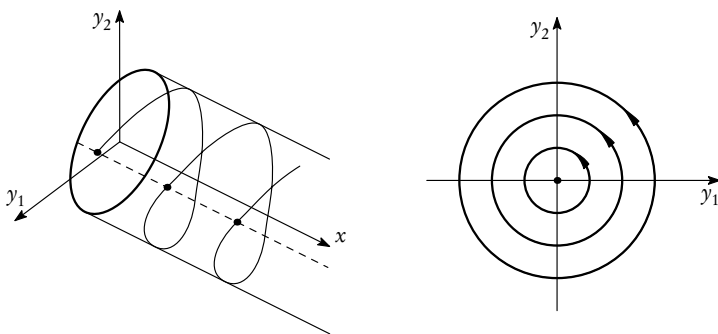
neboli

$$y_1(x) = A \cos(x + \varphi), \quad y_2(x) = A \sin(x + \varphi), \quad C \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi < \pi,$$

kde ekvivalentnost obou vyjádření je dána vztahy  $C_1 = A \cos \varphi$  a  $C_2 = A \sin \varphi$ . Z posledního vyjádření okamžitě plyne, že pro složky řešení platí

$$y_1^2 + y_2^2 = C^2.$$

Na základě tohoto vztahu pak snadno znázorníme integrální křivky (obrázek 11.1 vlevo), resp. fázové trajektorie (obrázek 11.1 vpravo) dané soustavy.



Obrázek 11.1: Integrální křivka (vlevo) a několik trajektorií (vpravo) soustavy  $y_1' = -y_2, y_2' = y_1$

Fázovým prostorem je zde prostor  $\mathbb{R}^2$ . Šipky na fázových trajektoriích přitom vyznačují směr toku času.

## 11.2 Vztah soustav ODR1 a ODRn

Již jsme konstatovali, že v dalším textu se budeme zabývat pouze soustavami diferenciálních rovnic prvního řádu, a to ve tvaru (11.1), neboť všechny soustavy ODR, které se ve fyzikální a technické praxi vyskytují, se dají na tvar (11.1) převést, jak ilustruje následující příklad.

**Příklad 11.4.** Celá mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa (včetně příbuzných oborů) v prostoru je vybudována na druhém Newtonově zákoně, který má obecně tvar soustavy tří nelineárních ODR druhého řádu:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= X(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \\ \ddot{y}(t) &= Y(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \\ \ddot{z}(t) &= Z(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),\end{aligned}\tag{11.4}$$

kde tečkou značíme derivaci podle času  $t$  a kde

$$X(t, s_1, s_2, \dots, s_6), Y(t, s_1, s_2, \dots, s_6), Z(t, s_1, s_2, \dots, s_6)$$

jsou dané funkce. Počáteční podmínky jsou tvaru

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0,\tag{11.5}$$

$$\dot{x}(t_0) = u_0, \dot{y}(t_0) = v_0, \dot{z}(t_0) = w_0,\tag{11.6}$$

kde  $t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$  jsou daná čísla.

Úlohu (11.4)–(11.6) převedeme na úlohu (11.1), (11.3) takto: Položíme

$$u(t) := \dot{x}(t), v(t) := \dot{y}(t), w(t) := \dot{z}(t).\tag{11.7}$$

Potom rovnice (11.4) lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= X(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ \dot{v}(t) &= Y(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ \dot{w}(t) &= Z(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)).\end{aligned}\tag{11.8}$$

K těmto třem rovnicím připojíme vztahy (11.7), které napíšeme formálně trochu jinak:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t), \\ \dot{y}(t) &= v(t), \\ \dot{z}(t) &= w(t).\end{aligned}\tag{11.9}$$

Počáteční podmínky (11.5), (11.6) lze nyní psát takto:

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \\ u(t_0) &= u_0, v(t_0) = v_0, w(t_0) = w_0.\end{aligned}\tag{11.10}$$

Rovnice (11.8), (11.9) tvoří SODR typu (11.1) (tedy SODR1) pro šest neznámých funkcí  $u, v, w, x, y, z$ .

**Poznámka 11.5.** Počáteční úlohy (11.4)–(11.6) a (11.8)–(11.10) jsou ekvivalentní. V příkladu 11.4 jsme dokázali implikaci (11.4)–(11.6)  $\Rightarrow$  (11.8)–(11.10). Důkaz opačné implikace (11.8)–(11.10)  $\Rightarrow$  (11.4)–(11.6) je také snadný: do pravých stran (11.8) dosadíme z rovnic (11.9) a derivace  $\dot{u}(t), \dot{v}(t), \dot{w}(t)$  na levých stranách (11.8) vyjádříme pomocí (11.9), tj.

$$\dot{u}(t) = \ddot{x}(t), \dot{v}(t) = \ddot{y}(t), \dot{w}(t) = \ddot{z}(t).$$

Tím získáme soustavu (11.4). Počáteční podmínky (11.5) jsou první tři podmínky (11.10); podmínky (11.6) dostaneme, když levé strany posledních tří podmínek (11.10) vyjádříme pomocí (11.9).

**Příklad 11.6.** Počáteční úlohu

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1 \quad (11.11)$$

převědeme na počáteční úlohu pro SODR1. Položíme

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad y_3 := y'', \quad y_4 := y''''.$$

Pak lze úlohu (11.11) přepsat na tvar

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= y_4, \\ y_4' &= 2y_3 - y_1, \end{aligned} \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0, y_4(0) = -1. \quad (11.12)$$

Nyní je snadné si rozmyslet, jak spolu souvisí řešení úlohy (11.11) a úlohy (11.12).

**Poznámky 11.7.** a) Díky právě uvedenému postupu lze konstatovat, že každou diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu je možné převést na soustavu  $n$  diferenciálních rovnic řádu prvního. Podobně, každou soustavu rovnic vyššího řádu lze zredukovat na soustavu rovnic prvního řádu. Je tedy skutečně bez újmy na obecnosti, když se zabýváme pouze soustavami rovnic prvního řádu.

b) Opačný postup, tj. převod SODR1 na ODR $n$ , obecně možný není. V případě soustav lineárních ODR1 však proveditelný je a tomuto postupu se říká *eliminací metoda*. Výslednou rovnicí je tedy lineární ODR $n$ , kterou jsme v určitých případech schopni exaktně řešit. Princip metody bude patrný z následujícího příkladu.

**Příklad 11.8.** Eliminační metodou vyřešme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 3y_2 - 14, & y_1(0) &= -2, \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2, & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

**Řešení.** Ze soustavy eliminujeme například funkci  $y_1$  tak, že druhou rovnici vynásobíme dvěma a odečteme od ní první rovnici, čímž dostaneme

$$2y_2' - y_1' = -7y_2 + 14. \quad (11.13)$$

Nyní z rovnice, která neobsahuje derivaci eliminované funkce, tj. z druhé rovnice, vyjádříme  $y_1$  a danou rovnost zderivujeme

$$y_1 = -\frac{1}{2}y_2' - \frac{5}{2}y_2 \Rightarrow y_1' = -\frac{1}{2}y_2'' - \frac{5}{2}y_2'. \quad (11.14)$$

Tuto derivaci dosadíme do (11.13), tj. máme

$$2y_2' + \frac{1}{2}y_2'' + \frac{5}{2}y_2' = -7y_2 + 14 \Rightarrow \frac{1}{2}y_2'' + \frac{9}{2}y_2' + 7y_2 = 14$$

a po úpravě

$$y_2'' + 9y_2' + 14y_2 = 28, \quad (11.15)$$

což je LODR2. Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

má kořeny  $\lambda_1 = -2$  a  $\lambda_2 = -7$ , což dává dvojici lineárně nezávislých řešení  $u_1(x) = e^{-2x}$  a  $u_2(x) = e^{-7x}$ . Hledáme-li partikulární řešení ve tvaru  $y_p(x) = A$ , pak metoda neurčitých koeficientů dává  $y_p(x) = 2$  a obecné řešení rovnice (11.15) je

$$y_2(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-7x} + 2.$$

Dosažením této funkce a její derivace do (11.14) dostaneme první složku řešení  $y_1$  ve tvaru

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-7x} - 5.$$

S využitím maticového zápisu tedy zadaná soustava má obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dosažíme-li nyní do obecného řešení hodnoty z počátečních podmínek, dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

která má řešení  $C_1 = -2$ ,  $C_2 = 0$ , a tedy naše počáteční úloha má řešení

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Poznámka 11.9.** U soustav tří a více rovnic se eliminační metoda již příliš nepoužívá, poněvadž v těchto případech je pracná a vyžaduje nemalou matematickou zručnost.

Vraťme se zpět k nelineárním soustavám ODR1. Již jsme uvedli, že výše ilustrovaná eliminační metoda zde obecně použít nelze; existují však případy, kdy převod dané nelineární SODR1 na skalární ODR $n$  proveditelný je. Asi nás příliš nepřekvapí, že vzniklá ODR $n$  je také nelineární. I z této jednoduché úvahy vyplývá, že obecné algoritmy pro řešení nelineárních soustav ODR1 neexistují. Proto je opět důležité mít informaci alespoň o existenci, příp. jednoznačnosti hledaného řešení. Následující věta je analogií vět 6.1 a 7.1, a pojednává o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy (11.1), (11.3).

■ **Věta 11.10.** *Nechť všechny funkce  $f_k = f_k(x, y_1, \dots, y_n)$  ( $k = 1, \dots, n$ ), vystupující v (11.1), splňují tyto dva předpoklady:*

(P1<sup>n</sup>) Jsou spojité na nějakém okolí  $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bodu  $(x_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ ;

(P2<sup>n</sup>) Mají na  $O$  ohraničené parciální derivace

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_1}, \frac{\partial f_k}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y_n}.$$

Potom má počáteční úloha (11.1), (11.3) právě jedno řešení  $y_1 = u_1(x), \dots, y_n = u_n(x)$ , které je definované v nějakém intervalu obsahujícím počáteční bod  $x_0$  ve svém vnitřku.

### 11.3 Základy teorie soustav lineárních ODR1

V této podsececi se zaměříme na soustavy lineárních diferenciálních rovnic a popíšeme strukturu jejich řešení.

**Definice 11.11.** Soustavou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (SLODR1) rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{aligned} \tag{11.16}$$

Funkce  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  nazýváme *koefficienty soustavy*,  $n$ -tici funkcí  $b_1, \dots, b_n$  nazýváme *pravou stranou soustavy*, a o všech těchto funkcích předpokládáme, že jsou definovány na nějakém intervalu  $I$  a jsou zde spojité.

Jsou-li všechny funkce  $b_1, \dots, b_n$  nulové na celém intervalu  $I$ , pak hovoříme o *homogenní* soustavě, v opačném případě, tj. je-li alespoň jedna funkce  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) nenulová, o *nehomogenní* soustavě.

**Poznámka 11.12.** V maticovém zápisu píšeme

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

kde

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Na základě poznámky 11.7b) již víme, že SLODR1 lze převést na LODR $n$ . Proto je přirozené očekávat, že struktura a vlastnosti řešení SLODR1 budou velmi podobné jako v případě LODR $n$ . Podstatné vlastnosti uvedeme bez důkazů, argumentace by byla podobná jako v případě LODR $n$  v podsekcí 7.2.

Nejprve zformulujeme příslušnou větu o globální existenci a jednoznačnosti řešení.

■ **Věta 11.13.** *Necht' matice koeficientů  $\mathbf{A}$  a pravá strana  $\mathbf{b}$  jsou spojité na intervalu  $I$ , a necht'  $x_0 \in I$ . Pak počáteční úloha (11.16), (11.3) má jediné řešení, definované na celém intervalu  $I$ .*

### Homogenní SLODR1

V této soustavě je  $\mathbf{b}(x) = \mathbf{0}$  pro každé  $x \in I$ . Daná SLODR1 se tedy redukuje na tvar

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}. \quad (11.17)$$

■ **Věta 11.14.** *Necht' vektorové funkce  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  ( $k$  je libovolné přirozené číslo) jsou řešeními soustavy (11.17). Potom jejich lineární kombinace*

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{u}_1 + C_2\mathbf{u}_2 + \dots + C_k\mathbf{u}_k$$

je také řešením rovnice (11.17).

**Definice 11.15.** Necht'  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jsou vektorové funkce o  $n$  složkách definované na intervalu  $I$ . Řekneme, že tyto funkce jsou *lineárně nezávislé na  $I$* , jestliže rovnost

$$C_1\mathbf{f}_1(x) + C_2\mathbf{f}_2(x) + \dots + C_n\mathbf{f}_n(x) = \mathbf{0} \quad \text{pro } x \in I \quad (11.18)$$

platí pouze v případě, kdy  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ .

Pro dané  $x \in I$  rovnost (11.18) představuje soustavu  $n$  (algebraických) lineárních rovnic. Podle Frobeniovy věty je jednoznačně řešitelná, je-li determinant matice soustavy nenulový, v takovém případě musí být příslušné řešení  $C_1, \dots, C_n$  nulové, protože pravá strana je nulová. Na základě této úvahy máme následující test lineární nezávislosti  $n$ -tice vektorových funkcí.

■ **Věta 11.16.** *Necht'  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jsou vektorové funkce o  $n$  složkách definované na intervalu  $I$ . Je-li*

$$\det(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & f_{2,1}(x) & \dots & f_{n,1}(x) \\ f_{1,2}(x) & f_{2,2}(x) & \dots & f_{n,2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,n}(x) & f_{2,n}(x) & \dots & f_{n,n}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

( $f_{i,j}$  značí  $j$ -tou složku vektorové funkce  $\mathbf{f}_i$ ) v alespoň jednom bodě  $x \in I$ , pak  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jsou lineárně nezávislé na  $I$ .

**Poznámka 11.17.** Výše uvedený determinant je analogií wronskiánu pro vektorový případ.

■ **Věta 11.18.** *Necht' vektorové funkce  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  řeší soustavu (11.17) na intervalu  $I$ . Pak jsou lineárně nezávislé na  $I$ , právě když*

$$\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)(x) \neq 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Hlavním výsledkem teorie homogenních SLODR1 je následující analogie věty 7.17.

■ **Věta 11.19.** *Necht'  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou řešeními homogenní SLODR1 (11.17) na  $I$ , která jsou zde lineárně nezávislá. Potom každé řešení  $\mathbf{y}$  této soustavy lze psát jednoznačně ve tvaru*

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{u}_1(x) + C_2 \mathbf{u}_2(x) + \dots + C_n \mathbf{u}_n(x),$$

kde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  jsou vhodné konstanty.

**Poznámka 11.20.** Libovolnou  $n$ -tici lineárně nezávislých řešení soustavy (11.17) (která má  $n$  rovnic) nazýváme *fundamentální systém řešení* této soustavy. Uspořádáme-li tato řešení do sloupců, pak vzniklou matici nazýváme *fundamentální maticí řešení* a označujeme ji  $\mathbf{U}(x)$ .

### Nehomogenní SLODR1

V případě nehomogenní SLODR1, tj. soustavy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad (11.19)$$

kde  $\mathbf{b}(x) \neq \mathbf{0}$  pro nějaké  $x \in I$ , není těžké ověřit následující analogii věty 7.20.

■ **Věta 11.21.** *Necht'  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  je fundamentální systém řešení homogenní SLODR1 (11.17) a  $\mathbf{y}_p$  je nějaké partikulární řešení nehomogenní SLODR1 (11.19). Pak obecné řešení soustavy (11.19) lze napsat ve tvaru*

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{u}_1(x) + C_2 \mathbf{u}_2(x) + \dots + C_n \mathbf{u}_n(x) + \mathbf{y}_p(x),$$

kde  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ .

**Poznámka 11.22 – princip superpozice.** Pro nehomogenní SLODR1 platí také analogie věty 7.21, tj. je-li možné pravou stranu  $\mathbf{b}$  psát jako

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}_1(x) + \mathbf{b}_2(x) + \dots + \mathbf{b}_k(x),$$

přičemž  $\mathbf{y}_{p_i}$  je řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}_i(x),$$

pak

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{y}_{p_1} + \mathbf{y}_{p_2} + \dots + \mathbf{y}_{p_k}$$

je partikulárním řešením soustavy (11.19).

### Příklady k procvičení

**Cvičení 11.23.** Převeďte počáteční úlohu  $y^{(4)} = xy + (y'')^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 2$  na počáteční úlohu pro SODR1.

**Cvičení 11.24.** Rozhodněte, zda vektorové funkce

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(x) = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

tvorí fundamentální systém řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic  $y_1' = y_2$ ,  $y_2' = y_3$ ,  $y_3' = -y_2$  na  $\mathbb{R}$ .

**Výsledky.** Ano, tvoří (uvedené vektorové funkce jsou lineárně nezávislá řešení na  $\mathbb{R}$ ).

## 12 Metody řešení soustav lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

V předcházející sekci jsme se seznámili s eliminační metodou řešení SLODR1, která spočívala v převodu této soustavy na jednu LODR $n$ . Není těžké si rozmyslet, že pokud je matice dané soustavy konstantní, má vzniklá LODR $n$  konstantní koeficienty. Poněvadž problematikou řešení LODR $n$  s konstantními koeficienty jsme se zabývali v sekci osmé, zdá se být otázka nalezení řešení těchto soustav vyřešena. To je však pravda pouze částečná. Již jsme zmínili, že eliminační metoda může být početně komplikovaná. Navíc to není vlastní metoda řešení, nýbrž převádí problém na jiný problém. Proto se v této sekci zaměříme na následující otázku: Existují nějaké alternativní metody řešení SLODR1 s konstantní maticí soustavy? Pokud ano, jaký je jejich vztah k metodám používaným pro řešení LODR $n$  s konstantními koeficienty? A mají tyto metody nějaký další přínos?

Tyto otázky zodpovíme nejprve v homogenním případě.

### 12.1 Homogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

Homogenní SLODR1 s konstantními koeficienty rozumíme soustavu (11.17), ve které je matice soustavy konstantní (prvky jsou reálná čísla), tj.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (12.1)$$

Ve srovnání s eliminační metodou přináší efektivnější nástroj řešení soustavy (12.1) metoda popsaná v následujícím odstavci.

#### Metoda vlastních čísel (Eulerova)

V principu se jedná o podobný postup jako při hledání fundamentálního systému řešení v případě LODR $n$ . Nicméně, poněvadž se pohybujeme ve vyšší dimenzi, je z teoretického i praktického hlediska náročnější.

Podobně jako v podsekcí 8.1 hledáme řešení ve tvaru  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{h}e^{\lambda x}$ , kde  $\mathbf{h}$  je číselný vektor (jeho složky mohou být i komplexní čísla). Potřeba je ale zdůraznit, že tento vektor musí být nenulový, neboť nulové řešení nemůže být součástí fundamentálního systému řešení. Dosazením do (12.1) dostáváme

$$\lambda \mathbf{h}e^{\lambda x} = \mathbf{A}\mathbf{h}e^{\lambda x} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{h} - \lambda \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

což po vytknutí vektoru  $\mathbf{h}$  dává soustavu lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{E} \text{ je jednotková matice}). \quad (12.2)$$

Z lineární algebry je známo, že taková soustava má nenulové řešení (ne jediné) pouze v případě, je-li matice  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$  singularní, tj.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (12.3)$$

Hodnoty  $\lambda$ , pro které platí poslední vztah, se nazývají *vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$*  a příslušné nenulové vektory  $\mathbf{h}$ , které získáme jako řešení soustavy (12.2), se nazývají *vlastní vektory*. Samotná rovnice (12.3) se nazývá *charakteristická rovnice matice  $\mathbf{A}$* . Jejím řešením je  $n$  (obecně komplexních) vlastních čísel (včetně vícenásobných).

**Poznámka 12.1.** Podobně jako u LODR $n$ , nejjednodušší případ nastane, kdy vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou reálná a vzájemně různá. Složitější situace je pak v případě vícenásobných kořenů. Podrobněji si nyní probereme případy  $n = 2$  a  $n = 3$ , které jsou v aplikacích nejběžnější. Některé z dalších pasáží nebudeme detailně zdůvodňovat; k jejich úplnému pochopení by bylo zapotřebí hlubších znalostí z lineární algebry.

#### Případ $n = 2$

a) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má dvě různá (reálná) vlastní čísla  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Potom soustava (12.1) má dvě lineárně nezávislá řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_2 x},$$

kde  $\mathbf{h}_1$  (resp.  $\mathbf{h}_2$ ) je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ). Lineární nezávislost lze snadno ověřit pomocí věty 11.16.

**Příklad 12.2.** Metodou vlastních čísel řešme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= -4y_1 - 3y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2.\end{aligned}$$

*Řešení.* Platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -3 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (4+\lambda)(5+\lambda) - 6 = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda+2)(\lambda+7) = 0.$$

Odtud  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -7$ . Abychom mohli určit vlastní vektory, musíme tyto hodnoty dosadit do (12.2):

Pro  $\lambda_1 = -2$  máme soustavu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Vektor  $\mathbf{h}_1$  jsme určili jako řešení rovnice  $-2h_1^1 - 3h_2^1 = 0$ , jednu složku tedy volíme a druhou dopočítáme. Všimněme si, že jej stačí brát jako kolmý vektor k vektoru, který tvoří první řádek matice soustavy.

