



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



DIDAKTICKÁ KAZUISTIKA

Délka kružnice

VYUČOVACÍ PŘEDMĚT: MATEMATIKA (3. ročník osmiletého gymnázia)

AUTOR: Jana SLEZÁKOVÁ

Slovanské gymnázium, Olomouc
Katedra experimentální fyziky, Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Anotace:

Pro potřeby této kazuistiky byl využit záznam výuky pořízený dne 4. 6. 2019 v rámci projektu CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000660 *Podpora společenství praxe jako nástroj rozvoje klíčových kompetencí*.

Výuková situace, která je předmětem studia, byla pořízena z hodiny matematiky v tercii osmiletého gymnázia na Církevním gymnáziu Německého řádu, spol. s r.o. v Olomouci. Přítomno bylo 22 žáků.

Na vyučovací hodinu měli žáci k dispozici pracovní list, který jim byl zaslán vyučující předcházející hodinu. Studovaná hodina má tři části. Učitelka začíná vyučovací hodinu pokynem, že žáci budou pracovat ve dvojicích, přičemž každá dvojice bude mít k dispozici alespoň jedno víčko na zavařování. Dále upozorní žáky na to, aby měli na lavici tablet, kalkulačku, pravítko a kdo chce, tak sešit. V první části hodiny probíhá měření jednotlivých víček (průměr, obvod) pomocí provázku a pravítka. Žáci pracují ve dvojicích. Druhá část je zaměřena na společné vyplňování připravených pracovních listů. Následuje odvození důležitého vztahu vyjadřujícího podíl délky kružnice a průměru kružnice. Třetí část hodiny je zacílena na procvičení uvedeného vztahu a dalších souvislostí spojených s délkami částí kružnice (půlkružnice, čtvrtkružnice).

Výuková situace, kterou se zabývá tato kazuistika, nastala ve druhé části (čas 10:55 - 39:40).

Činnosti učitele a žáků:

Ve zkoumané vyučovací hodině se řešila problematika, jakým způsobem se vypočítá délka libovolné kružnice nebo obvod kruhu. Učitelka zahájila první část aktivity slovy: „Otevřete si pracovní listy, a co vidíte? O čem si myslíte, že se dnes budeme bavit?“ V této části hodiny měli žáci (po dvojicích) za úkol zapsat naměřené údaje (průměr libovolného předmětu tvaru kruhu a jeho délku) do připraveného pracovního listu v tabletu. Pracovní list obsahoval tabulku o třech sloupcích. Do prvního sloupce měli žáci doplnit délku kružnice v centimetrech, ve druhém sloupci uváděli průměr a do třetího sloupce měla příslušná dvojice doplnit poměr – délka kružnice/průměr kruhu.

Učitelka vyzvala první dvojici a ptá se, co napsaly dívky do prvního řádku. Dívka Tereza diktuje, že naměřila obvod „dvacet šest celá pět, průměr osm celá pět a poměr tři celá jedenáct“. Učitelka postupně vyzve další dvojice a sama zapisuje uvedené údaje na interaktivní tabuli. Žáci si v lavicích hodnoty zapisují prstem na tabletu. Ve všech případech žáci říkají, že naměřili obvod kružnice, dále všechny děti včetně učitelky špatně skloňují při čtení desetinných čísel. Učitelka často používá slovo „oukej, super“. V prvních dvou sloupcích učitelka k naměřeným údajům správně doplňuje také jednotky, ve třetím sloupci však ne.

Možná by stálo za zvážení uvést, že když se pracuje s poměrem, tak se jednotky za hodnotou neuvádí. Po vyplnění pracovního listu s připravenou tabulkou se učitelka ptá slovy: „Co pozorujeme? Čeho jste si všimli?“ Někteří žáci jen tak sedí, jiní si něco píšou do tabletu, část odpovídá, že všechno „začíná trojkou.“ Učitelka opakuje, že všechno „začíná trojkou“ a současně se ptá, čím to asi bude. Co si myslí? Jeden student reaguje slovy: „Měla jste štěstí a zrovna jste vybrala správné objekty.“ Učitelka odpoví: „Právě že ne, já vám to vysvětlím. Poměr mezi obvodem a průměrem je vždycky stejný. Proč nám to ale tak nevychází? Proč nám vyšlo skoro stejně?“ Opět jeden žák odpoví: „Neměříme přesně.“ Učitelka reaguje: „Výborně, může se stát, že nejsme úplně přesní, a co si myslíte, že je ta správná hodnota, která by nám měla vyjít?“ Žáci jeden přes druhého říkají, že tři celá čtrnáct. Opět se ptá, co je to za „číslíčko“ a děti odpoví pí. Dále komentuje slovy, že známe hodnotu pí a také, že toto číslo vyznačuje následující poměr. Následně na tabuli črtá libovolnou kružnici, současně se ptá dětí, jak označujeme její obvod. Pravděpodobně má na mysli délku kružnice. Do obrázku vyznačí střed kružnice, její průměr a vedle obrázku pak napíše vztah mezi průměrem a délkou kružnice. Zdůrazňuje přitom, že poměr „obvodu ku průměru je vždycky konstantní a je roven číslu pí“. Vyzve žáky, aby si toto číslo zadali do kalkulačky a zjistili, na kolik desetinných míst je v ní uvedeno. Žáci jeden přes druhého vykřikují 14159265358..... Učitelka to uzavírá slovy: „Výborně, takže my jsme zjistili, že tady ten poměr obvodu ku průměru je konstantní.“ Učitelka se dále ptá, jak se změní vztah v případě, že budeme mít k dispozici poloměr kružnice. Jedna dívka správně uvede, že vztah bude ve tvaru „o děleno dvě r“. Učitelka dále vede dialog slovy, proč dvě r. Dívka opět reaguje správně, že se jedná o průměr, který je dvojnásobkem poloměru. Učitelka na tabuli napíše vztah, ve kterém figuruje poloměr libovolné kružnice. Další otázka byla opět položena celé třídě, aby z daného vztahu pro určení délky kružnice pomocí poloměru vyjádřili právě délku kružnice. Pozitivní hodnocení učitelky zasluhuje neustálé pokládání kontrolních otázek ve smyslu: „Co nám dává tento vzoreček?“, „K čemu jsme dospěli?“, „Co to znamená?“. Na většinu otázek si však odpoví sama. Po ukončení této aktivity, kdy žáci měli za úkol vyplnit na tabletu pracovní list a společně s učitelkou byl odvozen důležitý vztah týkající se výpočtu délky kružnice nebo obvodu kruhu, měla být zdůrazněna důležitost čísla pí - Ludolfovy konstanty z hlediska historického a jeho význam nejenom v matematice. Možná by v této fázi bylo na místě vyzvat žáky, aby si odvozený vztah zapsali do sešitu. Žáci však nadále sledují tablet nebo učitelku, která přistupuje k učitelskému stolu a na monitoru přepíná na další pracovní list.

Druhou část učitelka zahajuje slovy: „Chceme sepsat, co pozorujeme, a doplnit tady tuto pasáž.“ Na interaktivní tabuli je promítnut další pracovní list, který spočívá v doplňování chybějících slov a výrazů do textu. První žák Honza je tážán, co pozoruje. Učitelka stojí u tabule a sama doplňuje do textu chybějící pasáže. Žáci sedí a pozorují učitelku. V první větě doplňují na základě pozorování (viz vyplněná předchozí tabulka ze zaslání pracovního listu), že podíl obvodu ku průměru je skoro stejný. Uvádí, že měli pár odchylek, které jsou způsobené nepřesným měřením či na základě poznámky jednoho studenta „víčka jsou křivé“. Učitelka doplňuje slovy „změříme aspoň trochu špatně“. Sama doplňuje v textu slovo konstantní a vyzve žáky, aby jí odpověděli, co znamená konstantní. Jeden žák odpoví stejný.

Učitelka ho povzbudí slovy „výborně, je pořád stejný“. V další větě opět sama doplní konstantu π a komentuje slovy „to je to číslíčko, které jsme doplňovali, a značí se právě řeckým písmenem π “. I tady bych doporučila zdůraznit význam této konstanty, která se nazývá Ludolfovo číslo - za celou vyučovací jednotku tento název nebyl zmíněn.