Pro  $\lambda_2 = -7$  máme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x}.$$

Obecné řešení zadané soustavy tedy podle věty 11.19 je

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 12.3.** Pro výpočet vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  druhého řádu může být užitečná identita

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}), \quad (12.4)$$

kde  $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$  je *stopa matice*  $\mathbf{A}$ , což je součet prvků na hlavní diagonále, tj.  $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$ .

b) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má jedno reálné dvojnásobné vlastní číslo  $\lambda_{1,2} = \lambda_*$ . V tomto případě je potřeba dále rozlišit, zda je defekt matice  $(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})$  roven jedné nebo dvěma. Defekt matice  $(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})$  je číslo

$$d(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E}) = n - b(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E}),$$

kde  $n$  je počet řádků a  $b(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})$  je hodnota matice  $(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})$ . Toto číslo udává maximální počet lineárně nezávislých řešení  $\mathbf{h}$  soustavy  $(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{0}$ .

Odtud plyne, že je-li defekt matice roven dvěma, podaří se nám nalézt dva lineárně nezávislé vlastní vektory  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ , ke kterým dostaneme dvě lineárně nezávislá řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_* x}.$$

Je-li defekt roven jedné, podaří se nám určit pouze jeden vlastní vektor  $\mathbf{h}_1$  (jakýkoliv další by již byl lineárně závislý s vektorem předcházejícím). Potom dvě lineárně nezávislá řešení lze psát ve tvaru

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = (\mathbf{h}_1 x + \mathbf{h}_2) e^{\lambda_* x}, \quad (12.5)$$

kde vektor  $\mathbf{h}_2$  (někdy nazývaný jako zobecněný vlastní vektor) lze určit jako řešení soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1. \quad (12.6)$$

**Příklad 12.4.** Vyřešme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1, \\y_2' &= 2y_2.\end{aligned}$$

*Řešení.* Podle (12.4) platí  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ . Odtud  $\lambda_{1,2} = \lambda_* = 2$ . Platí

$$\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato matice má defekt 2, soustava  $(\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{0}$  je tedy splněna pro jakýkoliv vektor  $\mathbf{h}$ . Lineárně nezávislou dvojici vlastních vektorů zvolme co nejjednodušší, např.

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální dvojici řešení lze pak psát jako

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x},$$

a obecné řešení tedy je

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2x} \\ C_2 e^{2x} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 12.5.** Tento případ není z praktického hlediska zajímavý. Zadanou soustavu lze chápat jako dvojici na sobě nezávislých LODR1, lze ji tedy také řešit postupnou integrací jednotlivých rovnic.

**Příklad 12.6.** Vyřešme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= -7y_1 + 9y_2, \\y_2' &= -y_1 - y_2.\end{aligned}$$

*Řešení.* Pro charakteristickou rovnici platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} -7 - \lambda & 9 \\ -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 = 0.$$

Odtud  $\lambda_{1,2} = \lambda_* = -4$ . Matice

$$\mathbf{A} - \lambda_*\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

má nyní defekt 1, vlastní vektor  $\mathbf{h}_1$  zvolme např. jako

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{což dává } \mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Každý další vektor by už byl na  $\mathbf{h}_1$  lineárně závislý, a je proto potřeba postupovat podle vztahů (12.5) a (12.6), tj. nejprve určíme vektor  $\mathbf{h}_2$  ze soustavy

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} + 4\mathbf{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}_1}.$$

Jeden řádek je v soustavě je opět lineárně závislý, máme tedy podmínku  $-h_1^2 + 3h_2^2 = 1$ . Odtud např.

$$\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a druhé řešení je } \mathbf{u}_2(x) = \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-4x} = \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ x \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Obecné řešení potom je

$$y(x) = C_1 \binom{3}{1} e^{-4x} + C_2 \binom{3x-1}{x} e^{-4x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 12.7.** Z předchozího příkladu je patrný rozdíl oproti LODR2. V případě dvojnásobného charakteristického kořene  $\lambda_{1,2} = \lambda_*$  je dvojice řešení tvaru  $u_1(x) = e^{\lambda_* x}$ ,  $u_2(x) = x e^{\lambda_* x}$ , kdežto v předchozím příkladě máme

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} Ax + C \\ Bx + D \end{pmatrix} e^{\lambda_* x},$$

tj. druhé řešení nedostaneme vynásobením proměnnou  $x$ ! (Je třeba o jedničku zvýšit stupeň polynomu.)

c) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má dvě komplexně sdružená vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \mu \pm iv$ . K těmto komplexně sdruženým číslům existují komplexně sdružené vlastní vektory  $\mathbf{h}_{1,2} = \mathbf{r} \pm is$ . Příslušnou dvojici lineárně nezávislých řešení lze potom napsat ve tvaru

$$\mathbf{u}_{1,2}^*(x) = (\mathbf{r} \pm is) e^{(\mu \pm iv)x} = e^{\mu x} [(\mathbf{r} \cos vx - \mathbf{s} \sin vx) \pm i(\mathbf{s} \cos vx + \mathbf{r} \sin vx)].$$

Abychom se tomuto komplexnímu řešení vyhnuli, provedeme stejný obrat jako v podsekcí 8.1. Lineárními kombinacemi  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^*)$  a  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}_2^*)$  dostaneme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = e^{\mu x} (\mathbf{r} \cos vx - \mathbf{s} \sin vx), \quad \mathbf{u}_2(x) = e^{\mu x} (\mathbf{s} \cos vx + \mathbf{r} \sin vx). \quad (12.7)$$

**Příklad 12.8.** Vyřešme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2, \\ y_2' &= y_1. \end{aligned}$$

**Řešení.** Řešením charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

je dvojice komplexně sdružených vlastních čísel  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Do soustavy (12.2) dosadíme např.  $\lambda_1 = i$ . To vede na

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li druhý řádek číslem  $-i$  dostaneme

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

což je tvar, ze kterého je vidět, že jeden řádek v soustavě je skutečně lineárně závislý. Odtud

$$-ib_1^1 - b_2^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{s}}.$$

Pozor! Všimněme si, že v poslední rovnosti jsme vlastní vektor rozepsali se znaménkem plus mezi reálnou a imaginární částí. Kdybychom jej napsali jako  $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , neodpovídala by nám znaménka ve vzorcích (12.7). Je tedy třeba dbát zásady, že bereme-li vlastní číslo  $\mu + iv$ , pak je třeba psát příslušný vlastní vektor jako  $\mathbf{r} + is$ , a bereme-li vlastní číslo  $\mu - iv$ , pak je třeba psát příslušný vlastní vektor jako  $\mathbf{r} - is$ . Nyní stačí dosadit do (12.7), čímž dostáváme dvojici lineárně nezávislých řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin x, \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x.$$

Odtud

$$y(x) = C_1 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin x \right] + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x \right] = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ C_1 \sin x - C_2 \cos x \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Položíme-li  $C_1 = A \cos \varphi$  a  $C_2 = -A \sin \varphi$ , dostaneme pomocí součtových vzorců  $y_1(x) = A \cos(x + \varphi)$ ,  $y_2(x) = A \sin(x + \varphi)$  (srovnejte s příkladem z úvodu podsekcce 11.2).

### Případ $n = 3$

a) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má tři navzájem různá reálná vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Potom soustava má tři lineárně nezávislá řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{h}_3 e^{\lambda_3 x},$$

kde  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  a  $\mathbf{h}_3$  jsou příslušné vlastní vektory k  $\lambda_1, \lambda_2$  a  $\lambda_3$ .

b) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má jedno reálné dvojnásobné vlastní číslo  $\lambda_{1,2} = \lambda_*$  a třetí reálné vlastní číslo  $\lambda_3 \neq \lambda_*$ .

Potom, je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) = 2$ , podaří se nám určit dva lineárně nezávislé vlastní vektory  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  příslušející vlastnímu číslu  $\lambda_*$ . Odtud máme trojici lineárně nezávislých řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{h}_3 e^{\lambda_3 x},$$

kde  $\mathbf{h}_3$  je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu  $\lambda_3$ .

Je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) = 1$ , lze určit jeden vlastní vektor  $\mathbf{h}_1$  příslušející vlastnímu číslu  $\lambda_*$ . Trojice lineárně nezávislých řešení je potom dána

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = (\mathbf{h}_1 x + \mathbf{h}_2) e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{h}_3 e^{\lambda_3 x},$$

kde vektor  $\mathbf{h}_2$  je řešením soustavy  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1$  a  $\mathbf{h}_3$  je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu  $\lambda_3$ .

c) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má dvě komplexně sdružená vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$  a jedno reálné vlastní číslo  $\lambda_3$ . Potom trojice lineárně nezávislých řešení je tvaru

$$\mathbf{u}_1(x) = e^{\mu x} (\mathbf{r} \cos \nu x - \mathbf{s} \sin \nu x), \quad \mathbf{u}_2(x) = e^{\mu x} (\mathbf{s} \cos \nu x + \mathbf{r} \sin \nu x), \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{h}_3 e^{\lambda_3 x},$$

kde  $\mathbf{r} \pm i\mathbf{s}$  jsou vlastní vektory příslušející  $a \pm ib$  a  $\mathbf{h}_3$  je vlastní vektor příslušející  $\lambda_3$ .

d) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má jedno trojnásobné (reálné) vlastní číslo  $\lambda_{1,2,3} = \lambda_*$ .

Je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) = 3$ , je možné určit trojici lineárně nezávislých vektorů  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ , a tedy trojice lineárně nezávislých řešení je

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{h}_3 e^{\lambda_* x}.$$

Tento případ však není, podobně jako v případě  $n = 2$ , zajímavý.

Je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) = 2$ , je možné určit dva lineárně nezávislé vektory  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ . Trojice lineárně nezávislých řešení je potom ve tvaru

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = [(\alpha \mathbf{h}_1 + \beta \mathbf{h}_2)x + \mathbf{h}_3] e^{\lambda_* x},$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  jsou vhodné konstanty a vektor  $\mathbf{h}_3$  je řešením soustavy  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})\mathbf{h}_3 = \alpha \mathbf{h}_1 + \beta \mathbf{h}_2$  (často je možné volit  $\alpha = 1, \beta = 0$ , resp.  $\alpha = 0, \beta = 1$ , obecně však nikoliv, protože daná soustava nemusí mít pro tyto hodnoty řešení).

Je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) = 1$ , potom je možné určit jeden vlastní vektor  $\mathbf{h}_1$  a trojice lineárně nezávislých řešení je ve tvaru

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = (\mathbf{h}_1 x + \mathbf{h}_2) e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \left( \mathbf{h}_1 \frac{x^2}{2!} + \mathbf{h}_2 x + \mathbf{h}_3 \right) e^{\lambda_* x},$$

kde vektory  $\mathbf{h}_2$  a  $\mathbf{h}_3$  určíme ze soustav  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1$ ,  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_2$ .

**Poznámka 12.9.** Celkem tedy máme čtyři varianty v případě  $n = 2$  a sedm variant v případě  $n = 3$ . Případy  $n \geq 4$  by byl kombinací výše uvedených postupů.

**Příklad 12.10.** Vyřešme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2, \\y_2' &= 2y_2 + y_3, \\y_3' &= 2y_3.\end{aligned}$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

má jeden trojnásobný kořen  $\lambda_{1,2,3} = 2$  (jedná se tedy o případ popsany v odstavci d)). Dosazením do (12.2) dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.8)$$

Vidíme, že v této soustavě je zbytečný jeden řádek (ten poslední), a proto  $d(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 1$ . Při pohledu na soustavu (12.8) musí být  $h_3^1 = h_2^1 = 0$ . První složku  $h_1^1$  zvolme libovolně, např.  $h_1^1 = 1$ , tj.

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Vektor  $\mathbf{h}_2$  určíme ze soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \\ h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\mathbf{u}_2(x) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Vektor  $\mathbf{h}_3$  určíme ze soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^3 \\ h_2^3 \\ h_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\mathbf{u}_3(x) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2x} = \begin{pmatrix} x^2/2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Celkově tedy, obecné řešení je

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} x^2/2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

psáno po složkách  $y_1(x) = (C_1 + C_2x + \frac{C_3}{2}x^2)e^{2x}$ ,  $y_2(x) = (C_2 + C_3x)e^{2x}$ ,  $y_3(x) = C_3e^{2x}$ .

**Příklad 12.11.** Určeme obecné řešení soustavy

$$y_1' = y_2 + y_3,$$

$$y_2' = y_1 + y_3,$$

$$y_3' = y_1 + y_2.$$

**Řešení.** Charakteristická rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

má jednoduchý reálný kořen  $\lambda_1 = 2$  a dvojnásobný reálný kořen  $\lambda_{2,3} = -1$  (jedná se tedy o případ popsaný v části b)).

Pro  $\lambda_1 = 2$  nabývá soustava (12.2) tvaru

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Volíme-li  $b_1^1 = 1$ , pak první partikulární řešení soustavy dostáváme ve tvaru

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Pro  $\lambda_{2,3} = -1$  obdržíme soustavu (12.2) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Defekt této matice je zřejmě dva, takže tuto soustavu můžeme nahradit jedinou rovnicí

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0.$$

Volíme-li např.  $b_1 = 1, b_2 = 0$ , pak  $b_3 = -1$ ; při volbě  $b_1 = 0, b_2 = 1$  je  $b_3 = -1$ . Dostáváme tedy dva lineárně nezávislé vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu  $\lambda = -1$ . Odtud plyne vyjádření pro zbývající hledaná řešení  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  soustavy ve tvaru

$$\mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Dohromady tedy

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka 12.12.** Pro výpočet determinantu  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$  je v případě  $n = 3$  užitečná identita

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(\mathbf{A})\lambda^2 - I_2(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}),$$

kde

$$I_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

je tzv. *druhý invariant* matice  $\mathbf{A}$  (tr opět značí stopu matice,  $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ).

## 12.2 Nehomogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

Věnujme se nyní nehomogenní soustavě

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{b}(x) \neq \mathbf{0} \quad \text{pro nějaké } x \in I. \quad (12.9)$$

Podle věty 11.21 víme, že její obecné řešení lze psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2 + \dots + C_n \mathbf{u}_n + \mathbf{y}_p,$$

kde  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  je fundamentální systém řešení příslušné homogenní SLODR1 (ten jsme se naučili nalézt v předcházející podsekcí) a  $\mathbf{y}_p$  je libovolné partikulární řešení soustavy (12.9). V této podsekcí se tedy naučíme určit řešení  $\mathbf{y}_p$ . Budeme postupovat analogicky jako v podsekcí 8.2, tj. nejprve se seznámíme s metodou neurčitých koeficientů pro SLODR1 a poté s metodou variace konstant.

### Metoda neurčitých koeficientů

Jedná se o přímé zobecnění stejnojmenné metody pro LODR $n$  probrané v podsekcí 8.2. Tuto metodu lze použít v případě, kdy vektorová funkce  $\mathbf{b}$  je ve tvaru

$$\mathbf{b}(x) = e^{ax}(\mathbf{P}_r(x) \cos bx + \mathbf{Q}_s(x) \sin bx), \quad (12.10)$$

kde  $\mathbf{P}_r$ , resp.  $\mathbf{Q}_s$  jsou vektory polynomů stupně nejvýše  $r$ , resp.  $s$ . Řešení  $\mathbf{y}_p$  potom hledáme ve tvaru

$$\mathbf{y}_p(x) = e^{ax}(\tilde{\mathbf{P}}_{t+k}(x) \cos bx + \tilde{\mathbf{Q}}_{t+k}(x) \sin bx), \quad (12.11)$$

kde  $t = \max\{r, s\}$ ,  $k$  je násobnost vlastního čísla  $\lambda = a + ib$  (pokud tato hodnota není vlastním číslem, klademe  $k = 0$ ) a  $\tilde{\mathbf{P}}_{t+k}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_{t+k}$  jsou vektorové polynomy stupně právě  $t + k$ , ve kterých vystupují zatím neurčené koeficienty.

**Příklad 12.13.** Vyřešte počáteční úlohu

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 3y_2 - 14, & y_1(0) &= 0, \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2 + 5e^{-2x}, & y_2(0) &= -2. \end{aligned}$$

*Řešení.* Podle příkladu 12.2 matice soustavy  $\mathbf{A}$  má vlastní čísla  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -7$  a homogenní soustava má fundamentální systém řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x}.$$

Pravá strana

$$\mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} -14 \\ 5e^{-2x} \end{pmatrix}$$

není přímo ve tvaru (12.10) (jednotlivé složky odpovídají různým hodnotám  $\lambda = a + ib$  s různými hodnotami  $k$ ), ale pokud ho rozepíšeme jako součet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -14 \\ 5e^{-2x} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_2(x)} e^{-2x},$$

pak obě vektorové funkce  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  jsou typu (12.10). Využijeme tedy principu superpozice formulovaného v poznámce 11.22. Vektorová funkce  $\mathbf{b}_1$  obsahuje pouze konstanty, tj. polynomy nultého stupně, porovnáním s (12.10) tedy je  $a = 0$ ,  $b = 0$ , tj. pravá strana odpovídá  $\lambda = 0$ , což není vlastní číslo matice soustavy  $\mathbf{A}$ . Partikulární řešení  $\mathbf{y}_{p_1}$  budeme podle (12.11) hledat ve tvaru

$$\mathbf{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Derivace této vektorové funkce je nulová, po dosazení do soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}_1(x)$  tedy máme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= -4A - 3B - 14, \\ 0 &= -2A - 5B, \end{aligned}$$

která má řešení jediné řešení  $A = -5, B = 2$ , tj.  $\mathbf{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  (srovnejte s příkladem 11.8).

Porovnáme-li nyní vektorovou funkci  $\mathbf{b}_2$  s tvarem (12.10), vidíme, že je  $a = -2, b = 0$ , tj. tato pravá strana odpovídá  $\lambda = -2$ , což je (jednoduché) vlastní číslo. Podle (12.11) budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$\mathbf{y}_{p_2}(x) = \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Derivace je

$$\mathbf{y}'_{p_2}(x) = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} e^{-2x} - 2 \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Dosazením do soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}_2(x)$  dostaneme

$$\begin{aligned} (A - 2B - 2Ax)e^{-2x} &= -4(Ax + B)e^{-2x} - 3(Cx + D)e^{-2x}, \\ (C - 2D - 2Cx)e^{-2x} &= -2(Ax + B)e^{-2x} - 5(Cx + D)e^{-2x} + 5e^{-2x}. \end{aligned}$$

Funkcí  $e^{-2x}$  je násoben každý sčítanec v soustavě, a protože je tato funkce kladná, můžeme jí vykrátit, tj. máme

$$\begin{aligned} A - 2B - 2Ax &= -4(Ax + B) - 3(Cx + D), \\ C - 2D - 2Cx &= -2(Ax + B) - 5(Cx + D) + 5, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A + 2B + 3D + (2A + 3C)x &= 0, \\ C + 2B + 3D + (2A + 3C)x &= 5. \end{aligned}$$

Porovnáme-li členy se stejnými mocninami v obou rovnicích, dostaneme soustavu čtyř rovnic

$$\begin{aligned} A + 2B + 3D &= 0, \\ 2B + C + 3D &= 5, \\ 2A + 3C &= 0, \\ 2A + 3C &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že poslední dvě rovnice jsou stejné, soustava tedy určitě nebude jednoznačně řešitelná. Abychom poznali, které složky můžeme zvolit, převedme soustavu na schodovitý tvar (poslední řádek již není třeba psát)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 10 \end{array} \right).$$

Z posledního tvaru je vidět, že musí být  $C = 2$ . Konstantu  $D$  zvolme, např.  $D = 1$ . Potom je jednoduché dopočítat  $B = 0$  a  $A = -3$ , a tedy

$$\mathbf{y}_{p_2}(x) = \begin{pmatrix} -3x \\ 2x + 1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Celkově, obecné řešení naší soustavy je

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x \\ 2x + 1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečních podmínek dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= 3C_1 + C_2 - 5, \\ -2 &= -2C_1 + C_2 + 2 + 1, \end{aligned}$$

která má (jediné) řešení  $C_1 = 2, C_2 = -1$ . Partikulární řešení zadané počáteční úlohy tedy je

$$\mathbf{y}(x) = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x \\ 2x + 1 \end{pmatrix} e^{-2x} \Rightarrow \begin{aligned} y_1(x) &= 6e^{-2x} - e^{-7x} - 3xe^{-2x} - 5, \\ y_2(x) &= -3e^{-2x} - e^{-7x} + 2xe^{-2x} + 2. \end{aligned}$$

**Poznámka 12.14.** Pokud je pravá strana v rezonanci s vlastním číslem matice soustavy (jako tomu bylo v našem příkladu u pravé strany  $\mathbf{b}_2$ ), tak metoda neurčitých koeficientů vede vždy na soustavu, která není jednoznačně řešitelná. Zdánlivě tak dostáváme různá řešení, jedná se však pouze o jinou lineární kombinaci řešení. To znamená, že kdybychom zvolili naši konstantu  $D$  jinak, musí nám vyjít také jinak konstanty  $C_1, C_2$ , aby výsledné partikulární řešení bylo stejné.

### Metoda variace konstant

Princip metody je analogický jako v případě LODR $n$ . Řešení nehomogenní soustavy (12.9) hledáme ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{c}(x), \quad \text{kde } \mathbf{U}(x) = (\mathbf{u}_1(x), \mathbf{u}_2(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)) \quad (12.12)$$

je fundamentální matice odpovídající homogenní soustavě (tj. sloupce matice jsou vektory fundamentálního systému řešení homogenní SLODR1) a  $\mathbf{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x))^T$  je vektor nějakých funkcí („variované konstanty“), které potřebujeme určit. Derivace vektoru  $\mathbf{y}$  dává

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{U}'(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{U}(x)\mathbf{c}'(x). \quad (12.13)$$

Dosazením (12.12) a (12.13) do soustavy (12.9) dostaneme

$$\mathbf{U}'(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{U}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{U}(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{b}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}(x)\mathbf{c}'(x) + \underbrace{[\mathbf{U}'(x) - \mathbf{A}\mathbf{U}(x)]\mathbf{c}(x)}_{=0} + \mathbf{b}(x).$$

Výraz v hranatých závorkách je roven nulovému vektoru, protože každý sloupec matice  $\mathbf{U}$  je řešením homogenní SLODR1. Z rovnosti tedy zbude

$$\mathbf{U}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{b}(x), \quad (12.14)$$

což je (pro každé  $x \in \mathbb{R}$ ) soustava lineárních rovnic pro neznámý vektor  $\mathbf{c}'(x)$ . Protože sloupce v matici  $\mathbf{U}$  jsou lineárně nezávislá řešení homogenní SLODR1, podle věty 11.18 platí  $\det \mathbf{U}(x) \neq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , což zaručí, že soustava je jednoznačně řešitelná. Řešení lze tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{c}'(x) = \mathbf{U}^{-1}(x)\mathbf{b}(x).$$

Dalším krokem je integrace

$$\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x) dx + \mathbf{C},$$

kde  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$  je vektor integračních konstant, a konečně posledním krokem je dosazení vypočítané vektorové funkce  $\mathbf{c}(x)$  zpět do (12.12).

**Poznámka 12.15.** Metoda stejně jako u LODR $n$  funguje i v případě nekonstantní matice soustavy  $\mathbf{A}$ , ale pouze teoreticky, neboť v tomto případě málokdy umíme určit fundamentální systém řešení homogenní soustavy.

Vyřešme úlohu z příkladu 12.13 metodou variace konstant.

**Řešení.** Protože již fundamentální systém řešení odpovídající homogenní soustavě známe, můžeme rovnou dosadit do (12.14), tj. máme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{-7x} \\ -2e^{-2x} & e^{-7x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 5e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Pomocí Cramerova pravidla

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -14 & e^{-7x} \\ 5e^{-2x} & e^{-7x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3e^{-2x} & e^{-7x} \\ -2e^{-2x} & e^{-7x} \end{vmatrix}} = \frac{-14e^{-7x} - 5e^{-9x}}{5e^{-9x}} = -\frac{14}{5}e^{2x} - 1,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3e^{-2x} & -14 \\ -2e^{-2x} & 5e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3e^{-2x} & e^{-7x} \\ -2e^{-2x} & e^{-7x} \end{vmatrix}} = \frac{15e^{-4x} - 28e^{-2x}}{5e^{-9x}} = 3e^{5x} - \frac{28}{5}e^{7x}.$$

Integrací dostaneme

$$c_1(x) = - \int \left( \frac{14}{5}e^{2x} + 1 \right) dx = -\frac{7}{5}e^{2x} - x + C_1,$$

$$c_2(x) = \int \left( 3e^{5x} - \frac{28}{5}e^{7x} \right) dx = \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{4}{5}e^{7x} + C_2.$$

Dosazení do (12.12) dává

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{-7x} \\ -2e^{-2x} & e^{-7x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}e^{2x} - x + C_1 \\ \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{4}{5}e^{7x} + C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}e^{2x} - x + C_1 \\ -\frac{7}{5}e^{2x} - x + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{4}{5}e^{7x} + C_2 \\ \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{4}{5}e^{7x} + C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x}. \end{aligned}$$

Po úpravě máme obecné řešení nehomogenní ve tvaru

$$y(x) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7x} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x + 3/5 \\ 2x + 3/5 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (12.15)$$

Konstanty  $C_1, C_2$  určíme z počátečních podmínek, jejich dosazením do obecného řešení dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22/5 \\ -23/5 \end{pmatrix}.$$

Ta má řešení  $C_1 = 9/5$  a  $C_2 = -1$ . Dosazením těchto konstant do (12.15) a rozepsáním po složkách dostaneme řešení zadané počáteční úlohy

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 6e^{-2x} - e^{-7x} - 3xe^{-2x} - 5, \\ y_2(x) &= -3e^{-2x} - e^{-7x} + 2xe^{-2x} + 2, \end{aligned}$$

které odpovídá závěru příkladu 12.13.

**Poznámka 12.16.** V rámci našeho modelového příkladu byly obě metody srovnatelné co do náročnosti výpočtu, zpravidla však bývá metoda variace konstant pracnější.

Na závěr ještě poznamenejme, že dalším významným nástrojem, umožňujícím řešit SLODR1 s konstantními koeficienty, je metoda Laplaceovy transformace, která byla diskutována v podsekcí 9.1.

### Příklady k procvičení

**Cvičení 12.17.** Metodou vlastních čísel nalezněte obecné řešení daných soustav diferenciálních rovnic:

- |   |   |
|---|---|
| a) $y_1' = y_1 + y_2,$<br>$y_2' = -2y_1 + 3y_2,$              | b) $y_1' = 2y_1 - 3y_2,$<br>$y_2' = y_1 - 2y_2,$          |
| c) $y_1' = 7y_1 - 18y_2,$<br>$y_2' = 3y_1 - 8y_2,$            | d) $y_1' = 3y_1 - 5y_2,$<br>$y_2' = 5y_1 - 3y_2,$         |
| e) $y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 5x,$<br>$y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 8e^x,$ | f) $y_1' = 2y_1 + y_2,$<br>$y_2' = y_1 + 2y_2 - 3e^{4x},$ |

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + y_3, & y_1' &= y_1 - y_2 - y_3, \\ \text{g) } y_2' &= y_1 + 2y_2 - y_3, & \text{h) } y_2' &= y_1 + y_2, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 2y_3, & y_3' &= 3y_1 + y_3. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y_1(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ,  $y_2(x) = e^{2x}((C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x)$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $y_1(x) = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^x$ ,  $y_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ; c)  $y_1(x) = 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$ ,  $y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 d)  $y_1(x) = 5C_1 \cos 4x + 5C_2 \sin 4x$ ,  $y_2(x) = (3C_1 - 4C_2) \cos 4x + (4C_1 + 3C_2) \sin 4x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 e)  $y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} - 3e^x + 2x - 13/5$ ,  $y_2(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} + e^x - 3x + 12/5$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 f)  $y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{4x}$ ,  $y_2(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{4x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 g)  $y_1(x) = C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$ ,  $y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ ,  $y_3(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$ ,  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;  
 h)  $y_1(x) = e^x(2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x)$ ,  $y_2(x) = e^x(C_1 - C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$ ,  $y_3(x) = e^x(-C_1 - 3C_2 \cos 2x + 3C_3 \sin 2x)$ ,  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 12.18.** Vybrané soustavy z předcházejícího cvičení vyřešte také eliminační metodou.

**Cvičení 12.19.** Metodou neurčitých koeficientů určete obecné řešení daných soustav diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a) } y_1' &= 2y_1 - y_2 + 2, & \text{b) } y_1' &= 2y_1 + y_2, \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 + 2, & y_2' &= y_1 + 2y_2 - 3e^{4x}, \\ \text{c) } y_1' &= y_2, & \text{d) } y_1' &= y_2 + \cos x, \\ y_2' &= y_1 + e^x + e^{-x}, & y_2' &= -y_1 + 1. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y_1(x) = C_1 x + C_2 + x^2 + 2x$ ,  $y_2(x) = 2C_1 x + 2C_2 - C_1 + 2x^2 + 2x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{4x}$ ,  $y_2(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{4x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x \sinh x$ ,  $y_2(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \sinh x + x \cosh x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 d)  $y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x + 1$ ,  $y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \cos x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 12.20.** Metodou neurčitých koeficientů určete řešení dané počáteční úlohy:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + \cos x, & y_1(0) &= 2, & y_2(0) &= 0. \\ y_2' &= -y_1 + \sin x, \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y_1(x) = e^x + e^{-x} + \sin x$ ,  $y_2(x) = -e^x + e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 12.21.** Metodou variace konstant určete obecné řešení daných soustav diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a) } y_1' &= y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1, & \text{b) } y_1' &= 2y_1 - y_2, \\ y_2' &= -y_1 + \operatorname{tg} x, & y_2' &= -y_1 + 2y_2 - 5e^x \sin x. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{tg} x$ ,  $y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $y_1(x) = (C_1 + 2 \cos x - \sin x)e^x + C_2 e^{3x}$ ,  $y_2(x) = (C_1 + 3 \cos x + \sin x)e^x - C_2 e^{3x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 12.22.** Metodou variace konstant určete řešení dané počáteční úlohy:

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1}, & y_1(\ln 2) &= 0, & y_2(\ln 2) &= 0. \\ y_2' &= 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1} \end{aligned}$$

*Výsledky.*  $y_1(x) = 2e^{-x} \ln(e^x - 1)$ ,  $y_2(x) = -3e^{-x} \ln(e^x - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

## 13 Stabilita řešení soustav ODR

Stabilitou daného objektu rozumíme v běžném slova smyslu jeho schopnost odolat vnějším vlivům (např. poruchám ve vstupních parametrech). Názorným příkladem je visící kyvadlo, které se, když ho vychýlíme z klidové polohy, po nějakém čase znovu vrátí do původní (stabilní) polohy. V podobném duchu budeme stabilitu chápat i v matematickém smyslu. Stabilita je jednou z nejvýznamnějších vlastností řešení diferenciálních rovnic, která je studována v souvislosti s řadou inženýrských a přírodovědných modelů. V této sekci se budeme zabývat následujícími otázkami: Jaká je (formální) matematická definice stability? Co je to rovnováha dané diferenciální soustavy? Jak lze rozpoznat, zda je rovnováha dané soustavy stabilní?

### 13.1 Základní pojmy

Uvažujme počáteční úlohu pro SODR1 v normálním tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(x_0) &= \xi_1, \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(x_0) &= \xi_2, \\ &\dots & & \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= \xi_n, \end{aligned}$$

tedy zapsáno vektorově

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = \xi. \quad (13.1)$$

Předpokládejme přitom, že pravé strany  $f_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) jsou definované na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a mají vlastnosti zaručující, že řešení počáteční úlohy (13.1) je definováno na celém intervalu  $\langle x_0, \infty \rangle$  pro každé  $(x_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega$ .

Za vstupní data soustavy lze považovat hodnoty  $x_0$ ,  $\xi$  a funkce vektoru  $f$ . Zhruba vyjádřeno, stabilním řešením budeme rozumět takové řešení, které bude na malou změnu vstupních parametrů reagovat pouze malou odchylkou v hodnotách řešení. V dalším výkladu se omezíme na poruchy vzhledem k počáteční hodnotě  $\xi$  ( $x_0$  a  $f$  přitom považujeme za pevně dané). Budeme tedy zkoumat změnu řešení  $y$  v závislosti na změně počátečního vektoru  $\xi$ . Abychom zdůraznili závislost řešení počáteční úlohy (13.1) na konkrétní hodnotě  $\xi$ , budeme toto řešení psát ve tvaru  $y(x, \xi)$ . Jestliže tedy změním hodnotu počátečního vektoru  $\xi$ , a jeho novou hodnotu označíme např.  $\eta$ , pak zápis  $y(x, \eta)$  představuje řešení počáteční úlohy zahrnující stejnou SODR1, ale novou počáteční podmínku, tedy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = \eta. \quad (13.2)$$

- Definice 13.1 — stabilního řešení.** a) Řekneme, že řešení  $y(x, \xi)$  počáteční úlohy (13.1) je *stabilní* (v Ljapunovově smyslu), jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každý vektor  $\eta$  splňující  $\|\eta - \xi\| < \delta$  a každé řešení  $y(x, \eta)$  úlohy (13.2) platí  $\|y(x, \eta) - y(x, \xi)\| < \varepsilon$  pro všechna  $x \in \langle x_0, \infty \rangle$ .
- b) Pokud je řešení  $y(x, \xi)$  úlohy (13.1) stabilní a navíc existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $\eta$  splňující  $\|\xi - \eta\| < \delta$  platí  $\|y(x, \eta) - y(x, \xi)\| \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow \infty$ , řekneme, že řešení  $y(x, \xi)$  je *asymptoticky stabilní*.
- c) Řekneme, že řešení  $y(x, \xi)$  je *nestabilní*, pokud není stabilní.

**Poznámka 13.2.** Připomeňme, že symbol  $\|\cdot\|$  zde představuje normu v  $\mathbb{R}^n$ , přičemž není podstatné, kterou konkrétní normu vybereme, můžeme uvažovat např. euklidovskou normu  $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ . Abychom učinili předcházející definici srozumitelnější, poznamenejme, že norma z rozdílu dvou výrazů, která se v definici vyskytuje na několika místech, lze geometricky interpretovat jako vzdálenost těchto výrazů. Pak je poměrně snadné předcházející definici v tomto smyslu přeformulovat.

**Příklad 13.3.** Uvažujme rovnici

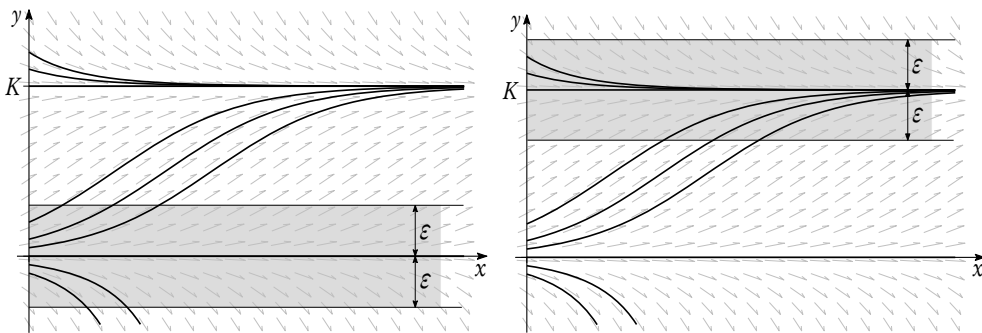
$$y' = ky \left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad (13.3)$$

na intervalu  $(0, \infty)$ , kde  $k, K$  jsou vhodné kladné konstanty. Ověříme, že tato rovnice má dvě konstantní řešení  $y^*(x) = 0$ ,  $y^{**}(x) = K$  a vyšetříme jejich stabilitu.

**Řešení.** Dosazením se snadno přesvědčíme, že konstantní funkce  $y^*$  a  $y^{**}$  rovnici (13.3) skutečně řeší. Dále se zaměříme na posouzení jejich stability. Pro tento účel vyřešíme rovnici (13.3). Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými a rovnici Bernoulliou, jejíž obecné řešení má tvar (viz příklad 10.3)

$$y(x) = \frac{K}{1 + Ce^{-kx}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vezmeme-li v úvahu počáteční podmínku  $y(0) = y_0 \neq 0$ , potom  $C = (k - y_0)/y_0$ . Poznamenejme, že rovnice (13.3) má také výjimečné řešení  $y^*(x) = 0$ . Vyšetřujeme-li stabilitu nějakého řešení  $y$ , tak podle definice pro dostatečně malou odchylku v počáteční hodnotě (menší než  $\delta$ ) bude každé „odchýlené“ řešení ležet v  $\varepsilon$ -pásku okolo grafu tohoto řešení  $y$ . Zabýváme se nejprve stabilitou výjimečného řešení  $y^*(x) = 0$ . Z průběhu integrálních křivek a směrového pole je zřejmé, že i když počáteční hodnota  $y_0 \neq 0$  bude jakkoliv blízko nule, hodnota řešení  $y(x)$  „uteče“ z  $\varepsilon$ -pásku okolo  $y^*$ , a řešení  $y^*$  tedy nemůže být stabilní (viz obrázek 13.1 vlevo). Dále vidíme, že pro  $0 < y_0 < K$  je řešení  $y$  rostoucí, pro  $y_0 > K$  klesající a  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = K$ . Řešení  $y^{**}$  je tedy asymptoticky stabilní (viz obrázek 13.1 vpravo).



Obrázek 13.1: Nestabilita řešení  $y^*(x) = 0$  a asymptotická stabilita řešení  $y^{**}(x) = K$

**Poznámky 13.4.** a) Jak již bylo uvedeno v příkladu 10.3, rovnice (13.3) se nazývá logistická rovnice a její typickou aplikací je modelování růstu populace v nějakém prostředí. Interpretujeme-li proměnnou  $x$  jako čas, potom rovnice říká, že rychlost reprodukce populace  $y'$  závisí jak na existující populaci  $y$ , tak na množství zdrojů pro užití populace. Parametr  $k$  představuje maximální rychlost růstu populace a parametr  $K$  se nazývá nosná kapacita (úživnost) prostředí. Uvažovaná konstantní řešení  $y^*$ ,  $y^{**}$ , jejichž stabilitu jsme zkoumali, jsou významná, neboť představují rovnovážný stav (stav populace neroste ani neklesá). Řešení  $y^*$  představuje nulovou populaci (v daném prostředí se tedy žádní zástupci zkoumané populace nenacházejí). Pokud tento stav porušíme tím, že vysadíme určitý počet jedinců dané populace, pak nestabilita nulového řešení  $y^*$  znamená, že i když bude počet vysazených jedinců jakkoliv malý, nebude se stav populace v průběhu času držet blízko původního stavu, ani se nebude snižovat (jinak vyjádřeno, populace se zde uchytlá a nevymře). Podle předcházející analýzy navíc vidíme, že stav populace začne růst až do stavu „nasyčení“, který je dán kapacitou prostředí  $K$ . Asymptotickou stabilitu řešení  $y^{**}$  lze v tomto případě chápat dokonce v globálním smyslu (tedy jakýkoliv nenulový počáteční stav populace se bude s rostoucím časem postupně blížit ke stavu danému kapacitou prostředí).

b) Výše zmíněná konstantní řešení představují rovnovážný stav v daném modelu. Je snadné si rozmyslet, jak tyto stavy najít. Poněvadž reprezentují konstantní řešení, jejichž derivace je nulová, musí být levá – a tudíž i pravá – strana dané SODR1 nulová. Tuto skutečnost zachycuje následující definice.

**Definice 13.5 — bodu rovnováhy.** Konstantní řešení  $\mathbf{y}^e$  (tj. nezávisící na  $x$ ) soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  se nazývá *bodem rovnováhy* (equilibria) nebo *stacionárním bodem*. Platí tedy  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^e)$ .

**Poznámka 13.6.** Ve fázovém prostoru představuje trajektorie konstantního řešení bod v  $\mathbb{R}^n$ , proto hovoříme o bodu rovnováhy (stručně o rovnováze).

Vyšetřování stability nějakého řešení v soustavě  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  lze vhodnou substitucí převést na vyšetřování stability bodu rovnováhy, a to dokonce nulového bodu rovnováhy. Skutečně, položme  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{v}$ . Potom  $\mathbf{z}' = \mathbf{y}' - \mathbf{v}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ . Označíme-li  $\mathbf{g}(x, \mathbf{z}) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ , potom soustava  $\mathbf{z}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{z})$  má zřejmě bod rovnováhy  $\mathbf{z}^e = \mathbf{0}$ . Definici stability pro nulový bod rovnováhy lze potom vyslovit následovně.

**Definice 13.7 — stability nulového bodu rovnováhy.** a) Necht' soustava  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  má bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$ . Řekneme, že toto nulové řešení  $\mathbf{y}^e$  je stabilní, jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každý vektor  $\boldsymbol{\eta}$  splňující  $\|\boldsymbol{\eta}\| < \delta$  platí  $\|\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\eta})\| < \varepsilon$  pro všechna  $x \in (x_0, \infty)$ , kde  $\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\eta})$  je řešení úlohy (13.2).

b) Je-li navíc  $\|\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\eta})\| \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow \infty$ , řekneme, že nulové řešení  $\mathbf{y}^e$  je asymptoticky stabilní.

c) Řekneme, že nulové řešení  $\mathbf{y}^e$  je nestabilní, pokud není stabilní.

Významnou třídu SODR1 tvoří soustavy, jejichž pravá strana nezávisí explicitně na proměnné  $x$ . Má-li tato proměnná fyzikální význam času, pak její absence na pravé straně SODR1 znamená, že podmínky, za kterých je děj modelován, se v průběhu času nemění. Takovou rovnicí byla např. výše zkoumaná logistická rovnice (13.3).

**Definice 13.8 — autonomní SODR1.** Jestliže pravá strana soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  nezávisí na  $x$ , tj.  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , řekneme, že soustava je *autonomní* (používá se též termínu *časově nezávislá*).