V další větě, kterou sama přečetla z tabule, je řeč o iracionálním čísle. Učitelka opět vyzývá všechny žáky, aby jí řekli, co to slovo znamená. Žáci monotónním hlasem odpovídají: „Je nekonečné“, „že nejde“, „že je nikdy nekonečné“. Učitelka tuto diskusi uzavře slovy: „Je nikdy nekončící a navíc v tom zápisu π se nenajde úsek, který se opakuje“. I zde by stálo za povšimnutí uvést příklady dalších iracionálních čísel, např. druhá odmocnina z čísla dvě apod., souvislost mezi těmito čísly, kde se s nimi setkali, jak je to možné, apod. Dále se při vyplňování chybějících slov či výrazů zmiňuje, aby si žáci na tabletu nebo na klasické kalkulačce našli Ludolfovo číslo a uměli s ním pracovat. Jedna z dívek uvádí, že číslo na kalkulačce najdeme pomocí tlačítka „shift“. Jeden žák bez vyzvání řekne, že když π není k dispozici na kalkulačce, tak se dá počítat s hodnotou tři celé čtrnáct. Zde by bylo na místě doplnit poznámku, že má pravdu, ale je třeba si uvědomit, že se nejedná o dvě stejná čísla. Učitelka dále uvádí, že pokud žáci budou počítat na papír, tak s hodnotou 3,14, pokud budou mít zadání na tabletu, tak s celou hodnotou π . Poslední odstavec na vyzvání učitelky doplní žákyně Bibi, opět mluví po vzoru učitelky o obvodu kružnice, má na mysli délku kružnice. Terminologie, která se v hodině opakovaně používá, je matematicky velice nepřesná. V poslední větě se měl doplnit vzorec pro výpočet délky kružnice. Učitelka zdůraznila, že délku budou žáci označovat velkým písmenem „o“. V tomto případě se jeví označení jako nešťastné, neboť velkým písmenem „o“ se v matematice označuje osová souměrnost v rovině. Na závěr této druhé části uvedla, že doufá, že si napsali všechno, co si řekli. Pravděpodobně měla na mysli, že si vše poznačili prstem do tabletu.

Následující část hodiny se týkala řešení konkrétních příkladů na procvičení vzorce pro výpočet délky kružnice. Učitelka vyzve žáky, aby si otevřeli sešity a napsali si nadpis „Obvod kružnice“. Mezitím promítne na interaktivní tabuli zadání příkladu, ve kterém se má vypočítat obvod kružnice, pokud je zadán průměr kružnice. Úloha měla tři podúlohy - průměr byl zadán v různých jednotkách délky. Učitelka se opět snažila aktivovat třídu tím, že se ptala na vzorec pro výpočet délky kružnice. Jedna dívka položila doplňující dotaz, na kolik desetinných míst se má výsledek zaokrouhlit. Učitelka odpoví slovy: „Zkuste na dvě desetinná čísla“. Pravděpodobně měla na mysli dvě desetinná místa. Žáci počítají, učitelka prochází mezi lavicemi a kontroluje jejich výpočty. Komentuje slovy, že mají počítat s celou konstantou π , správně zaokrouhlovat, že délku kružnice počítáme v „klasických jednotkách“. Má na mysli v jednotkách délky, chce zdůraznit, že nepletete jednotky krychlové nebo „čtvercové“, chtěla říct čtverečné. Žáci jsou při výpočtech velmi pomalí. Při řešení této úlohy měli za úkol mezi sebou vynásobit dvě čísla (konstantu π s příslušným průměrem kružnice) a současně správně uvést jednotky, ve kterých úlohu počítají. Při této aktivitě vyzvala žáky k tabuli, aby zapsali výsledek, ke kterému dospěli. Po skončení této úlohy by bylo vhodné

provést rychlou kontrolu sešitů, jestli měli všichni žáci v sešitě uvedený příklad včetně řešení. Učitelka se i nadále snaží o komunikaci s třídou, pokládá návodné otázky.

Následující úloha je založena na stejném principu. Opět se má vypočítat délka kružnice, k dispozici je poloměr kružnice. Učitelka upozorní žáky, že první hodnotu pro daný poloměr vypočítají bez kalkulačky. Na žácích je vidět nespokojenost. Nastala situace, kdy žáci jsou nuceni prokázat znalost písemného násobení desetinných čísel. Učitelka opět prochází mezi lavicemi a snaží se žákům poradit, jak co nejefektivněji postupovat při výpočtu. Navádí žáky, aby nejprve vynásobili poloměr kružnice číslem dvě a poté teprve číslem 3,14. V tuto chvíli nastává častý jev, kdy žáci jeden přes druhého vykřikují výsledek, který je ve většině případů nesprávný. Myslím si, že v tento okamžik měla učitelka zasáhnout a vyzvat jednoho z žáků, aby šel k tabuli a příklad vyřešil. Na většině žáků se projevil fakt, že písemné násobení nemají dostatečně zafixované. V momentě, kdy neměli k dispozici kalkulačku, kterou uměli na tabletu perfektně ovládat, byli bezmocní. Také nebyli schopni správně odhadnout výsledek bez počítání. Nakonec jedna dívka správně uvedla výsledek a učitelka tuto debatu ukončila slovy „tak počítáme béčko s kalkulačkou“.