**Poznámka 13.9.** Typickým příkladem autonomní soustavy je homogenní SLODR1 s konstantními koeficienty, tedy soustava  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ . Taková soustava má vždy bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  (hovoříme též o *nulovém* nebo *triviálním řešení*). Je-li matice  $\mathbf{A}$  regulární, pak je to jediný bod rovnováhy. Tento typ soustav bude vyšetřován v následující podsekci.

## 13.2 Stabilita homogenních soustav lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

Pro vyšetření stability nulového řešení soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stěžejní následující věta. Ta slouží jako kritérium, na jehož základě rozhodneme o stabilitě nulového řešení této soustavy, aniž bychom museli soustavu řešit a stabilitu nulového řešení zkoumat na základě definice 13.7. Pro aplikaci toho kritéria postačí znalost vlastních čísel matice soustavy  $\mathbf{A}$  (přesněji řečeno, postačí pouze znalost znamének reálných částí vlastních čísel  $\mathbf{A}$ ).

■ **Věta 13.10.** a) Necht' všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  mají zápornou reálnou část. Potom nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je asymptoticky stabilní.

b) Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  kladnou reálnou část, potom nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní.

c) Mají-li všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  nekladnou reálnou část a všechna vlastní čísla s nulovou reálnou částí jsou jednoduchá, nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní.

**Poznámky 13.11.** a) Předcházející tvrzení není těžké dokázat, zamysleme-li se, jak vypadá obecné řešení soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  (viz podsekcce 12.1).

b) Předchozí tvrzení neříká nic o situaci, když vlastní číslo s nulovou reálnou částí má násobnost větší než jedna. V takovém případě může být řešení stabilní i nestabilní, záleží na defektu<sup>2</sup> matice  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ .

<sup>2</sup>Připomeňme, že defekt  $d(\mathbf{M})$  čtvercové matice  $\mathbf{M}$  je počet řádků této matice mínus její hodnost. Je-li  $\lambda$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ , pak

Přesněji, platí: je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$  roven násobnosti vlastního čísla, pak  $\mathbf{y}^e$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní; je-li  $d(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$  menší než násobnost vlastního čísla, tak je toto řešení nestabilní.

V závislosti na znaménkách vlastních čísel (resp. znaménkách reálných částí vlastních čísel - pokud jsou tato komplexní) matice soustavy se pro nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e$  užívá určité terminologie, která souvisí s tvarem trajektorií v okolí bodu rovnováhy ve fázovém prostoru. Proberme nyní podrobně případ  $n = 2$  (tj. SLODR1 o dvou rovnicích).

a) Jsou-li vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  matice soustavy  $\mathbf{A}$  reálná a:

- (i)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je asymptoticky stabilní a řekneme, že tvoří *přitahující uzel*, viz obrázek 13.2 vlevo;
- (ii)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní a řekneme, že tvoří *odpuzující uzel*, viz obrázek 13.2 vpravo;
- (iii)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  (nebo  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ), potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní a řekneme, že tvoří *sedlo*, viz obrázek 13.3;
- (iv)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$  (nebo  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ ), potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní (v tomto případě pro  $\mathbf{y}^e$  nemáme zvláštní označení);
- (v)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$  (nebo  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ), potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní (pro  $\mathbf{y}^e$  opět nemáme zvláštní označení);
- (vi)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , potom, je-li defekt matice  $\mathbf{A}$  roven dvěma, tak bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní, je-li defekt matice  $\mathbf{A}$  roven jedné, tak bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní (pro tyto dva případy opět nemáme zvláštní označení).

b) Jsou-li  $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$  ( $b > 0$ ) komplexně sdružená vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  a:

- (i)  $a < 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je asymptoticky stabilní a řekneme, že tvoří *přitahující ohnisko*, viz obrázek 13.6 vlevo;
- (ii)  $a > 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní a řekneme, že tvoří *odpuzující ohnisko*, viz obrázek 13.6 vpravo;
- (iii)  $a = 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní, a řekneme, že tvoří *střed*, viz obrázek 13.7.

**Příklad 13.12.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + 2y_2, \\y_2' &= -y_1 - 4y_2.\end{aligned}$$

**Řešení.** Charakteristická rovnice  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$  (připomeňme, že  $\text{tr}(\mathbf{A})$  značí stopu matice  $\mathbf{A}$ , což je součet prvků na hlavní diagonále) má v našem případě tvar  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ . Jejimi kořeny jsou  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$  a tedy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  je asymptoticky stabilní. Trajektorie řešení (včetně směrového pole) ve fázovém prostoru jsou znázorněny na obrázku 13.2 vlevo.

**Příklad 13.13.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 5y_1 + 2y_2, \\y_2' &= -y_1 + 2y_2.\end{aligned}$$

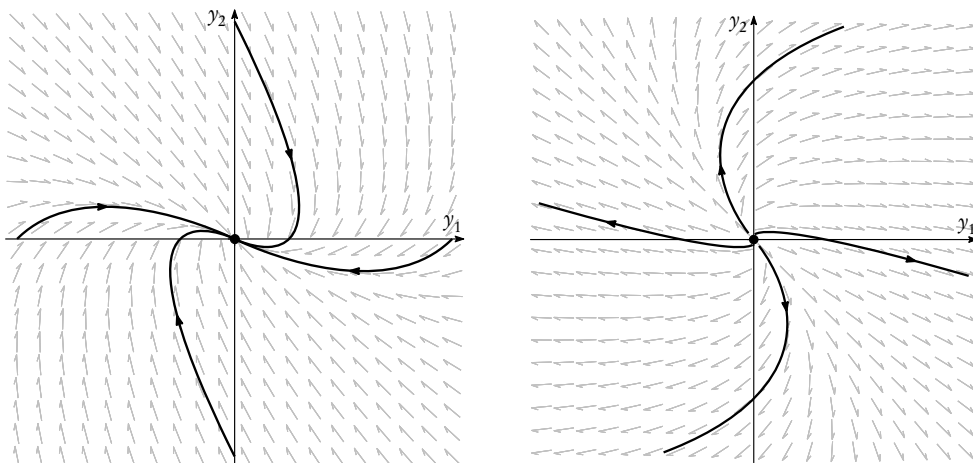
**Řešení.** Charakteristická rovnice soustavy je  $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ . Ta má kořeny  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$ , a nulové řešení  $\mathbf{y}^e$  tedy není stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.2 vpravo.

**Příklad 13.14.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + 2y_2, \\y_2' &= 2y_1 - y_2.\end{aligned}$$

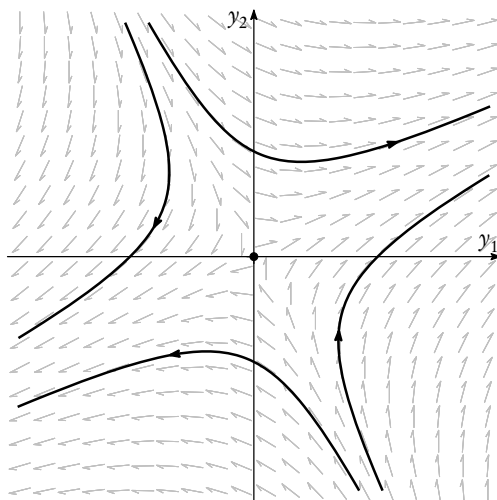
---

$d(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$  vyjadřuje maximální počet lineárně nezávislých vlastních vektorů, které můžeme nalézt k vlastnímu číslu  $\lambda$ . Poznamenejme ještě, že  $d(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$  nemůže být vyšší než násobnost vlastního čísla.



Obrázek 13.2: Nulový bod rovnováhy tvořící přitahující (vlevo) a odpuzující (vpravo) uzel

*Řešení.* Vlastní čísla matice soustavy jsou v tomto případě  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -2$ , nulový bod rovnováhy tedy není stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.3.



Obrázek 13.3: Nulový bod rovnováhy tvořící sedlo

**Příklad 13.15.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

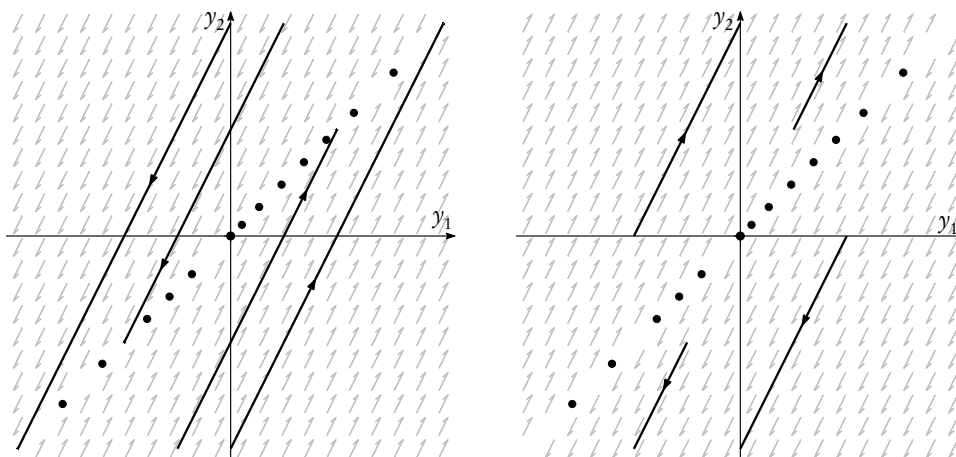
$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - 2y_2.\end{aligned}$$

*Řešení.* Vlastní čísla matice soustavy jsou v tomto případě  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Tedy nulový bod rovnováhy je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.4 vlevo. Všimněme si, že nulové řešení zde není jediným bodem rovnováhy, soustava má nekonečně mnoho bodů rovnováhy, tyto leží na přímce o rovnici  $y_2 = y_1$ .

**Příklad 13.16.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + y_2, \\ y_2' &= -2y_1 + 2y_2.\end{aligned}$$

*Řešení.* Vlastní čísla matice soustavy jsou v tomto případě  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ , nulový bod rovnováhy je tedy nestabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 13.4 vpravo. Opět, soustava má nekonečně mnoho bodů rovnováhy ležících na přímce o rovnici  $y_2 = y_1$ .



Obrázek 13.4: Stabilní a nestabilní nulový bod rovnováhy pro  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$

**Příklad 13.17.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= y_1 - y_2.\end{aligned}$$

*Řešení.* Matice soustavy má nyní dvojnásobné nulové vlastní číslo  $\lambda_{1,2} = 0$ , přičemž ale defekt této matice je 1. Nulový bod rovnováhy je tedy nestabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.5 (bodů rovnováhy je opět nekonečně mnoho a leží na přímce o rovnici  $y_2 = y_1$ ).

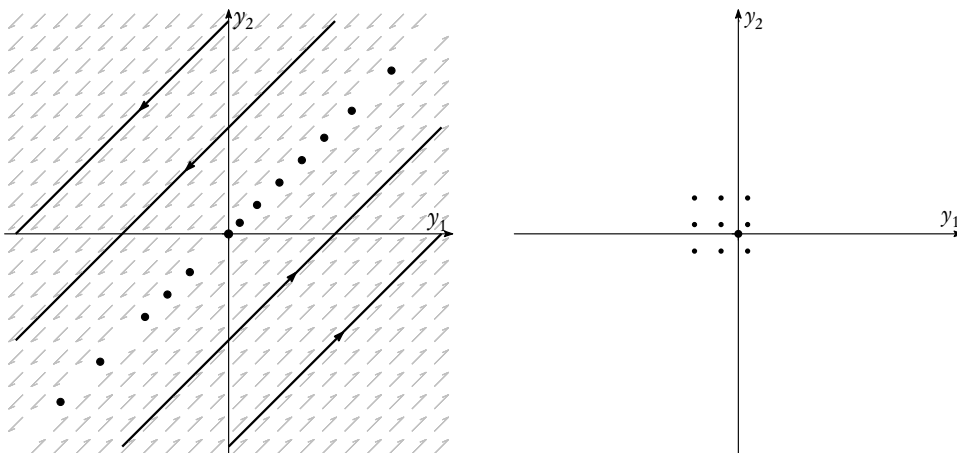
**Příklad 13.18.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 0, \\ y_2' &= 0.\end{aligned}$$

*Řešení.* Matice soustavy má nyní dvojnásobné nulové vlastní číslo  $\lambda_{1,2} = 0$  s defektem dva. Nulový bod rovnováhy je tedy stabilní, nikoliv ale asymptoticky stabilní. Protože soustava má zřejmě konstantní řešení, trajektorie tvoří ve fázovém prostoru body. Jinak řečeno, každé řešení je bodem rovnováhy, viz obrázek 13.5 vpravo.

**Příklad 13.19.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + 4y_2, \\ y_2' &= -y_1 - y_2.\end{aligned}$$



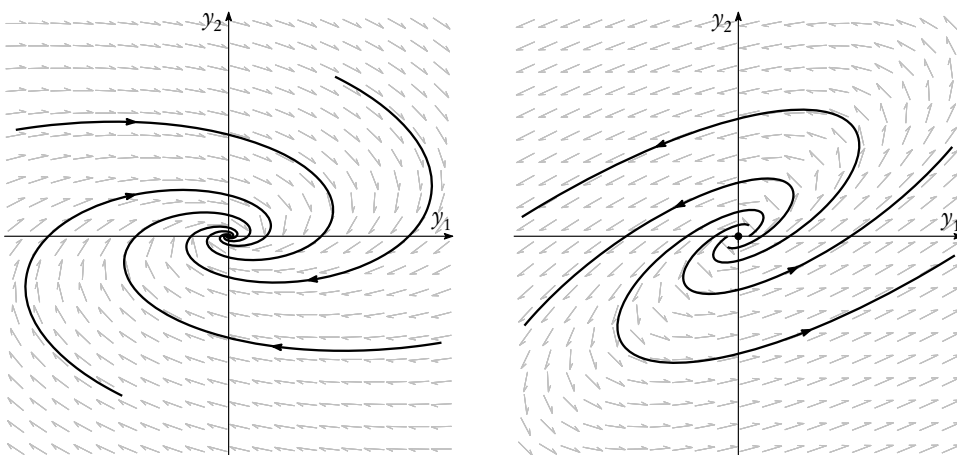
Obrázek 13.5: Pro  $\lambda_{1,2} = 0$  je při defektu matice soustavy jedna nulový bod rovnováhy nestabilní a při defektu matice dva je stabilní, avšak nikoliv asymptoticky stabilní

*Řešení.* Vlastní čísla matice soustavy jsou  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ . Protože je reálná část záporná, je nulový bod rovnováhy asymptoticky stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.6 vlevo.

**Příklad 13.20.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2. \end{aligned}$$

*Řešení.* Vlastní čísla matice soustavy jsou  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ . Protože je reálná část kladná, je nulový bod rovnováhy nestabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.6 vpravo.



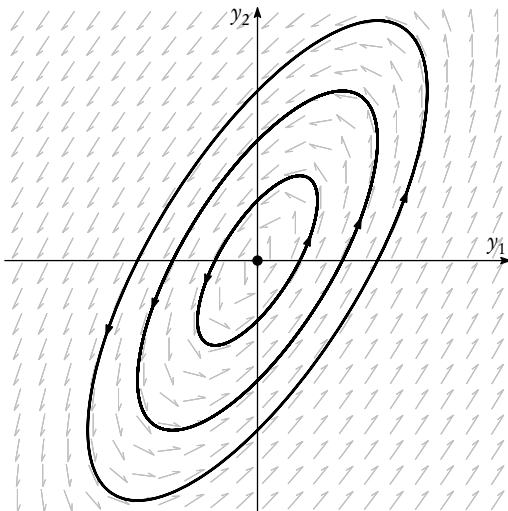
Obrázek 13.6: Nulový bod rovnováhy tvořící přitahující a odpuzující ohnisko

**Příklad 13.21.** Vyšetřeme stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$y_1' = 2y_1 - 2y_2,$$

$$y_2' = 4y_1 - 2y_2.$$

*Řešení.* Vlastní čísla matice soustavy jsou  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ , a tedy nulový bod rovnováhy je stabilní, nikoliv však asymptoticky stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 13.7.



Obrázek 13.7: Nulový bod rovnováhy tvořící střed

Vyšetřování stability na základě znaménka reálné části vlastních čísel matice soustavy je snadné v případě soustavy dvou rovnic, což demonstrovaly předcházející příklady. V případě soustavy o  $n$  rovnicích vede hledání vlastních čísel na hledání kořenů polynomu stupně  $n$ . Pro polynomy stupně  $n = 3$  a  $4$  ještě existují vzorce pro výpočet kořenů pomocí jeho koeficientů (značně komplikované), obecný vzorec pro polynomy stupně 5 a výše již neexistuje. Z tohoto důvodu vyvstává otázka, zda nelze o znaménku reálné části kořene polynomu rozhodnout jinak. Omezíme-li se na záporné reálné části (tj. případ asymptotické stability), odpověď je kladná a je formulována v následujícím kritériu.

■ **Věta 13.22 — Routhovo–Hurwitzovo kritérium.** *Bud'  $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$  polynom a*

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

*tzv. Hurwitzova matice, přičemž v této matici klademe  $a_k = 0$  pro všechny indexy  $k > n$ . Dále označme*

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad H_n = \det(\mathbf{H}_n).$$

*Potom všechny kořeny polynomu  $P_n(\lambda)$  mají zápornou reálnou část, právě když všechny determinanty  $H_1, \dots, H_n$  jsou kladné. Je-li alespoň jeden z těchto determinantů záporný, potom  $P_n(\lambda)$  má kořen s kladnou reálnou částí.*

**Příklad 13.23.** Rozhodněme o stabilitě nulového bodu rovnováhy soustavy

$$y_1' = y_1 + y_2 - 2y_3,$$

$$\begin{aligned}y_2' &= -2y_1 + 3y_2 - y_3, \\y_3' &= 2y_1 + y_2 - 3y_3.\end{aligned}$$

*Řešení.* Charakteristická rovnice je  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0$ , neboli (po vynásobení  $-1$ )

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Vzhledem ke značení věty 13.22 je v polynomu na levé straně  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3 = 0$  (dodatečně koeficienty  $a_4, a_5$  klademe nulové) a Hurwitzova matice má tvar

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé subdeterminanty (minory) pak jsou

$$H_1 = \det(-1) = -1, \quad H_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2, \quad H_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Protože determinant  $H_1$  je záporný, charakteristický polynom má podle věty 13.22 určitě kořen s kladnou reálnou částí, a tudíž nulový bod rovnováhy je podle věty 13.10 nestabilní.

**Poznámky 13.24.** a) Pojem stability řešení lze v obdobném smyslu zavést a zkoumat i v případě ODR $n$ . To není překvapující informace, neboť již víme, že každou ODR $n$  v normálním tvaru lze převést na odpovídající SODR1. Speciálně, každou homogenní LODR $n$  s konstantními koeficienty lze převést na homogenní SLODR1 s konstantními koeficienty, přičemž charakteristický polynom zůstává stejný. V tomto smyslu tedy lze také aplikovat výše uvedené Routhovo–Hurwitzovo kritérium na vyšetřování asymptotické stability nulového řešení homogenní LODR $n$  s konstantními koeficienty.

b) Pokud bychom uvažovali nehomogenní SLODR1 s konstantními koeficienty, tj. soustavu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

kde vektorová funkce  $\mathbf{f}$  není rovna identicky nule, potom nulové řešení přestává být bodem rovnováhy (jak jsme již několikrát zmínili, pravá strana  $\mathbf{b}$  hraje roli „silového“ členu působícího na soustavu – toto působení nedovoluje nabýt soustavě rovnovážného stavu). Nicméně, lze snadno ukázat, že libovolné řešení této nehomogenní soustavy je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní (ve smyslu definice 13.1), pokud nulové řešení příslušné homogenní soustavy je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

c) Na závěr poznamenejme, že složitější situace nastane při vyšetřování stability bodů rovnováhy nelineárních autonomních soustav. Přímé použití definice stability zde není příliš praktické, poněvadž je vázáno na znalost řešení počáteční úlohy (13.2) pro každý počáteční vektor  $\boldsymbol{\eta}$  (nebo alespoň pro vektory  $\boldsymbol{\eta}$  blízké bodu rovnováhy  $\mathbf{y}^e$ ). Analyticky určit toto řešení lze pouze v několika málo speciálních případech; např. jsme byli úspěšní v příkladu 13.3, kde se však jednalo pouze o jednu rovnici a ne o soustavu rovnic. Podobně jako u lineárních soustav je tedy žádoucí mít k dispozici nějaké kritérium, pomocí kterého by bylo možné o stabilitě daného bodu rovnováhy rozhodnout (aniž bychom odpovídající řešení potřebovali znát). Jednou z možností jak postupovat, je danou soustavu linearizovat, tj. namísto nelineární soustavy vyšetřovat aproximující lineární soustavu, která je v jistém smyslu blízká původní soustavě v okolí bodu rovnováhy. U této nové lineární soustavy již můžeme vyšetřovat stabilitu na základě analýzy znamének reálných částí vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  (tedy i s případným použitím Routhova–Hurwitzova kritéria). Opodstatnění tohoto linearizačního postupu, stejně jako způsob, kterým lineární soustavu přiřadíme, jde však nad rámec našeho výkladu.