Učitelka dále uvádí, že vždycky při výpočtu máme přibližnou hodnotu, avšak nezdůraznila zápis této skutečnosti. V průběhu této aktivity jeden žák měl na učitelku dotaz týkající se toho, jak vlastně ty kalkulačky počítají. Učitelka odpoví: „Počítají jen do určitého desetinného místa, nemůžou počítat s celým číslem, protože by nedošly ku žádnému konci. Takže záleží na té aproximaci, na přesnosti té kalkulačky, jaký výsledek dostaneme, většinou se počítá těch deset desetinných míst tam dostaneme“. Její odpověď je nesrozumitelná, nikdo s žáků se tím dál nezabýval. Ve třetí podúloze byl poloměr kružnice zadán jako iracionální číslo druhá odmocnina ze dvou. Bez povšimnutí se učitelka zajímala o výsledek, který jí byl sdělen. Jediné, na co se zeptala, bylo, jakým způsobem do kalkulačky zadáváme toto číslo. Následně hned přistoupila k další úloze, ve které byla zadána délka kružnice.

Ve třetí části hodiny se řešil příklad, ve kterém se měl určit poloměr a průměr dané kružnice, když byla zadána délka kružnice. Učitelka opět stojí u tabule, kreslí kružnici, neuvedla její střed ani označení. Žáky ani nevyzvala, aby si úlohu zapsali do sešitu. Někteří z nich si začali sami úlohu počítat, jiní učitelku pozorují. Následně vyzvala jednu dívku, která na tabuli provedla výpočet ve smyslu vydělení dvou čísel a následné zapsání požadovaných výsledků. Bylo to správně. Zápis na tabuli však působil velmi chaoticky, neboť učitelka měla trvat na jednotlivých krocích výpočtu včetně slovní odpovědi. Tyto náležitosti bez slovní odpovědi učitelka sama doplnila na tabuli. Chybělo zdůraznění nutnosti těchto kroků. Právě v matematice se snažíme učit žáky nejprve vyjádřit z daného vzorce, co chceme počítat, a teprve potom dosazujeme. Dále dbáme na zápis dané úlohy včetně slovní odpovědi.

V závěru hodiny učitelka přešla na části kružnice a výpočet jejich délek. Tento problém však nedořešila a hodinu ukončila slovy, že budou pokračovat příště.

Velmi kladně lze hodnotit, že učitelka po celou dobu vedla se žáky dialog a neustále se snažila je aktivizovat. Žáci pracovali spontánně. Byla zde ukázka přirozené učitelčiny autority. Velkou snahou učitelky byla vnímavost k situaci ve vyučování s důrazem zapojit do výuky všechny žáky. Chyběla však dynamika dané hodiny. Kladně lze hodnotit to, že učitelka střídala různé metody práce (skupinová, samostatná). Za povšimnutí také stojí aktivita na začátku vyučovací hodiny, a to, že žáci provedli výzkum, na jehož základě pak společně s učitelkou odvodili důležitý vztah pro výpočet délky kružnice. Vyučovací hodina byla promyšlená, bylo by však vhodné i v průběhu práce s interaktivní tabulí využívat tabuli klasickou. Uvedená hodina představovala nové učivo pomocí aktivit spojených s vyplňováním pracovních listů a problémovou výukou. Ukázalo se, že někteří žáci bez pomoci techniky nebyli schopni zvládnout základné početní operace. Tento moment ukazuje podcenění fáze uchopení situace.

Analýza:

Struktura obsahu – rozbor s využitím konceptového diagramu

Tematická vrstva obsahuje využití interaktivní tabule při řešení problémových úloh na výpočet délky kružnice, hledání strategie řešení, představení si dané situace v mysli a hledání způsobu, jak matematickou úlohu co nejefektivněji vyřešit.

Konceptová vrstva zahrnuje

- výpočet poloměru a průměru kružnice při zadané délce kružnice,
- další souvislosti spojené s iracionálními čísly, jejich geometrickým významem,
- další propojení s poznatky získanými z dřívějších hodin – převody jednotek, zaokrouhlování, odhad výsledku matematizované reálné situace, práce s chybou.

Konceptem celé situace je pochopení a správné užití vzorce pro výpočet délky kružnice.