## Příklady k procvičení

**Cvičení 13.25.** Vyšetřete stabilitu nulového řešení následujících soustav:

- a)  $y_1' = -y_1, y_2' = 0$  (zde načrtněte také trajektorie řešení);  
 b)  $y_1' = y_1 + 2y_2 - y_3, y_2' = 3y_2 - y_3, y_3' = -2y_3$ .

**Výsledky.** a) Stabilní, ale ne asymptoticky stabilní (trajektorie jsou přímky rovnoběžné s osou  $y_1$  směřující k ose  $y_2$ ); b) nestabilní.

**Cvičení 13.26.** S využitím Routhova–Hurwitzova kritéria rozhodněte o stabilitě nulového bodu rovnováhy soustavy  $y_1' = -4y_1 + 2y_2 + 5y_3, y_2' = 6y_1 - y_2 - 6y_3, y_3' = -8y_1 + 3y_2 + 9y_3$ .

**Výsledky.** Nestabilní.

## 14 Okrajová úloha pro lineární ODR2

Až dosud jsme se zabývali ODR a počátečními úlohami pro ODR. Nyní obrátíme pozornost k úlohám okrajovým (připomeňme, že úvodní poznámka k tomuto tématu byla zmíněna již v podsekcí 5.2). Pro jednoduchost se zaměříme pouze na LODR2 a budeme diskutovat zejména tyto problémy: Je okrajová úloha pro LODR2 vždy jednoznačně řešitelná? Může mít otázka existence a jednoznačnosti řešení okrajové úlohy také nějaký praktický význam?

### 14.1 Základní pojmy

V podsekcí 7.2 jsme zavedli pojem lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu, která je pro  $n = 2$  tvaru

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \quad (14.1)$$

Jsou-li funkce  $a_1, a_0, b$  spojité na daném intervalu  $I$ , pak podle věty 7.8 existuje právě jedno řešení rovnice (14.1) splňující počáteční podmínky

$$y(x_0) = \xi_0, \quad y'(x_0) = \xi_1,$$

kde  $x_0$  je libovolný bod daného intervalu a  $\xi_0, \xi_1$  jsou libovolná reálná čísla. Toto řešení je navíc definováno v celém intervalu  $I$ .

Počáteční podmínky, jednoznačně vymezující hledané řešení, jsou tedy dány v jednom bodě. Často je však třeba řešit diferenciální rovnice s podmínkami, které předepisují hodnoty řešení v různých bodech. Hledáme-li např. průhyb nosníku, řešíme příslušnou diferenciální rovnici s podmínkami, které charakterizují uložení nosníku na jeho koncích. Tyto podmínky pak nazýváme *okrajovými podmínkami*. Lze je popsat vztahy

$$\begin{aligned} \alpha y(v) + \beta y'(v) &= y_v, \\ \gamma y(w) + \delta y'(w) &= y_w, \end{aligned} \quad (14.2)$$

kde  $v, w$  jsou zpravidla koncové body intervalu, v němž hledáme řešení a  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, y_v, y_w$  jsou daná čísla vyhovující podmínce

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad |\gamma| + |\delta| \neq 0$$

(tj. alespoň jedno z čísel  $\alpha, \beta$  a alespoň jedno z čísel  $\gamma, \delta$  je různé od nuly).

Úlohu určit funkci  $y = y(x)$  vyhovující pro  $x \in (v, w)$  rovnici (14.1) a splňující okrajové podmínky (14.2) nazýváme *okrajovou úlohou*. Je přitom přirozené předpokládat, že funkce  $y$  je spojitá v uzavřeném intervalu  $[v, w]$  (tedy včetně krajních bodů).

Jestliže  $y_v = y_w = 0$ , pak podmínky (14.2) nazveme *homogenními okrajovými podmínkami*; v opačném případě (tj. je-li alespoň jedna z hodnot  $y_v, y_w$  různá od nuly) hovoříme o *nehomogenních okrajových podmínkách*.

Poznamenejme, že okrajovou úlohu lze zavést i pro obecnou ODR $n$ . Veškeré další úvahy však budeme pro jednoduchost provádět pouze pro výše zmíněnou LODR2, příp. její modifikace.

## 14.2 Typy okrajových podmínek a otázka řešitelnosti okrajových úloh

Nejjednodušším speciálním případem okrajových podmínek (14.2) jsou tzv. *Dirichletovy podmínky*

$$y(v) = y_v, \quad y(w) = y_w, \quad (14.3)$$

kteřé dostaneme, volíme-li v (14.2)  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = \delta = 0$ . Dalším speciálním případem podmínek (14.2) (pro  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta = \delta = 1$ ) jsou tzv. *Neumannovy podmínky*

$$y'(v) = y_v, \quad y'(w) = y_w.$$

Obecné podmínky (14.2) s nenulovými čísly  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nazýváme *Newtonovými podmínkami* (též *Robinovými*). Uvedené podmínky lze také kombinovat. Např. úloha řešit rovnici (14.1) s okrajovými podmínkami

$$y(v) = y_v, \quad y'(w) = y_w$$

se někdy nazývá *smíšená úloha*.

Řešení úloh s okrajovými podmínkami je obecně složitější než řešení úloh s podmínkami počátečními. Jednoduché nejsou ani otázky existence a jednoznačnosti řešení dané okrajové úlohy. Následující příklad ilustruje skutečnost, že odpověď na otázku řešitelnosti okrajové úlohy může být i v jednoduchém případě značně různorodá.

**Příklad 14.1.** Vyšetříme několik okrajových úloh pro rovnici

$$y'' + y = 0. \quad (14.4)$$

Obecné řešení rovnice (14.4) je dáno vztahem

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (14.5)$$

a je tedy definováno pro všechna reálná  $x$ . V další části předepíšeme různé okrajové podmínky Dirichletova typu a budeme zkoumat řešitelnost příslušných okrajových úloh.

a) Nejprve vyřešíme rovnici (14.4) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0. \quad (14.6)$$

Dosazením podmínek (14.6) do obecného řešení (14.5) obdržíme

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 1, \\ C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Řešitelnost této soustavy je ekvivalentní s řešitelností okrajové úlohy (14.4), (14.6). Snadno vidíme, že jediným řešením dané soustavy je dvojice  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . Okrajová úloha (14.4), (14.6) tedy má jediné řešení

$$y(x) = \cos x.$$

b) Nyní volíme okrajové podmínky

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \quad (14.7)$$

Podobně jako v části a) dospějeme k soustavě

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 1, \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi &= 0, \end{aligned}$$

kteřá nemá řešení (neboť z uvedených rovnic plyne  $C_1 = 1$  a současně  $C_1 = 0$ ), a proto ani okrajový problém (14.4), (14.7) nemá řešení.

c) Řešíme rovnici (14.4) s homogenními okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (14.8)$$

Tyto podmínky vedou na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 0, \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi &= 0, \end{aligned}$$

kteřá má nekonečně mnoho řešení:  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  libovolné. Proto má i okrajová úloha (14.4), (14.8) nekonečně mnoho řešení tvaru

$$y(x) = C_2 \sin x, \quad C_2 \text{ libovolné.}$$

**Poznámka 14.2 – o řešitelnosti okrajových úloh s Dirichletovými podmínkami.** Z předcházejících příkladů je patrné, že otázka řešitelnosti dané okrajové úlohy úzce souvisí s řešitelností příslušné lineární soustavy pro  $C_1, C_2$ , která vznikla dosazením okrajových podmínek do vyjádření obecného řešení. Tuto úvahu je možné obecněji pro případ rovnice (14.1) zachytit takto:

Užitím známé strukturní formule dostáváme, že rovnice (14.1) má obecné řešení

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + y_p(x),$$

kde funkce  $u_1, u_2$  tvoří fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice a  $y_p$  je nějaké partikulární řešení (14.1). Po dosazení Dirichletových okrajových podmínek (14.3) máme

$$\begin{aligned} C_1 u_1(v) + C_2 u_2(v) + y_p(v) &= y_v, \\ C_1 u_1(w) + C_2 u_2(w) + y_p(w) &= y_w, \end{aligned} \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} u_1(v) & u_2(v) \\ u_1(w) & u_2(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_v - y_p(v) \\ y_w - y_p(w) \end{pmatrix}.$$

Je-li matice této lineární soustavy regulární (tj. její determinant je nenulový), pak má tato soustava jediné řešení  $C_1, C_2$  (pro libovolné hodnoty  $y_v, y_w$ ). Je-li tato matice singulární, pak soustava buď nemá řešení, nebo jich má nekonečně mnoho (podle Frobeniovy věty to závisí na tom, zda hodnota matice soustavy je nebo není rovna hodnotě rozšířené matice soustavy – záleží tedy také na hodnotách  $y_v, y_w$ ).

Samozřejmě, takto můžeme posoudit otázku existence a jednoznačnosti řešení dané okrajové úlohy pouze tehdy, když umíme určit fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice. V opačném případě (např. má-li rovnice (14.1) nekonečné koeficienty) je diskuse existence a jednoznačnosti řešení okrajové úlohy podstatně složitější. Nicméně, za určitých předpokladů lze o jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy přece jen něco říci. Platí totiž následující tvrzení.

■ **Věta 14.3.** *Nechť funkce  $a_1, a_0, b$  jsou spojité na intervalu  $(v, w)$  a  $a_0$  je zde navíc záporná. Potom okrajová úloha (14.1), (14.3) má jediné řešení pro libovolné hodnoty  $y_v, y_w \in \mathbb{R}$ .*

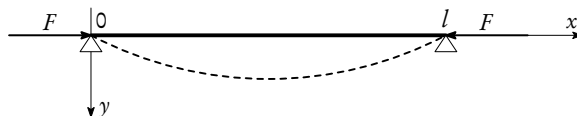
**Poznámky 14.4.** a) Všimněme si, že v příkladu 14.1 nebyl splněn předpoklad  $a_0(x) < 0$  na uvažovaných intervalech.

b) Obdobnou diskusi řešitelnosti okrajové úlohy s rovnicí 14.1 můžeme provést i pro ostatní typy okrajových podmínek.

Předcházející příklady ilustrovaly, že ani ve velmi jednoduchém lineárním případě nemusí mít okrajový problém žádné řešení, příp. jich může mít nekonečně mnoho. S podobnými výsledky jsme se při řešení diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami nesetkali. Může tedy vzniknout dojem, že případy, kdy řešení dané okrajové úlohy neexistuje, příp. není určeno jednoznačně, nepopisují žádný rozumný fyzikální jev či technický problém, a jsou proto nezajímavé. Na následujícím příkladu budeme demonstrovat skutečnost, že tomu tak ve skutečnosti není. Ukážeme, že právě tyto „problematické“ případy jsou velmi důležité, neboť na jejich základě se získávají různé kritické hodnoty (např. pro zatížení nosných sloupů apod.).

**Příklad 14.5 — úloha vzpěrné pružnosti.** Uvažujme pružnou dokonale přímou tyč délky  $l$ , která je na koncích prostě uložena a namáhána na vzpěr silou  $F$  působící v ose tyče. Na obrázku 14.1 je vyznačena volba systému souřadnic  $x, y$ , kde  $y = y(x)$  je průhyb tyče v místě  $x$ .

Zvyšujeme-li postupně sílu  $F$  až do určité meze, zůstává tyč stále přímá. Jakmile osová síla  $F$  dosáhne této meze, tyč se může vychýlit. V této souvislosti se budeme zajímat nejen o nalezení průhybové křivky,



Obrázek 14.1: Tyč namáhaná silou na vzpěr

ale především o stanovení zmíněné mezní hodnoty  $F$ . Tato hodnota se v teorii pružnosti nazývá *kritická hodnota síly*  $F$  a značí se zpravidla symbolem  $F_{\text{kr}}$ .

K tomu, abychom mohli příslušnou diskusi provést, je třeba nejprve sestavit diferenciální rovnici pro hledaný průhyb tyče. Označme  $E = E(x)$  modul pružnosti v tahu v bodě  $x$ ,  $J = J(x)$  kvadratický moment průřezu tyče vzhledem k ohybové ose a  $M = M(x, y)$  ohybový moment v bodě  $(x, y)$ . Uvažujeme-li pouze malé průhyby, pak na základě Hookeova zákona pro deformaci v ohybu dostáváme (po jistých zjednodušeních) rovnici pro hledaný průhyb ve tvaru

$$-EJy'' = M.$$

Ohybový moment  $M$  je v případě síly  $F$  kolmé na  $y$  dán vztahem

$$M(x, y) = Fy.$$

Porovnáním obou předcházejících vztahů lze rovnici průhybové čáry psát (pro  $E, J$  konstantní) ve tvaru

$$y'' + a^2y = 0, \quad \text{kde } a = \sqrt{\frac{F}{EJ}}, \quad x \in (0, l). \quad (14.9)$$

K této rovnici ještě přistupují homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad (14.10)$$

neboť v koncových bodech tyče je průhyb nulový.

Nyní vyřešíme okrajovou úlohu (14.9), (14.10). Obecné řešení rovnice (14.9) je podle sekce 8 tvaru

$$y(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením okrajových podmínek (14.10) do obecného řešení dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_1 \cos al + C_2 \sin al &= 0, \end{aligned}$$

kteřá má vždy nulové řešení (tj.  $C_1 = C_2 = 0$ ). Vskutku,  $y(x) = 0$  je triviální řešení okrajové úlohy, tj. tyč může zůstat při jakékoli velikosti síly  $F$  přímá. Aby soustava měla i nenulové řešení, musí být

$$\sin al = 0.$$

Je-li tedy  $al = k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tj.

$$a = \frac{k\pi}{l},$$

bude mít okrajová úloha (14.9), (14.10) také nenulová řešení; budou jimi funkce

$$y(x) = C_2 \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Kritickými silami jsou zřejmě hodnoty  $F = EJ(k\pi/l)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Nejmenší kritickou silou, při níž může dojít k průhybu tyče, tedy je

$$F_{\text{kr}} = EJ \left( \frac{\pi}{l} \right)^2. \quad (14.11)$$

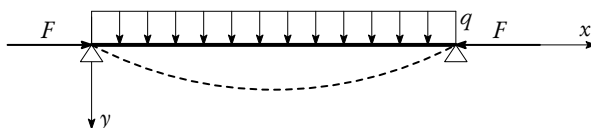
Všimněme si dále, že odpovídající průhybové čáry jsou dány nejednoznačně, neboť konstanta  $C_2$  je libovolná.

Rozšířme nyní naši úlohu v tom smyslu, že tyč bude vertikálně zatížena rovnoměrným zatížením  $q$  (viz obrázek 14.2). Ohybový moment  $M$  pak lze vyjádřit jako

$$M(x, y) = Fy + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

a rovnice průhybové čáry nabývá tvaru

$$y'' + a^2y = bx^2 + cx, \quad \text{kde } a = \sqrt{\frac{F}{EJ}}, \quad b = \frac{q}{2EJ}, \quad c = -\frac{ql}{2EJ}. \quad (14.12)$$



Obrázek 14.2: Tyč namáhaná silou na vzpěr a navíc rovnoměrně vertikálně zatížená

Protože okrajové podmínky (14.10) zůstávají nezměněny, řešíme okrajovou úlohu (14.12), (14.10). Rovnice (14.12) je nehomogenní LODR2 s konstantními koeficienty. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je podle předcházející části dáno vztahem

$$y_h(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

Partikulární řešení  $y_p$  budeme hledat pomocí metody neurčitých koeficientů (viz podsekcce 8.2) ve tvaru

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Dosazením tohoto vztahu do (14.12) a porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné  $x$  dostáváme

$$A = \frac{b}{a^2}, \quad B = \frac{c}{a^2}, \quad C = -\frac{2b}{a^4}.$$

Obecné řešení rovnice (14.12) je tedy tvaru

$$y(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{c}{a^2}x - \frac{2b}{a^4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní přistoupíme k určení řešení rovnice (14.12) vyhovujícího podmínkám (14.10).

Dosazením podmínky  $y(0) = 0$  obdržíme vyjádření  $C_1 = 2b/a^4$ , tedy

$$y(x) = \frac{2b}{a^4} \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{c}{a^2}x - \frac{2b}{a^4}.$$

Dosazením podmínky  $y(l) = 0$  dostáváme

$$0 = \frac{2b}{a^4} \cos al + C_2 \sin al + \frac{b}{a^2}l^2 + \frac{c}{a^2}l - \frac{2b}{a^4}.$$

Ze vztahů pro  $a$ ,  $b$ ,  $c$  uvedených v (14.12) však plyne

$$\frac{b}{a^2}l^2 + \frac{c}{a^2}l = 0,$$

a tedy

$$C_2 \sin al = \frac{2b}{a^4} (1 - \cos al). \quad (14.13)$$

Je-li  $\sin al \neq 0$ , pak

$$C_2 = \frac{2b}{a^4} \frac{1 - \cos al}{\sin al}$$

a hledaný průhyb tyče je tvaru

$$y(x) = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x + \frac{2b}{a^4} (\cos ax - 1) + \frac{2b}{a^4} \frac{1 - \cos al}{\sin al} \sin ax. \quad (14.14)$$

Je-li však  $\sin al = 0$  (tj.  $al = k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ), pak je situace zcela odlišná. Zaměříme se na nejzajímavější případ, kdy  $al = \pi$ . Protože  $\cos al = -1$ , nelze obecnou konstantu  $C_2$  ze vztahu (14.13) vůbec určit; okrajová úloha (14.12), (14.10) tedy nemá žádné řešení. Všimněme si přitom, že volba  $al = \pi$  odpovídá případu, kdy osová síla  $F$  nabývá své kritické hodnoty  $F_{kr}$  (viz vztah (14.11)).

Získané výsledky lze nyní interpretovat takto: Je-li hodnota osové síly  $F$  menší než kritická hodnota  $F_{kr}$ , pak  $0 < al < \pi$  a průhyb tyče je dán jednoznačně vztahem (14.14). Blíží-li se  $F$  k  $F_{kr}$ , pak se hodnota  $al$  blíží k  $\pi$ , a tedy  $\sin al$  se blíží (kladnými hodnotami) k nule. Pak ovšem roste pravá strana vztahu (14.14) (a tím i hledaný průhyb) nade všechny meze a při  $F = F_{kr}$  se stává průhyb „nekonečný“, tyč praskne.

Poznamenejme, že výše provedené úvahy slouží především k ilustraci problémů, které se řeší v rámci okrajových úloh. Vzhledem k provedeným zjednodušením totiž okrajová úloha (14.9), (14.10), resp. (14.12), (14.10) popisuje fyzikální situaci jen ve velmi hrubých rysech. Pro přesnější popis musíme uvažovat místo (14.9), resp. (14.12) jiná vyjádření, např. pomocí nelineárních rovnic typu

$$y'' + a^2(1 + [y']^2)^{3/2} = 0.$$

## Příklady k procvičení

**Cvičení 14.6.** Vyřešte následující okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \text{a) } y'' - y &= 0, & y(0) &= 0, & y(2\pi) &= 0; \\ \text{b) } y'' - 4y &= 0, & y(0) &= 0, & y'(1) &= 1/2. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $y(x) = \sinh x / \sinh 2\pi$ ; b)  $y(x) = \sinh 2x / (4 \cosh 2)$ .



## Kapitola 3

# Parciální diferenciální rovnice

V předcházející kapitole jsme se výhradně zabývali obyčejnými diferenciálními rovnicemi, kde neznámou byla funkce jedné proměnné. Tato nezávisle proměnná měla v aplikacích nejčastěji význam času, nebo délky. Lze si však jednoduše představit situaci, kdy neznámá funkce závisí současně jak na časové, tak i délkové souřadnici, případně hledaná funkce může záviset na několika délkových (např. prostorových) souřadnicích. Matematicky vyjádřeno, v takových případech neznámá funkce závisí na dvou či více proměnných, a příslušná diferenciální rovnice tedy obsahuje parciální derivace této hledané funkce. Takové diferenciální rovnice nazýváme *parciálními* (PDR) a jejich studiu se budeme věnovat v závěrečných sekcích tohoto učebního textu.

### 15 Základní pojmy

V této úvodní sekci se zaměříme na základní pojmy teorie PDR a jejich případné analogie s odpovídajícími pojmy zavedenými v kapitole věnované ODR. Zaměříme se na tyto otázky: Jak vypadá obecný tvar PDR? V jakém smyslu chápeme její řešení a jaké má druhy řešení? Co je počáteční a okrajová úloha pro PDR?

#### 15.1 Pojem PDR a jejího řešení

Obecný tvar parciální diferenciální rovnice řádu je

$$F(x_1, \dots, x_N, u, u'_{x_1}, \dots, u'_{x_N}, u''_{x_1 x_2}, \dots, u''_{x_N x_N}, \dots, x_{x_N \dots x_N}^{(k)}) = 0, \quad (15.1)$$

kde  $u = u(x_1, \dots, x_N)$  je hledaná funkce. Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, pak určuje *řád* této rovnice.