Kompetenční vrstvu tvoří zejména kompetence komunikační, kompetence k řešení problému a kompetence k učení. Tato vrstva je v tomto případě úzce provázána s konceptovou vrstvou, žáci aktivně spolupracují s učitelkou, s její pomocí interpretují výsledky řešení jednotlivých úloh. Všechny zadané úlohy byly žáky vyřešeny.

Transkript výukové situace: v externím souboru

Vědecká složka dané výukové situace zahrnuje odvození vzorce pro výpočet délky kružnice, uvědomění si geometrického významu Ludolfova čísla, znalost iracionálních čísel, převádění jednotek délky.

Technická složka byla zvládnuta bez problémů, žáci pracovali samostatně ve dvojicích, využívali přitom tablet, společně s učitelkou pracovali s interaktivní tabulí.

Metodická složka obsahuje odvození vzorce pro výpočet délky kružnice na základě praktických činností spojených s měřením objektů tvaru kruhu dostupnými prostředky (provázek, pravítko, krejčovský metr, apod.), procvičování, rozvoj matematického myšlení, rozvíjení schopnosti matematizace reálné situace, umění naslouchat druhým, rozvoj kompetencí komunikační a sociální, snaha řešit problémové úlohy - problémová výuka.

Alterace:

Pozitivně lze vnímat snahu učitelky udržet pozornost všech žáků. Neustálými dotazy se snažila o jejich neustálé zapojení do výuky. Určitě by stálo za zvážení více v průběhu vyučovací hodiny využít klasickou tabuli a dohlédnout, aby žáci měli zápis v sešitě. Ukázalo se, že pokud žáci měli sami počítat bez užití techniky (tablet), byli tím překvapeni a někteří z nich nebyli schopni se dobrat správného výsledku. Současně je třeba zdůraznit nedostatečné používání spisovného jazyka a v některých případech nesprávné matematické terminologie.

Učitelka v průběhu vyučování vystupovala jako iniciátor a moderátor žákova učení. Její forma výuky rozvíjela u žáků matematické myšlení. Žáci měli pocit, že k řešení problému dospěli sami. Způsob, jakým učitelka vedla výuku, odrážel prvky konstruktivismu. Hodina měla rozmanitou strukturu, učitelka se snažila o aktivní zapojení všech žáků do výuky. Učitelka dala prostor žákům vyjádřit svůj názor. Sebereflexe na závěr hodiny neproběhla.

Návrhy na alteraci:

- na začátku hodiny jasně stanovit cíl hodiny, příp. podrobněji seznámit žáky s její náplní,
- na začátku hodiny provést kontrolu domácího úkolu (pravděpodobně nebyl zadán),
- na konci hodiny rozhodně nějakou úlohu na domácí procvičování zadat,
- zpřesnit vyjadřování učitele - učitelka mnohdy špatně skloňuje, žáci opakují ve stejném duchu po učitelce desetinná čísla, nikomu nepřijde divné, že to není česky,
- dodržovat správnou terminologii, nezaměňovat pojmy desetinná místa a desetinná čísla ve smyslu zaokrouhlování
- větší pozornost věnovat pomalejším žákům, rychlejším např. zadat úkol navíc,
- více dbát na zápisy do sešitu, na jejich důležitost,

-
- při zápisu na tabuli vyžadovat po žácích preciznost a přesnost, dodržovat zásady řešení matematických úloh,
 - na závěr by bylo vhodné stručně zhodnotit práci žáků v hodině (např. pochvala),
 - v průběhu vyučovací hodiny nebyla zdůrazněna důležitost Ludolfova čísla, dokonce tento název v hodině nezazněl,
 - při odvození vzorce pro výpočet délky kružnice se mohlo poukázat na historický význam, např. že Babyloňané počítali délku kružnice s hodnotou 3, což přibližně odpovídalo právě číslu π a první teoretický výpočet čísla π provedl až Archimédes,
 - ve vyučovací hodině vůbec nebylo zmíněno, že podíl délka kružnice a průměr kružnice nezávisí na zvolené kružnici,
 - mluvit zásadně spisovně,
 - vyvarovat se častého opakování parazitických slov (super, OK, tohleto),
 - zvážit změnu v plánovaných aktivitách, tj. druhou část hodiny nahradit klasickým procvičováním formou řešení příkladů na tabuli a do sešitu.

Literatura:

Janík, T., Slavík, J., Najvar, P. (2011). *Kurikulární reforma na gymnáziích. Od virtuálních hospitací k videostudiím*. Praha: NÚV.

Janík, T. a kol. (2016). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Brno: Masarykova univerzita.