Je-li rovnice (15.1) lineární vzhledem ke hledané funkci a jejím derivacím, pak tuto PDR nazveme *lineární* (LPDR). Speciálně, LPDR prvního řádu (LPDR1) v rovině, kde neznámou je funkce  $u = u(x, y)$ , tedy lze vyjádřit v obecném tvaru

$$a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y + c(x, y)u = d(x, y), \quad (15.2)$$

kde  $a, b, c, d$  jsou dané funkce dvou proměnných. V souladu s terminologií zavedenou pro lineární ODR nazveme rovnici (15.2) *homogenní*, je-li funkce  $d$  identicky nulová na příslušném oboru. V opačném případě ji nazveme *nehomogenní*. Tyto pojmy se pak snadno rozšíří na případ obecné LPDR (zahrnující také lineární rovnice vyššího řádu, příp. lineární rovnice ve vyšší dimenzi).

Parciální diferenciální rovnice a jejich soustavy jsou matematickým modelem mnoha fyzikálních a technických úloh. Nejzákladnější z nich zmíníme v sekci 17. Pro některé jednodušší úlohy lze řešení nalézt exaktně, často alespoň ve tvaru nekonečné řady (viz podsekcce 17.4). Převážnou většinu těchto úloh však dovedeme řešit pouze přibližně, užitím vhodné numerické metody. Tyto otázky jdou nad rámec našeho výkladu.

V dalším nejprve upřesníme, co rozumíme řešením dané PDR, a na základě analogie s ODR pak zavedeme některé související pojmy.

**Definice 15.1 — řešení PDR.** Řešením rovnice (15.1) v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  nazveme spojitou funkci, která má v  $\Omega$  spojitě všechny potřebné parciální derivace a která dosazena zároveň s těmito derivacemi do (15.1) vyhovuje pro všechna  $(x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  této rovnici.

**Poznámka 15.2.** V definici se hovoří o spojitosti všech potřebných derivací, tj. těch derivací, které se v rovnici vyskytují. Často se však požaduje, aby funkce (která je řešením PDR) měla spojitě i ty derivace (až do řádu rovnice), které se v rovnici nevyskytují. V takovém případě hovoříme o *klasickém řešení*.

**Příklady 15.3.** a) Rovnice

$$u'_x + u'_y = 0 \quad (15.3)$$

je homogenní LPDR1 s konstantními koeficienty. Snadno se přesvědčíme, že „uhádnout“ nějaké její řešení není složité. Stačí vymyslet příklad funkce  $u = u(x, y)$ , pro niž  $u'_x = 1$ ,  $u'_y = -1$ . Tuto vlastnost má např. funkce

$$u(x, y) = x - y.$$

Nyní snadno ověříme, že tato funkce je skutečně řešením rovnice (15.3) na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

b) Uvažujme homogenní LPDR2 ve tvaru

$$u''_{xy} = 0. \quad (15.4)$$

I pro tuto rovnici nebude problém nalézt nějaké její řešení. Dvojitým integrováním této rovnice (nejprve podle proměnné  $y$  a poté podle  $x$ ) zjistíme, že řešením (15.4) je každá funkce tvořená součtem libovolné všude spojitě diferencovatelné funkce proměnné  $x$  a libovolné všude spojitě diferencovatelné funkce proměnné  $y$ . Tedy např. funkce

$$u(x, y) = x + y$$

je řešením (15.4) na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

## 15.2 Otázka obecného řešení

Rovnice (15.3), (15.4), nebo obecně (15.1) pokládáme za vyřešené, známe-li všechna jejich řešení. V případě obyčejných diferenciálních rovnic jsme libovolné řešení dané rovnice zpravidla získali z obecného řešení pomocí vhodné volby konstant (výjimku v tomto směru tvořila pouze výjimečná řešení). Počet konstant obsažených v daném obecném řešení byl pak dán řádem této rovnice.

Na příkladech rovnic (15.3) a (15.4) však lze snadno nahlédnout, že v případě parciálních rovnic tomu tak není. V příkladu 15.3b) jsme odvodili, že obecný tvar klasického řešení  $u$  rovnice (15.4) lze vyjádřit pomocí vztahu

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y), \quad (15.5)$$

kde  $\varphi_1, \varphi_2$  jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce svých argumentů. Podobně lze ukázat, že pro obecný tvar řešení  $u$  rovnice (15.3) platí vztah

$$u(x, y) = \psi(x - y),$$

kde  $\psi$  je libovolná spojitě diferencovatelná funkce.

Mohlo by se tedy zdát, že roli obecných konstant v obecném řešení ODR přebírají u PDR volitelné funkce, přičemž jejich počet je dán řádem rovnice. Následující příklad však ukazuje, že toto není pravidlem.

**Příklad 15.4.** Nalezněme funkce  $u = u(x, y)$ , které jsou řešeními rovnice

$$(u''_{xx})^2 + (u''_{yy})^2 = 0$$

na  $\mathbb{R}^2$  Aby mohl být součet kvadrátů nulový, musí být současně  $u''_{xx} = 0$  a  $u''_{yy} = 0$ . Dvojitou integrací a dvojitou integrací druhé rovnosti dostaneme

$$u(x, y) = \psi_1(x)y + \psi_2(x), \quad \text{kde } \psi_1, \psi_2 \text{ jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce.}$$

Protože však musí platit zároveň  $u''_{xx} = 0$ , máme

$$u'_x(x, y) = \psi'_1(x)y + \psi'_2(x) \Rightarrow u''_{xx}(x, y) = \psi''_1(x)y + \psi''_2(x) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Z poslední rovnosti plyne, že musí na  $\mathbb{R}$  být  $\psi''_1 = 0$  a zároveň  $\psi''_2 = 0$ . Odtud (dvojitou integrací)  $\psi_1(x) = C_1x + C_2$ ,  $\psi_2(x) = C_3x + C_4$  pro  $x \in \mathbb{R}$ . Dosadíme-li zpět do vyjádření pro  $u$ , máme obecné řešení ve tvaru

$$u(x, y) = C_1xy + C_2y + C_3x + C_4, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Vidíme tedy, že řešení závisí na čtyřech libovolných konstantách a nikoliv na dvou libovolných funkcích, jak bychom na první pohled čekali.

**Poznámka 15.5.** Vedle pojmu *obecné řešení* (tím se v teorii PDR myslí soubor všech řešení dané PDR), se zavádí pojem *generickeho řešení*. Pokud máme rovnici řádu  $k$ , která obsahuje  $N$  nezávislých proměnných, tak generickeým řešením rozumíme funkci, která závisí na  $k$  volitelných funkcích  $N - 1$  proměnných, přičemž tyto volitelné funkce mají na uvažované oblasti spojitě všechny parciální derivace až do řádu  $k$ . V řadě případů oba pojmy splývají.

### 15.3 Počáteční a okrajové podmínky

K jednoznačnému určení řešení dané PDR je třeba – podobně jako v případě ODR – předepsat doplňující podmínky, které spolu s danou rovnicí tvoří „úlohu“. Tato úvaha nás vede k formulaci jistých počátečních a okrajových podmínek, jejichž splnění umožní určit řešení dané PDR jednoznačně. Na příkladu rovnice (15.4) ilustrujeme, jaký tvar těchto podmínek lze v případě některých jednodušších PDR očekávat.

Předpokládáme, že řešení této rovnice hledáme na čtvercové oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

V případě uvažované rovnice (15.4) a jejího obecného řešení (15.5) je nutno k jednoznačnosti daného řešení specifikovat tvar funkcí  $\varphi_1, \varphi_2$ . To se podaří např. tehdy, předepíšeme-li hodnoty  $u$  na dvou hraničních úsečkách  $y = 0, 0 < x < 1$  a  $x = 0, 0 < y < 1$  oblasti  $\Omega$ . Nechť tedy např.

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 < x < 1 \tag{15.6}$$

a

$$u(0, y) = y^2, \quad 0 < y < 1. \tag{15.7}$$

Dosazením (15.6) do (15.5) dostáváme

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(0) = \sin x, \quad 0 < x < 1. \tag{15.8}$$

Podobně dosazením (15.7) do (15.5) máme

$$u(0, y) = \varphi_1(0) + \varphi_2(y) = y^2, \quad 0 < y < 1. \tag{15.9}$$

Porovnáním vztahů (15.8), (15.9) a s přihlédnutím k rovnosti  $\varphi_1(0) + \varphi_2(0) = 0$  pak dostáváme jednoznačně určené řešení úlohy (15.4), (15.6), (15.7) ve tvaru

$$u(x, y) = \sin x + y^2.$$

Je přitom přirozené očekávat, že uvedené klasické řešení dané úlohy splňuje v  $\Omega$  rovnici (15.4), je spojitě na  $\overline{\Omega}$  (tedy včetně všech hraničních úseček) a vyhovuje podmínkám (15.6), (15.7).

Popisuje-li daná rovnice nějaký děj závislý na čase, přičemž proměnná  $y$  má fyzikální význam času, pak podmínka typu (15.6) se nazývá *počáteční podmínka*. Má-li proměnná  $x$  význam délkové souřadnice, pak podmínku (15.7) nazýváme *okrajovou podmínkou* a úlohu (15.4), (15.6), (15.7) *počátečně-okrajovou úlohou*.

## Příklady k procvičení

**Cvičení 15.6.** U každé z následujících rovnic určete její řád a rozhodněte, zda je nelineární, lineární homogenní, či lineární nehomogenní. Svě závěry zdůvodněte.

- $u_t'' + 3u_{xx}'' - 2 = 0;$
- $u_x' - u_{yy}'' + x^2yu = 2;$
- $u_x' + u_{xyy}'' + u^2 = 0;$
- $u_{xxxx}^{(4)} + u_y' + (u_x')^2 = 0;$
- $u_x' \sin x = 5y;$
- $u_{xx}'' + e^t u_t' = ux^2.$

**Cvičení 15.7.** Ověřte, že funkce  $u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$  je generickým řešením rovnice  $u^2 u_{xyz}''' = u_x' u_y' u_z'$  pro libovolnou trojici (diferencovatelných) funkcí  $f$ ,  $g$  a  $h$  jedné reálné proměnné.

## 16 Lineární parciální diferenciální rovnice

Předcházející sekce jen potvrdila zřejmá očekávání, že teorie PDR bude ve všech podstatných směrech komplikovanější, než tomu bylo v případě ODR. Z tohoto důvodu se budeme v dalším textu věnovat výhradně rovnicím lineárním, které mají, podobně jako tomu bylo u ODR, v rámci teorie PDR výsadní postavení. Dokonce pro ně platí i analogie některých užitečných vlastností, které jsme u lineárních ODR hojně využívali. Jako příklad takové vlastnosti, kterou lze z LODR přenést na LPDR, můžeme zmínit, že v homogenním případě je lineární kombinace řešení LPDR opět řešením této rovnice. V dalším výkladu se stručně zastavíme u LPDR1 a LPDR2, a odpovíme na tyto otázky. Existuje alespoň pro nějakou speciální podtřídu LPDR1 analytická metoda vedoucí k nalezení exaktního řešení? Co lze v tomto směru říci k LPDR2?

### 16.1 Lineární PDR prvního řádu

Obecný tvar LPDR1 v rovině je dán vztahem (15.2). Uvažujme jednodušší situaci, a to sice homogenní rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru

$$au_x' + bu_y' = 0, \quad (16.1)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou takové konstanty, které nejsou současně rovny nule (v rovnici (15.2) tedy je  $c(x, y) = d(x, y) = 0$ ,  $a(x, y) = a$ ,  $b(x, y) = b$ ). Označíme-li  $\vec{v} = (a, b)$ , pak levou stranu rovnice lze chápat jako skalární součin  $\vec{v} \cdot \nabla u$  (symbolem  $\nabla u$  rozumíme gradient funkce  $u$ ), který reprezentuje derivaci funkce  $u$  ve směru vektoru  $\vec{v}$ . Tato derivace je nulová, což znamená, že funkce  $u$  se nemění (je konstantní) ve směru vektoru  $\vec{v}$ . Jinak řečeno, funkce  $u$  je konstantní na každé přímce se směrovým vektorem  $\vec{v}$ . Na každé takové přímce ale tato konstanta může být jiná! Vzhledem k této úvaze dostáváme obecně (současně generické) řešení ve tvaru

$$u(x, y) = f(bx - ay), \quad (16.2)$$

protože funkce  $u$  nabývá konstantní hodnoty  $f(C)$  na přímce o rovnici  $bx - ay = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  (ta má skutečně směrový vektor  $(a, b)$ ). Funkce  $f$  je zde libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Přímkou o rovnici  $bx - ay = C$  se nazývají *charakteristické přímky* a naznačený postup řešení se nazývá *metoda charakteristik*. Řešení  $u$  si můžeme představit jako vlnu o profilu  $f(t)$ , která se šíří podél charakteristik.

Pokud chceme vybrat jedno konkrétní řešení, je potřeba přidat jednu počáteční (podle interpretace proměnných můžeme říci i okrajovou) podmínku.

**Příklad 16.1.** Vyřešme na  $\mathbb{R}^2$  úlohu s rovnicí  $2u_x' - 3u_y' = 0$  a podmínkou  $u(x, 0) = 9x^2$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .

**Řešení.** Směrový vektor je  $\vec{v} = (2, -3)$ , a tedy příslušné charakteristiky mají rovnici  $-3x - 2y = C$ . Obecné řešení tedy podle (16.2) je ve tvaru

$$u(x, y) = f(-3x - 2y), \quad \text{kde } f = f(t) \text{ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce.}$$

Abychom tuto funkci určili, využijme počáteční podmínky

$$u(x, 0) = f(-3x) = 9x^2 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Zavedeme-li substituci  $t = -3x$ , neboli  $x = -t/3$ , pak  $f(t) = 9(-t/3)^2 = t^2$ . Odtud

$$u(x, y) = (-3x - 2y)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ověřte si zpětně, že tato funkce je skutečně řešením zadané rovnice a vyhovuje zadané podmínce.

**Poznámka 16.2.** V příkladu bylo  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  a podmínka byla předepsána na souřadnicové ose  $y$  (tj. na přímce), což vedlo na jediné řešení naší počáteční (okrajové) úlohy. Jediné řešení bychom dostali i v případě, kdy podmínku předepíšeme na kterékoliv jiné přímce, ale takové, že nesplyvá s nějakou charakteristikou (tj. svírá s charakteristikami nenulový úhel). V případě podmínky na přímce, která je zároveň charakteristikou, by existovalo nejednoznačné řešení, pokud by podmínka byla konstantní, a řešení by neexistovalo, pokud by podmínka byla nekonstantní (na charakteristické přímce totiž řešení musí být konstantní, takže bychom byli ve sporu).

Metodu charakteristik lze rozšířit i na případ, kdy koeficienty  $a, b$  jsou nekonstantní, tj. na případ rovnice

$$a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y = 0. \quad (16.3)$$

Vektor  $\vec{v} = (a(x, y), b(x, y))$  je nyní proměnný, roli charakteristických přímek přebírají tzv. *charakteristiky*, což jsou křivky s tečným vektorem  $\vec{v}$  podél kterých je řešení konstantní. Charakteristiky získáme vyřešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

(podíl napravo představuje směrnici tečny k hledané charakteristice v bodě  $(x, y)$ , viz podsekcce 5.3). Pokud řešení této ODR1 lze napsat implicitně ve tvaru  $\varphi(x, y) = C$ , pak obecným řešením rovnice (16.3) je libovolná spojitě diferencovatelná funkce  $f$  argumentu  $C = \varphi(x, y)$ , tj. máme

$$u(x, y) = f(\varphi(x, y)).$$

Abychom získali jediné řešení, je k rovnici potřeba přidat počáteční (okrajovou) podmínku. Rozšířením úvahy z poznámky 16.2 může být tato podmínka zadána na libovolné křivce  $\Gamma$ , která však protíná každou charakteristiku právě jednou, přičemž v bodě protnutí tečna křivky  $\Gamma$  s tečnou charakteristiky svírají nenulový úhel.

**Příklad 16.3.** Uvažujme rovnici  $xu'_x + (2y + 1)u'_y = 0$  v I. kvadrantu (tj. pro  $x > 0, y > 0$ ) s podmínkou  $u(x, 1/2) = \sin x^2$  (tj. podmínka je zadána na polopřímce  $y = 1/2, x > 0$ ).

**Řešení.** Charakteristiky vyhovují rovnici

$$y' = \frac{2y + 1}{x}.$$

Obecné řešení této rovnice je  $y(x) = Cx^2 - 1/2$  (viz příklad 6.7), neboli v požadovaném implicitním tvaru

$$C = \frac{1}{x^2} \left( y + \frac{1}{2} \right) = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{2x^2}.$$

Obecné řešení dané PDR potom je

$$u(x, y) = f\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right),$$

kde  $f$  je libovolná diferencovatelná funkce. Dosazením podmínky dostáváme

$$u(x, 1/2) = f\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sin x^2.$$

Z poslední rovnosti máme  $f(t) = \sin \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$  a tedy řešení naší úlohy je

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}.$$

**Poznámky 16.4.** a) Metodu charakteristik lze rozšířit i na případ rovnice ve vyšší dimenzi, tj. na případ

$$\sum_{i=1}^N a_i(x_1, \dots, x_N) u'_{x_i} = 0.$$

Charakteristiky jsou potom křivky v  $\mathbb{R}^N$ .

b) Metodu lze modifikovat i pro případ nehomogenní rovnice typu (16.1), resp. (16.3), a dokonce i pro obecný případ rovnice (15.2).

c) Existují i jiné metody, jak výše uvedené typy LPDR1 řešit, metoda charakteristik je však obvykle preferována z důvodu názornosti.

## 16.2 Lineární PDR druhého řádu

Z hlediska aplikací tvoří LPDR druhého řádu (LPDR2) vůbec nejdůležitější třídu. Její obecný tvar v rovinném případě (tj. pro  $u = u(x, y)$ ) je

$$a(x, y)u''_{xx} + 2b(x, y)u''_{xy} + c(x, y)u''_{yy} + d(x, y)u'_x + e(x, y)u'_y + f(x, y)u = g(x, y), \quad (16.4)$$

kde o koeficientech  $a, b, \dots, f$  a pravé straně  $g$  předpokládáme, že jsou spojité na nějaké oblasti  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  a alespoň jeden z koeficientů  $a, b, c$  je nenulový. (Koeficient  $b$  je násoben dvěma z čistě formálních důvodů). Zdůrazníme, že se této části zajímáme o klasické řešení.

Rovnice rozdělujeme na *eliptické*, *hyperbolické*, resp. *parabolické* v oblasti  $\Omega$ , a to v závislosti na hodnotách koeficientů  $a, b, c$ . Hovoříme přitom o *klasifikaci LPDR2*.

Zastavme se nejprve u případu, kdy koeficienty  $a, \dots, f$  jsou konstantní, tj.

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} + du'_x + eu'_y + fu = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (16.5)$$

**Definice 16.5 — klasifikace LPDR2.** Označme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

matici, která je tvořena koeficienty rovnice (16.5) u derivací druhého řádu.

- Je-li  $\det \mathbf{M} > 0$ , pak rovnici (16.5) nazýváme *eliptickou* v  $\Omega$ ;
- Je-li  $\det \mathbf{M} < 0$ , pak rovnici (16.5) nazýváme *hyperbolickou* v  $\Omega$ ;
- Je-li  $\det \mathbf{M} = 0$ , pak rovnici (16.5) nazýváme *parabolickou* v  $\Omega$ .

O typu rovnice tedy rozhodují pouze koeficienty  $a, b, c$  u druhých derivací.

Lze ukázat, že existují (lineární) transformace  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ , kterými lze eliptickou, resp. hyperbolickou, resp. parabolickou rovnici (16.5) převést na jednodušší tvar, konkrétně:

$$a) u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = \text{č.n.ř.}, \quad \text{kanonický tvar eliptické rovnice}; \quad (16.6)$$

$$b) u''_{\xi\xi} - u''_{\eta\eta} = \text{č.n.ř.}, \quad \text{kanonický tvar hyperbolické rovnice}; \quad (16.7)$$

$$c) u''_{\xi\xi} - u'_\eta = \text{č.n.ř.}, \quad \text{kanonický tvar parabolické rovnice}. \quad (16.8)$$

Hvězdičkou zdůrazňujeme, že se jedná o transformovanou funkci, tj.  $u^*(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  a symbol č.n.ř. představuje transformované členy nižších řádů (včetně transformované pravé strany  $g$ ).

Názvosloví pochází z formální podobnosti s rovnicemi kuželoseček v rovině: analogií rovnice (16.6) je rovnice elipsy  $x^2 + y^2 = 1$  (zde jejího speciálního případu kružnice), analogií rovnice (16.7) je rovnice hyperboly  $x^2 - y^2 = 1$  a analogií rovnice (16.8) je rovnice paraboly  $x^2 - y = 1$  (v posledním případě (16.8) člen  $u_\eta^{*/}$  není zahrnut do č.n.ř, abychom zdůraznili „paraboličnost“).

**Poznámka 16.6.** Nalezení příslušných transformačních vztahů a převedení rovnice na jeden ze tvarů (16.6)–(16.8) je založeno na podobné myšlence jako při hledání kanonického tvaru kuželoseček v analytické geometrii. Podstatně se však také využívá faktu, že se zajímáme o klasické řešení LPDR2, tj. že řešení mají spojité všechny parciální derivace až do řádu 2. Např., v eliptickém případě má transformace tvar (není to jediná možnost)

$$x = \frac{a}{\sqrt{ac - b^2}} \eta, \quad y = \xi + \frac{b}{\sqrt{ac - b^2}} \eta. \quad (16.9)$$

**Příklad 16.7.** Ověřme, že rovnice  $2u_{xx}'' - 2u_{xy}'' + 5u_{yy}'' - u_x' + 3u = x + y^2$  je eliptická a převedme ji na příslušný kanonický tvar.

**Řešení.** Vzhledem ke značení v rovnici (16.5) je  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 5$ . Protože  $\det \mathbf{M} = ac - b^2 = 10 - 1 = 9 > 0$ , rovnice je skutečně eliptická. Dosazením do (16.9) jsou transformační vztahy ve tvaru

$$x = \frac{2}{3} \eta, \quad y = \xi - \frac{1}{3} \eta. \quad (16.10)$$

Pro vyjádření derivací  $u_{xx}''$ ,  $u_{xy}''$ ,  $u_{yy}''$  v nových proměnných  $\xi, \eta$  je výhodnější pracovat s inverzní transformací k (16.10):

$$\xi = \frac{1}{2}x + y, \quad \eta = \frac{3}{2}x.$$

Podle vzorců pro derivaci složené funkce  $u_x' = u_\xi^{*/} \xi_x' + u_\eta^{*/} \eta_x'$  a  $u_y' = u_\xi^{*/} \xi_y' + u_\eta^{*/} \eta_y'$  máme

$$\begin{aligned} u_x' &= u_\xi^{*/} \frac{1}{2} + u_\eta^{*/} \frac{3}{2}, & u_y' &= u_\xi^{*/}, \\ u_{xx}'' &= \frac{1}{4} u_{\xi\xi}^{**} + \frac{3}{2} u_{\xi\eta}^{**} + \frac{9}{4} u_{\eta\eta}^{**}, & u_{xy}'' &= \frac{1}{2} u_{\xi\xi}^{**} + \frac{3}{2} u_{\xi\eta}^{**}, & u_{yy}'' &= u_{\eta\eta}^{**}, \end{aligned}$$

nebot  $u_{\xi\eta}^{**} = u_{\eta\xi}^{**}$ . Dosazením do zadané PDR dostáváme

$$2 \left( u_{\xi\xi}^{**} \frac{1}{4} + u_{\xi\eta}^{**} \frac{3}{2} + u_{\eta\eta}^{**} \frac{9}{4} \right) - 2 \left( \frac{1}{2} u_{\xi\xi}^{**} + \frac{3}{2} u_{\xi\eta}^{**} \right) + 5 u_{\eta\eta}^{**} - u_\xi^{*/} \frac{1}{2} - u_\eta^{*/} \frac{3}{2} + 3u^* = g^*(\xi, \eta),$$

kde  $g^*(\xi, \eta) = g\left(\frac{2}{3}\eta, \xi - \frac{1}{3}\eta\right) = x + y^2|_{x=\frac{2}{3}\eta, y=\xi-\frac{1}{3}\eta} = \frac{2}{3}\eta + (\xi - \frac{1}{3}\eta)^2$ . Po sečtení máme

$$\frac{18}{4} u_{\xi\xi}^{**} + \frac{18}{4} u_{\eta\eta}^{**} - \frac{1}{2} u_\xi^{*/} - \frac{3}{2} u_\eta^{*/} + 3u^* = g^*(\xi, \eta).$$

V posledním kroku vydělíme rovnici konstantou 18/4. Celkově tedy, transformace (16.10) převádí zadanou rovnici (v proměnných  $x, y$ ) na rovnici (v proměnných  $\xi, \eta$ )

$$u_{\xi\xi}^{**} + u_{\eta\eta}^{**} = \underbrace{\frac{1}{9} u_\xi^{*/} + \frac{1}{3} u_\eta^{*/} - 3u^* + \frac{4}{27} \eta + \frac{2}{9} \left( \xi - \frac{1}{3} \eta \right)^2}_{\text{č.n.ř.}}$$

Klasifikaci lze rozšířit na případ, kdy LPDR2 s konstantními koeficienty uvažujeme ve vyšší dimenzi. Takovou rovnici lze psát ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i x_j}'' + \sum_{i=1}^N b_i u_{x_i}' + cu = d(x_1, \dots, x_N), \quad (x_1, \dots, x_N) \in \Omega, \quad (16.11)$$

kde  $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ , přičemž  $a_{ij} = a_{ji}$  pro všechna  $i, j$ . V takovém případě lze koeficienty  $a_{ij}$  poskládat do symetrické  $N \times N$  matice  $\mathbf{M}$  a o typu rovnice rozhodují znaménka vlastních čísel této matice, resp. její definitnost (je známo, že symetrická matice  $\mathbf{M}$  má všechna vlastní čísla reálná). Přesněji, definujeme:

**Definice 16.8.** a) Rovnici (16.11) nazveme *eliptickou*, má-li matice  $\mathbf{M}$  všechna vlastní čísla kladná nebo všechna záporná (tj.  $\mathbf{M}$  je pozitivně nebo negativně definitní);  
 b) Rovnici (16.11) nazveme *hyperbolickou*, má-li matice  $\mathbf{M}$  právě jedno záporné vlastní číslo a všechna ostatní vlastní čísla jsou kladná, nebo má matice  $\mathbf{M}$  právě jedno kladné vlastní číslo a všechna ostatní vlastní čísla jsou záporná (speciální případ indefinitnosti matice  $\mathbf{M}$ );  
 c) Rovnici (16.11) nazveme *parabolickou*, má-li matice  $\mathbf{M}$  právě jedno vlastní číslo nulové a všechna ostatní vlastní čísla mají stejné znaménko (speciální případ pozitivní nebo negativní semidefinitnosti matice  $\mathbf{M}$ ).

**Poznámka 16.9.** Předchozí tři případy nepokryjí všechny možnosti znamének vlastních čísel (např. není postihnout případ vícenásobného nulového vlastního čísla). Někdy se ještě zavádí pojem *ultrahyperbolické rovnice* pro případ, kdy matice  $\mathbf{M}$  má více než jedno kladné vlastní číslo, více než jedno záporné vlastní číslo a žádné nulové vlastní číslo (opět speciální případ indefinitnosti matice  $\mathbf{M}$ ).

Výše uvedené rovnice lze opět transformovat na kanonické tvary, např. pro  $N = 3$  (tj.  $u = u(x, y, z)$ ) jsou kanonické tvary eliptické, hyperbolické a parabolické rovnice po řadě:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi}^{*''} + u_{\eta\eta}^{*''} + u_{\zeta\zeta}^{*''} &= \text{č.n.ř.}, \\ u_{\xi\xi}^{*''} + u_{\eta\eta}^{*''} - u_{zz}^{*''} &= \text{č.n.ř.}, \\ u_{\xi\xi}^{*''} + u_{\eta\eta}^{*''} - u_{\zeta\zeta}^{*''} &= \text{č.n.ř.} \end{aligned}$$

**Poznámka 16.10 – Laplaceův operátor.** Tento operátor (čteme „Laplasův“) slouží ke snazšímu zápisu některých diferenciálních rovnic a je definován jako

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (16.12)$$

v rovinném případě, resp.

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (16.13)$$

v prostorovém případě. Obecně v prostoru proměnných  $x_1, \dots, x_N$  má tento operátor tvar

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

Tento operátor tedy funguje jako „derivátor“, který když aplikujeme na funkci, dostaneme novou funkci. Např. v případě  $f = f(x, y)$  máme  $\Delta f = f_{xx}'' + f_{yy}''$ , v případě funkce  $f = f(x, y, z)$  máme  $\Delta f = f_{xx}'' + f_{yy}'' + f_{zz}''$ , atd. Eliptickou rovnici v rovině  $-u_{xx}'' - u_{yy}'' = f$  lze potom stručně zapsat  $-\Delta u = f$ , této rovnici říkáme *Poissonova rovnice*. Nebo, hyperbolickou rovnici v prostoru  $u_{xx}'' + u_{yy}'' + u_{zz}'' - u_{tt}'' = 0$  můžeme stručně zapsat ve tvaru  $u_{tt}'' = \Delta u$  (tzv. *vlnová rovnice*) a parabolickou rovnici  $u_{xx}'' + u_{yy}'' + u_{zz}'' - u_t' = 0$  můžeme stručně zapsat  $u_t' = \Delta u$  (tzv. *rovnice vedení tepla* či *rovnice difuze*). O těchto třech rovnicích se dozvíme více v následující sekci.

Klasifikovat LPDR2 lze analogicky jako v definici 16.5 i v případě rovnic s nekonstantními koeficienty, v takovém případě však rovnice může v oblasti  $\Omega$  měnit typ, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 16.11.** V rovině  $xy$  nalezněte oblasti, ve kterých je rovnice

$$y u_{xx}'' - 2u_{xy}'' + x u_{yy}'' = 0$$

eliptická, hyperbolická, resp. parabolická.

*Řešení.* Odpovídající matice koeficientů  $\mathbf{M}$  nyní závisí na  $x, y$  a má tvar

$$\mathbf{M}(x, y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = xy - 1.$$

Rovnice je tedy parabolická na rovnoosé hyperbole  $xy = 1$ , eliptická „nad“ touto hyperbolou (tj. pro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  splňující  $xy > 1$ ) a hyperbolická „pod“ touto hyperbolou (tj. pro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  splňující  $xy < 1$ ). Načrtněte si obrázek.

**Poznámky 16.12.** a) I v případě nekonzstantních (diferencovatelných) koeficientů lze LPDR2 transformovat na kanonický tvar, ale pouze lokálně. Tím se myslí, že je-li rovnice (16.4) např. eliptická v bodě  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , pak je eliptická i v nějakém okolí tohoto bodu (spojitost  $a, b, c$  v  $(x_0, y_0)$  totiž zaručí, že  $\det \mathbf{M} > 0$  i v určitém okolí tohoto bodu) a existuje transformace  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  (ta je nyní nelineární) taková, že v tomto okolí převede rovnici na eliptický kanonický tvar. Toto platí analogicky pro hyperbolickou rovnici v bodě  $(x_0, y_0)$ . V případě parabolické rovnice v bodě  $(x_0, y_0)$  analogická vlastnost také platí, ale je navíc potřeba předpokládat paraboličnost na určitém okolí tohoto bodu, neboť je-li  $\det \mathbf{M} = 0$  v bodě  $(x_0, y_0)$ , pak automaticky nedostaneme  $\det \mathbf{M} = 0$  na nějakém okolí tohoto bodu.

b) Máme-li LPDR2 s konstantními koeficienty převedenu na kanonický tvar, pak je ještě možné vhodnou transformací eliminovat členy s prvními derivacemi.

### Příklady k procvičení

**Cvičení 16.13.** Nalezněte obecné řešení rovnic

$$\text{a) } u'_x + x^2 u'_y = 0; \quad \text{b) } x u'_x + y u'_y = 0.$$

*Výsledky.* a)  $u(x, y) = f(y - x^3/3)$ ; b)  $u(x, y) = f(y/x)$  ( $f$  je v obou případech libovolná spojitě diferencovatelná funkce).

**Cvičení 16.14.** Vyřešte následující rovnice s podmínkou:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{1-x^2} u'_x + u'_y &= 0, & u(0, y) &= y; \\ \text{b) } u'_x - 3u'_y &= 0, & u(0, y) &= \sin y. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a)  $u(x, y) = y - \arcsin x$ ; b)  $u(x, y) = \sin(y - 3x)$ .

**Cvičení 16.15.** Rozhodněte, jakého typu jsou následující (rovinné) rovnice:

$$\begin{aligned} \text{a) } u''_{xx} - u''_{xy} + 2u'_y + u''_{yy} - 3u''_{yx} + 4u &= 0; \\ \text{b) } 9u''_{xx} + 6u''_{xy} + u''_{yy} + u'_x &= 0. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a) Hyperbolická rovnice; b) parabolická rovnice.

**Cvičení 16.16.** Rozhodněte, jakého typu jsou následující (prostorové) rovnice:

$$\begin{aligned} \text{a) } u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} + 2u''_{zz} + xu &= 0; \\ \text{b) } u''_{xx} + 2u''_{zy} - u'_z \sin x - 2z &= xyz. \end{aligned}$$

*Výsledky.* a) Parabolická rovnice; b) hyperbolická rovnice.

**Cvičení 16.17.** Uvažujte rovnici

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0.$$

a) Rozhodněte o typu rovnice; b) pomocí transformace  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$  převed'te rovnici na jednodušší tvar, tento tvar vyřešte a napište generické řešení původní rovnice.

*Výsledky.* a) Parabolická rovnice; b)  $u(x, y) = f(x - y)(x + y) + g(x - y)$ , kde  $f, g$  jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce (jedné proměnné).

## 17 Rovnice matematické fyziky

Některé parciální diferenciální rovnice se nazývají *rovnice matematické fyziky*. Důvodem je skutečnost, že tyto rovnice byly odvozeny z fyzikálních principů a popisují (v určitém rozsahu a s určitou přesností) některé fyzikální děje.

Hledaná funkce  $u$ , která v těchto rovnicích vystupuje, závisí obvykle na jedné časové proměnné  $t$  a na jedné, dvou, nebo třech prostorových proměnných  $x, y, z$ . V závislosti na dimenzi prostoru, ve kterém zkoumaný jev probíhá, je pak neznámou funkce  $u(x, t)$ ,  $u(x, y, t)$ ,  $u(x, y, z, t)$ , příp. ve vyšší dimenzi  $u(x_1, \dots, x_N, t)$ .

Otázky, kterými se zde budeme dále zabývat, jsou tedy následující: Jaké jsou základní aplikace PDR? Jak vypadá matematická formalizace těchto úloh? Jsem schopni napsat analytické řešení (alespoň pro vybrané rovnice a typy podmínek)?

### 17.1 Rovnice vedení tepla

Rovnice vedení tepla je parabolického typu. Uvedme nejprve tvar této rovnice v jedné prostorové dimenzi.

#### Rovnice vedení tepla v tyči

Uvažujme tyč délky  $l$ , která je izolována na povrchu a jejíž průřez pro jednoduchost zanedbáváme. Tyč umístíme na osu  $x$  tak, aby její levý konec splyval s počátkem. Předpokládejme dále, že závisle proměnná  $u = u(x, t)$  popisuje teplotu tyče v místě  $x$  a čase  $t$ . Pak lze ukázat, že tato funkce splňuje (po provedení jistých zjednodušení) parciální diferenciální rovnici

$$u'_t = \kappa u''_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (17.1)$$

kde

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}$$

je tepelná difuzivita,  $k$  koeficient tepelné vodivosti,  $\rho$  měrná hmotnost (déłková hustota),  $c$  měrná tepelná kapacita. Funkce  $f$  charakterizuje intenzitu vnitřních zdrojů (např. ve vodivé tyči se vyvíjí teplo, prochází-li jí elektrický proud) a  $T$  je doba trvání zkoumaného děje (lze připustit i  $T = \infty$ ).

Rovnice (17.1) má nekonečně mnoho řešení. Abychom mohli jednoznačně určit teplotu tyče v libovolném místě a libovolném čase, je třeba k rovnici připojit jednu počáteční podmínku (popisující teplotu tyče na počátku děje) a dvě okrajové podmínky (charakterizující situaci na obou koncích tyče v průběhu celého děje). V nejjednodušším případě lze tyto podmínky popsat vztahy

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < l, \quad (17.2)$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (17.3)$$

$$u(l, t) = h_2(t), \quad 0 < t < T. \quad (17.4)$$

Podmínky (17.2)–(17.4) tedy popisují situaci, kdy levý konec tyče je udržován na teplotě  $h_1(t)$ , pravý konec na teplotě  $h_2(t)$  (obě funkce se tedy mohou měnit s časem) a na počátku děje je teplota tyče předepsána známou funkcí  $g$ . O funkcích  $g$ , resp.  $h_1, h_2$  budeme přitom předpokládat, že jsou spojitě v  $(0, l)$ , resp.  $(0, T)$  a splňují tzv. *podmínky souhlasnosti*

$$g(0) = h_1(0), \quad g(l) = h_2(0) \quad (17.5)$$

(poznamenejme, že vztahy (17.5), vyjadřující soulad počáteční a okrajové podmínky, nebývají v aplikacích vždy splněny; matematická diskuse tohoto případu však přesahuje rámec tohoto skriptu).

*Řešením* počátečně-okrajové úlohy (17.1)–(17.4) pak rozumíme každou funkci  $u = u(x, t)$ , která je řešením rovnice (17.1), je spojitá na  $(0, l) \times (0, T)$  (tedy včetně hraničních úseček) a splňuje zde podmínky (17.2)–(17.4).

Je snadné ověřit, že např. funkce

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

je řešením úlohy

$$u'_t = u''_{xx}, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1),$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= 0, & 0 < t < 1, \\ u(\pi, t) &= 0, & 0 < t < 1. \end{aligned}$$

Nyní ještě učiníme krátkou poznámku k případné modifikaci okrajových podmínek (17.3), (17.4). Tyto podmínky jsou Dirichletova typu (užitá terminologie je zde v souladu s pojmy zavedenými v podsekcí 14.2). Lze je však nahradit i jiným typem podmínek, např. Neumannovými podmínkami ve tvaru

$$u'_x(0, t) = q_1(t), \quad u'_x(l, t) = q_2(t). \quad (17.6)$$

Neumannovy podmínky lze v daném případě interpretovat jako popis tepelného toku na obou koncích tyče (tepelný tok je dán funkcí  $xu'_x$ ). Poznamenejme, že oba typy podmínek je možné také kombinovat (na jednom konci tyče lze zadat podmínku Dirichletova typu, a na druhém konci podmínku Neumannova typu).

### Rovnice vedení tepla ve vyšší dimenzi

Uvažujeme-li místo jednorozměrné tyče např. nějaké těleso z homogenního materiálu omezené oblastí  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , pak vedení tepla v tomto tělese popisuje rovnice

$$u'_t = \Delta u + f, \quad (17.7)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor definovaný vztahem (16.13) a  $f = f(x, y, z, t)$  je funkce. Podobně jako v případě „jednorozměrného“ vedení tepla rovnici (17.7) doplníme jednou počáteční podmínkou, předepisující počáteční teplotu v  $\Omega$ , a jednou okrajovou podmínkou, popisující teplotu podél hranice  $\Gamma$  oblasti  $\Omega$  v průběhu celého děje. Tato podmínka může být Dirichletova typu

$$u(x, y, z, t) = h(t), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad 0 < t < T,$$

kdy na okraji předepisujeme teplotu, nebo Neumannova typu

$$u'_{\vec{n}}(x, y, z, t) = q(t), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad 0 < t < T,$$

kdy na okraji předepisujeme (až na násobek konstantou) tepelný tok (symbol  $u'_{\vec{n}}$  zde znamená derivaci ve směru jednotkového vektoru vnější normály, tedy ve směru kolmém k povrchu). Přitom na části povrchu lze uvažovat Dirichletovu podmínku, a na zbytku pak Neumannovu podmínku.

Poznamenejme ještě, že rovnice (17.7) se v chemických problémech nazývá *rovnice difúze* (neboť popisuje difúzi látky v nehybném prostředí).

## 17.2 Vlnová rovnice (rovnice kmitání)

Vlnová rovnice je hyperbolického typu. Uvedeme opět nejprve tvar s jednou prostorovou proměnnou.

### Rovnice kmitání struny

Uvažujme strunu (tj. dokonale pružné vlákno) o délce  $l$ , která je uložena na ose  $x$  a napínána silou o konstantní velikosti  $F$ . Označme  $\rho$  délkovou hustotu (měrnou hmotnost) materiálu struny,  $u(x, t)$  její vertikální výchylku od rovnovážné polohy v místě  $x$  a čase  $t$  a  $f(x, t)$  případně známé vnější zatížení (např. gravitaci). Pak kmitání této struny popisuje rovnice

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (17.8)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}.$$

Veličina  $c$  představuje rychlost, jakou se vlna šíří. Zdůrazněme opět, že rovnice (17.8) popisuje skutečný fyzikální problém pouze přibližně (při odvození rovnice (17.8) je nutné např. předpokládat, že vertikální výchylky struny jsou „malé“).

Nyní k rovnici (17.8) doplníme podmínky. Na rozdíl od rovnice vedení tepla je třeba nyní předepsat dvě počáteční podmínky

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u'_t(x, 0) = g_2(x), \quad 0 < x < l, \quad (17.9)$$

kteří popisují počáteční výchylku a počáteční rychlost struny. Okrajové podmínky lze opět zachytit vztahy (17.3), (17.4) popisujícími výchylky struny na koncích, resp. vztahy (17.6) popisujícími vertikální zatížení struny na koncích (oba typy okrajových podmínek lze opět kombinovat).

Pojem řešení počátečně-okrajové úlohy (17.8), (17.9), (17.3), (17.4) se nyní zavede analogicky jako pro rovnici vedení tepla v odstavci 17.1.

### Vlnová rovnice ve vyšší dimenzi

Je obvykle zapisována ve tvaru

$$u''_{tt} = c^2 \Delta u + f \quad (17.10)$$

s Laplaceovým operátorem (16.12), resp. (16.13) a funkcí  $f = f(x, y, t)$ , resp.  $f = f(x, y, z, t)$ . V rovinném případě rovnice (17.10) popisuje šíření vln v rovině (např. kmitání membrány nebo šíření vln na vodní hladině), v prostorovém případě pak tato rovnice popisuje šíření vln (zvukových, elektromagnetických) v prostoru.

Pro vlnovou rovnici (17.10) lze formulovat počátečně-okrajovou úlohu analogicky, jak jsme to učinili v případě „vícerozměrné“ rovnice vedení tepla. Nesmíme však opomenout, že v případě vlnové rovnice je nutno předepsat počáteční podmínky dvě.

### 17.3 Laplaceova a Poissonova rovnice

Ve fyzikálních problémech, které popisovaly předcházející rovnice, lze hledat ustálený (tj. na čase nezávislý) stav. V případě rovnice pro vedení tepla tedy uvažujeme situaci, kdy se teplota v čase již nemění. Podobně v případě vlnové rovnice se kmitání struny nebo membrány mění na deformaci (průhyb).

Obecně lze říci, že v rovnicích pro ustálené jevy koeficienty ani pravá strana nezávisí na  $t$  a navíc z rovnice vypadne člen s příslušnou derivací podle  $t$ . Počáteční podmínky pak nemají smysl, a zůstávají pouze podmínky okrajové (ty ovšem pochopitelně opět nezávisí na  $t$ ). Snadno vidíme, že rovnice vedení tepla i vlnová rovnice nabývají v uvedeném stacionárním případě formálně stejného tvaru

$$-\Delta u = f, \quad (17.11)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor a  $f$  je daná funkce proměnných  $x_1, \dots, x_N$ . Rovnice (17.11) se nazývá *Poissonova* (čteme „Poasonova“). V rovinném případě  $N = 2$  je tato rovnice tedy tvaru

$$-u''_{xx} - u''_{yy} = f(x, y). \quad (17.12)$$

Speciálním případem Poissonovy rovnice (17.11) je *Laplaceova rovnice*

$$\Delta u = 0, \quad (17.13)$$

kteřá je Poissonovou rovnicí pro  $f \equiv 0$ . V rovinném případě je tato rovnice tvaru

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0. \quad (17.14)$$

Poissonova i Laplaceova rovnice je eliptického typu. Rovnice (17.11), resp. (17.13) mají – kromě výše uvedeného fyzikálního významu – řadu dalších interpretací. Poissonova rovnice např. popisuje potenciální proudění tekutiny tenkou vrstvou proměnné šířky ( $u$  je zde potenciál vektoru rychlosti a  $f$  vyjadřuje proměnnost tloušťky vrstvy tekutiny). V případě konstantní šířky je funkce  $f$  identicky nulová, a danou úlohu tedy modeluje Laplaceova rovnice. K rovnicím (17.11), (17.13) dospějeme rovněž při studiu elektrického potenciálu, problému šíření příměsi difúzí a v dalších úlohách.

Nyní přistoupíme k formulaci okrajových podmínek pro Poissonovu a Laplaceovu rovnici (jak již víme, počáteční podmínky zde nemají smysl). Pro jednoduchost se omezíme na rovinný případ, tj. budeme tyto rovnice uvažovat ve tvaru (17.12), resp. (17.14). Hledejme řešení těchto rovnic v omezené

oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a označme hranici této oblasti symbolem  $\Gamma$ . Nejjednodušším typem okrajové podmínky je Dirichletova okrajová podmínka

$$u = b \quad \text{na } \Gamma,$$

kteřá předepisuje hodnoty řešení na hranici oblasti  $\Omega$ , v níž danou rovnici uvažujeme. Dalším typem je pak Neumannova okrajová podmínka

$$u'_n = q \quad \text{na } \Gamma,$$

předepisující na hranici  $\Gamma$  hodnoty derivace hledaného řešení podle jednotkové vnější normály. Obě typy okrajových podmínek lze opět kombinovat (na části hranice lze předepsat Dirichletovu podmínku, a na zbytku pak Neumannovu podmínku).

Rovnice (17.12), resp. (17.14) plus některá z uvedených okrajových podmínek tedy tvoří okrajovou úlohu (v závislosti na typu okrajové podmínky se někdy hovoří o Dirichletově, Neumannově, resp. smíšené úloze). Řešením této úlohy pak v souladu s podsekcí 17.1 rozumíme funkci  $u$ , která je spojitá na  $\bar{\Omega}$  (tj. včetně hranice), v  $\Omega$  je řešením dané rovnici, a na hranici je splněna předepsaná okrajová podmínka.

## 17.4 Řešení PDR Fourierovou metodou

Již dříve jsme konstatovali, že řešení PDR lze získat v uzavřeném tvaru (tj. vyjádřit ho ve tvaru vhodné elementární funkce pomocí konečného počtu operací) velmi zřídka, a to jen pro zcela speciální typy LPDR. Proto se v této závěrečné podsekcí budeme zabývat otázkou, zda lze nalézt a vyjádřit řešení alespoň některých rovnic matematické fyziky z předcházejících podsekcí jiným způsobem. Pro zodpovězení této otázky si nejprve připomeňme, že i v případě ODR jsme se podobným problémem zabývali, a to u Airyho rovnice (9.10). Její řešení nebylo možné v exaktním tvaru určit, přesto se nám podařilo v příkladu 9.25 toto řešení nalézt ve tvaru součtu vhodné mocninné řady – tedy pomocí nekonečného počtu operací. V této sekci ukážeme, že vyjádření řešení ve tvaru vhodné funkční řady je možné i v případě některých rovnic matematické fyziky. Seznámíme se přitom s tzv. *Fourierovou metodou*, nazývanou také *metoda vlastních funkcí* nebo *metoda separace proměnných*. Při aplikaci této metody vyjde řešení ve tvaru Fourierovy řady (odtud plyne také název metody). Myšlenku metody vysvětlíme na příkladech některých rovnic matematické fyziky.

### Řešení vlnové rovnice Fourierovou metodou

Uvažujme vlnovou rovnici

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T) \quad (17.15)$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u'_t(x, 0) = g_2(x), \quad 0 < x < l \quad (17.16)$$

a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (17.17)$$

kde funkce  $g_1, g_2$  jsou spojitě v  $(0, l)$  a mají tam po částech spojitou derivaci. Počátečně-okrajová úloha (17.15)–(17.17) tedy popisuje kmitání struny upevněné na koncích, jejíž počáteční výchylku zachycuje funkce  $g_1$  a počáteční rychlost funkce  $g_2$ .

Nejprve určíme řešení následující pomocné úlohy:

*Hledáme všechna řešení  $u = u(x, t)$  rovnice (17.15), která nejsou identicky rovna nule, vyhovují okrajovým podmínkám (17.17) a která lze psát ve tvaru*

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (17.18)$$

( $X$  je tedy funkcí pouze  $x$  a  $T$  funkcí pouze  $t$ ).

Přistoupíme k vyřešení této pomocné úlohy. Dosadíme (17.18) do rovnice (17.15) a vzniklý vztah vydělíme výrazem  $c^2 X T$ , takže dostaneme:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (17.19)$$

kde čárkami značíme derivace funkce  $X(x)$  podle proměnné  $x$  a tečkami derivace funkce  $T(t)$  podle proměnné  $t$ . Levá strana vztahu (17.19) je funkcí pouze  $t$ , pravá strana funkcí pouze  $x$ . Měníme-li při nějaké pevně zvolené hodnotě  $x$  proměnnou  $t$  (nebo naopak), vidíme, že pravá i levá strana rovnice (17.19) zachovává při změně proměnných  $x$ ,  $t$  svou hodnotu, a tedy obě strany této rovnice musí být rovny téže konstantě; označíme ji  $-\lambda$  (kvůli dalším výpočtům zde dáváme znaménko minus, aniž činíme předpoklad o hodnotě této konstanty).

Odtud tedy

$$\frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (17.20)$$

Ze vztahů (17.20) dostáváme dvě LODR2:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (17.21)$$

$$\ddot{T}(t) + \lambda c^2 T(t) = 0. \quad (17.22)$$

Přiberme nyní do svých úvah okrajové podmínky. Z (17.17) a (17.18) plyne

$$X(0) \cdot T(t) = 0, \quad X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Protože hledáme řešení  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , která nejsou identicky rovna nule, není  $T(t)$  identicky rovno nule, takže

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (17.23)$$

Okrajová úloha (17.21), (17.23) se nazývá *úlohou vlastních hodnot*. Hledáme parametr  $\lambda$  takový, aby okrajová úloha (17.21), (17.23) měla řešení, které není na  $\langle 0, l \rangle$  identicky nulové. Lze dokázat, že existuje nekonečně mnoho reálných parametrů  $\lambda_k$  s touto vlastností, přičemž platí  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ . Nyní určíme příslušná nenulová řešení okrajové úlohy (17.21), (17.23). Protože  $\lambda_k > 0$  pro každé  $k$ , je obecné řešení  $X_k$  rovnice (17.21) odpovídající parametru  $\lambda = \lambda_k$  tvaru

$$X_k(x) = C_k \cos \sqrt{\lambda_k} x + D_k \sin \sqrt{\lambda_k} x. \quad (17.24)$$

Z okrajové podmínky  $X(0) = 0$  plyne  $C_k = 0$ , takže (17.24) se redukuje na tvar

$$X_k(x) = D_k \sin \sqrt{\lambda_k} x. \quad (17.25)$$

Funkci (17.25) podrobíme druhé okrajové podmínce  $X(l) = 0$ ; dostaneme:

$$D_k \sin \sqrt{\lambda_k} l = 0. \quad (17.26)$$

Protože  $X$  nesmí být identicky nulová, platí  $D_k \neq 0$ , takže z (17.26) plyne

$$l \sqrt{\lambda_k} = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Hodnoty konstant  $\lambda_k$  jsou tedy dány předpisem

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (17.27)$$

a pro nenulová řešení  $X_k$  úlohy (17.21), (17.23) platí (při  $\lambda = \lambda_k$ ) vyjádření

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17.28)$$

přičemž multiplikativní konstantu jsme pro jednoduchost položili rovno jedné. Pokud se čtenáři zdají právě provedené úvahy povědomé, pak je jeho dojem správný. Diskuse vedoucí k nalezení *nenulového* řešení dané okrajové úlohy byla zcela analogicky provedena v příkladu 14.5 při hledání kritických sil

ve úloze vzpěrné pružnosti. Vztahy (17.27), resp. (17.28) představují tzv. *vlastní hodnoty*, resp. *vlastní funkce* okrajové úlohy (17.21), (17.23).

Nyní se budeme zabývat řešením rovnice (17.22). Dosadíme do ní za  $\lambda_k$  ze vztahu (17.27) a píšme ji ve tvaru

$$\ddot{T}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = 0, \quad (17.29)$$

kde indexem  $k$  u  $T$  vyjadřujeme, že jsme do (17.22) dosadili  $k$ -tou vlastní hodnotu. Obecné řešení rovnice (17.29) nyní můžeme psát ve tvaru

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{ck\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ck\pi t}{l}. \quad (17.30)$$

Dosadíme-li vztahy (17.28) a (17.30) do (17.18), dostaneme vyjádření

$$u_k(x, t) = \sin \frac{k\pi x}{l} \left( A_k \cos \frac{ck\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ck\pi t}{l} \right). \quad (17.31)$$

Množina funkcí  $\{u_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$  tedy představuje úplné řešení naší pomocné úlohy: každá funkce  $u_k(x, t)$  je řešením rovnice (17.15) a vyhovuje okrajovým podmínkám (17.17), je tvaru (17.18) a není přitom identicky rovna nule. Fyzikální význam funkcí  $u_k(x, t)$  je přitom následující: jsou to stojaté vlny na struně, přičemž  $u_1(x, t)$  je první harmonická,  $u_2(x, t)$  druhá harmonická atd.

Pomocí funkcí  $u_k(x, t)$  nyní zkonstruujeme řešení dané počátečně-okrajové úlohy (17.15)–(17.17). Připomeňme, že tyto funkce jsou řešeními rovnice (17.15) a vyhovují podmínkám (17.17), a to při libovolné volbě konstant  $A_k, B_k$  ve vyjádření (17.31). Tuto vlastnost má zřejmě podle principu superpozice každý konečný součet funkcí  $u_k(x, t)$ .

Hledejme nyní řešení úlohy (17.15)–(17.17) ve tvaru nekonečné řady

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t),$$

tedy

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \left( A_k \cos \frac{ck\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ck\pi t}{l} \right). \quad (17.32)$$

Konstanty  $A_k, B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) určíme tak, aby byly splněny počáteční podmínky (17.16). Za předpokladu, že řadu (17.32) lze derivovat podle proměnné  $t$  člen po členu, platí

$$u'_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ck\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \left( -A_k \sin \frac{ck\pi t}{l} + B_k \cos \frac{ck\pi t}{l} \right). \quad (17.33)$$

Z (17.16), (17.32) a (17.33) nyní plyne, že hledáme  $A_k, B_k$  tak, aby platilo

$$g_1(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad g_2(x) = u'_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ck\pi}{l} B_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Necht'  $A_k$ , resp.  $(ck\pi/l)B_k$ , jsou Fourierovy koeficienty funkcí  $g_1$ , resp.  $g_2$  při rozvoji těchto funkcí na  $(0, l)$  do sinové řady. Z teorie trigonometrických Fourierových řad nyní plynou vzorce pro výpočet těchto koeficientů:

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^l g_2(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (17.34)$$

Protože funkce  $g_1$  a  $g_2$  jsou podle předpokladu spojité a mají po částech spojitou první derivaci, rovnají se tyto funkce skutečně svým trigonometrickým Fourierovým řadám (viz větu 4.13 a poznámku 4.14), a proto  $u$  splňuje také počáteční podmínky (17.16).

Je však třeba zdůraznit, že řešení úlohy (17.15)–(17.17) jsme dostali pouze formálně, a to ve tvaru nekonečné řady (17.32), kde koeficienty  $A_k, B_k$  jsou dány vztahy (17.34). Je tedy nutno se zabývat otázkou, zda součet řady (17.32) splňuje jak diferenciální rovnici (17.15), tak i příslušné okrajové podmínky (17.17). V obecném případě (tj. pro obecnou funkci  $g_1$  a  $g_2$ ) tento požadavek není splněn (např. součet řady (17.32) nemusí mít ani druhé derivace podle  $x$  a podle  $t$ , a tedy do dané rovnice nelze tento součet vůbec dosadit). V takovém případě uvažujeme pouze konečný součet řady (17.32), tj.

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi x}{l} \left( A_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ak\pi t}{l} \right). \quad (17.35)$$

Z předcházejících úvah plyne, že funkce (17.35) splňuje přesně danou rovnici (17.15) a okrajové podmínky (17.17), a nepřesně splňuje počáteční podmínky (17.16). Je však přirozené očekávat, že sečteme-li dostatečně mnoho členů u řady (17.32), pak lze tuto nepřesnost tolerovat.

### Řešení rovnice vedení tepla Fourierovou metodou

Mějme tuto počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla v jedné dimenzi:

$$u'_t = \kappa u''_{xx}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (17.36)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < l, \quad (17.37)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (17.38)$$

kde  $g$  je spojitá funkce mající po částech spojitou derivaci na  $\langle 0, l \rangle$ . Úlohu (17.36)–(17.38) lze interpretovat např. jako rovnici vedení tepla v tenké na povrchu izolované tyči o počáteční teplotě  $g(x)$ , jejíž konce jsou ponořeny v nádobě obsahující směs vody a ledu, tj. jsou udržovány na nulové teplotě.

Při řešení úlohy (17.36)–(17.38) začneme opět s touto pomocnou úlohou:

*Najít všechna řešení rovnice (17.36), která nejsou identicky rovna nule, vyhovují okrajovým podmínkám (17.38) a která lze psát ve tvaru*

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (17.39)$$

Vyřešíme tedy nejprve tuto pomocnou úlohu. Dosazením (17.39) do (17.36) a vydělením získaného vztahu součinem  $\kappa XT$  dostaneme (zdůvodnění je zcela stejné jako v případě úlohy s vlnovou rovnicí):

$$\frac{\dot{T}(t)}{\kappa T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (17.40)$$

kde  $\lambda$  je konstanta, jejíž hodnotu je třeba určit. Ze vztahu (17.40) potom dostáváme tyto dvě LODR:

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) + \lambda \kappa T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned} \quad (17.41)$$

Dosadíme-li dále (17.39) do (17.38), potom požadavek netriviálnosti řešení ve tvaru (17.39) dá okrajové podmínky

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (17.42)$$

Dostali jsme tedy úlohu vlastních hodnot ve tvaru (17.41), (17.42). Analogicky jako v případě vlnové rovnice dospějeme k závěru, že vlastní hodnoty této úlohy jsou

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

a jim odpovídající vlastní funkce jsou

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zbývá nalézt ke každé vlastní hodnotě  $\lambda_k$  funkci  $T_k$ , abychom naši pomocnou úlohu vyřešili. Budeme tedy řešit rovnici

$$\dot{T}_k(t) + \lambda_k x T_k(t) = 0.$$

Separujeme proměnné

$$\frac{dT_k}{T_k} = -\lambda_k x dt.$$

Odtud

$$T_k(t) = A_k e^{-\lambda_k x t}.$$

Podle (17.39) tedy dostáváme nekonečně mnoho řešení  $u_k$  naší pomocné úlohy ve tvaru

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = A_k \sin \frac{k\pi x}{l} e^{-x k^2 \pi^2 t / l^2}.$$

Řešení původní úlohy (17.36)–(17.38) hledíme opět ve tvaru nekonečné řady

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} e^{-x k^2 \pi^2 t / l^2}, \quad (17.43)$$

kde koeficienty  $A_k$  určíme dosazením počáteční podmínky (17.37) do (17.43), tj.

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x).$$

Z teorie trigonometrických Fourierových řad plyne vyjádření pro  $A_k$ :

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (17.44)$$

Zbývající úvahy, týkající se souvislosti vztahů (17.43), (17.44) s řešením úlohy (17.36)–(17.38), jsou nyní analogické jako v případě vlnové rovnice.

**Poznámka 17.1 – obecnější použití Fourierovy metody.** Fourierovu metodu řešení počátečně-okrajových úloh pro PDR lze užít i v obecnějších souvislostech. Bez větších obtíží ji lze zobecnit např. na případ nehomogenní rovnice vedení tepla s nehomogenními okrajovými podmínkami nebo na případ, kdy uvažovaná PDR je lineární rovnicí s nekonstantními koeficienty. Potíže rovněž nečiní ani případné zavedení Neumannových okrajových podmínek do uvedených úloh.

### Příklady k procvičení

**Cvičení 17.2.** Napište rovnici vedení tepla v tyči délky  $l$  v jedné prostorové dimenzi, víte-li, že měrná tepelná kapacita materiálu tyče je  $c = 450$ , koeficient tepelné vodivosti je  $k = 80$  a hustota materiálu je  $\rho = 7870$ . V materiálu nevzniká žádné dodatečné teplo. Rovnici dále doplňte počáteční podmínkou tak, aby reprezentovala konstantní teplotu v čase  $t = 0$  (konstantu si zvolte), a okrajové podmínky tak, aby jeden konec byl izolovaný a druhý byl udržován na konstantní teplotě, hodnotu si opět zvolte.

**Cvičení 17.3.** Rozhodněte, zda dané funkce vyhovují Laplaceově rovnici v oblasti  $\Omega$ :

- a)  $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \Omega = \mathbb{R}^2;$   
 b)  $u(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};$   
 c)  $u(x, y) = x^2 y^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2.$

**Výsledky.** a) Ano; b) ano; c) ne.

**Cvičení 17.4.** Uvažujte rovnici vedení tepla  $u'_t = \kappa(u''_{xx} + u''_{yy}) + f(x, y)$  pro  $(x, y, t) \in \Omega \times I$ , kde  $\Omega$  je ohraničená oblast v  $\mathbb{R}^2$ ,  $I = (0, T)$  je časový interval,  $\kappa > 0$  je koeficient tepelné difuzivity a  $f(x, y)$  je tepelná intenzita vnitřních zdrojů (která nezávisí na čase  $t$ ).

- a) Napište ustálený (tj. v čase se nevyvíjející) tvar této rovnice.
- b) Rovnici z bodu a) doplňte homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou.

**Cvičení 17.5.** Formulujte rovnici kmitání struny a veličinám vystupujícím v rovnici přiřaďte fyzikální význam. Rovnici doplňte vhodnými (konkrétními) počátečními a okrajovými podmínkami a fyzikálně je interpretujte.



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



## Studium moderní a rozvíjející se techniky VUT

CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013325