

Rozvoj a transformace doktorského studia na ČVUT FEL v Praze  
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16\_018/0002185

**FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**

## **Fuzzy Logic**

Autor: prof. Ing. Mirko Navara, CSc.

Použité nákresy a obrázky pochází z vlastních zdrojů autora nebo jsou převzaty z veřejných zdrojů, jako jsou Wikimedia Commons, Pixabay, Pexels.



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

# Fuzzy množiny

Mirko Navara

[http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/fl/fset\\_print.pdf](http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/fl/fset_print.pdf)

26. října 2022

## Obsah

<b>1</b>	<b>Pojem fuzzy množiny</b>	<b>1</b>
1.1	Minimum o klasických množinách	1
1.2	Zavedení fuzzy množin	2
<b>2</b>	<b>Systém řezů fuzzy množiny</b>	<b>2</b>
2.1	Věta o systému řezů	3
2.2	Reprezentace fuzzy množin	3
2.3	Fuzzy inkluze	3
2.4	Řezová konzistence	4
<b>3</b>	<b>Operace s fuzzy množinami</b>	<b>4</b>
3.1	Operace s ostrými množinami	4
3.2	Zákony Booleovy algebry	4
3.3	Fuzzy negace	4
3.4	Fuzzy doplněk	5
3.5	Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)	6
3.6	Fuzzy průnik	8
3.7	Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)	8
3.8	Fuzzy sjednocení	9
3.9	Fuzzy výrokové algebry	10
3.10	Fuzzy implikace	10
3.11	Fuzzy biimplikace (ekvivalence)	11
<b>4</b>	<b>Fuzzy relace</b>	<b>12</b>
4.1	Klasické relace	12
4.2	Fuzzy relace	12
4.3	Speciální ostré relace	12
4.4	Speciální fuzzy relace	12
4.5	Projekce fuzzy relací	13
4.6	Cylindrické rozšíření	13
<b>5</b>	<b>Princip rozšíření</b>	<b>13</b>
5.1	Rozšíření binárních relací na ostrémnožiny	13
5.2	Rozšíření binárních relací na fuzzymnožiny	14
5.3	Konvexní fuzzy množiny	14
5.4	Fuzzy čísla a fuzzy intervaly	15
5.5	Binární operace s fuzzy intervaly	15

## 1 Pojem fuzzy množiny

### 1.1 Minimum o klasických množinách

Abychom se vyhnuli problémům, omezíme se na podmnožiny nějaké **univerzální množiny** (**univerza**)  $X$   
 $\mathcal{P}(X)$  značí množinu všech podmnožin množiny  $X$

Množinu  $A \in \mathcal{P}(X)$  jednoznačně určuje její **charakteristická funkce**  $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Pomocí značení

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \mu_A(x) \in M\}$$

lze psát

$$A = \mu_A^{-1}(\{1\}) = \mu_A^{-1}((0, 1)).$$

Místo  $\mu_A^{-1}(\{1\})$  píšeme  $\mu_A^{-1}(1)$  apod.

Speciálně  $\mu_\emptyset = 0$ ,  $\mu_X = 1$ .

## 1.2 Zavedení fuzzy množin

**Fuzzy podmnožina** univerza  $X$  (stručně **fuzzy množina**) je objekt  $A$ , který popisuje (zobecněná) **charakteristická funkce (funkce příslušnosti)**  $\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$

Alternativní značení:  $A(x)$

„Klasické“ množiny nazýváme v tomto kontextu **ostré** (angl. **crisp, sharp**).

$\mathcal{F}(X)$  značí množinu všech fuzzy podmnožin univerza  $X$

**Obor pravdivostních hodnot** (angl. **range**):  $\text{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : (\exists x \in X : \mu_A(x) = \alpha)\} = \mu_A(X)$

**Výška**:  $h(A) = \sup \text{Range}(A)$

**Nosič** (angl. **support**):  $\text{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} = \mu_A^{-1}((0, 1))$

**Jádro** (angl. **core**):  $\text{core}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \mu_A^{-1}(1)$

## Příklady fuzzy množin

$A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečné fuzzy množiny zapisujeme stručněji např.  $\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4, 1), (5, \frac{1}{4})\}$ .

Alternativní značení:  $\mu_B = \{\frac{1}{2}/3, 1/4, \frac{1}{4}/5\}$ ,  $\mu_B = \frac{1}{2}/3 + 1/4 + \frac{1}{4}/5$ .

## 2 Systém řezů fuzzy množiny

**Definice**: Necht'  $A \in \mathcal{F}(X)$ ,  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pak  **$\alpha$ -hladina** (angl.  **$\alpha$ -level**) fuzzy množiny  $A$  je ostrá množina

$$\mu_A^{-1}(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) = \alpha\}.$$

**Systém řezů** fuzzy množiny  $A$  je zobrazení  $\mathcal{R}_A : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , které každému  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  přiřazuje tzv.  **$\alpha$ -řez** (angl.  **$\alpha$ -cut**)

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \mu_A^{-1}((\alpha, 1)) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

**Systém ostrých řezů** je  $\mathcal{S}_A : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , kde

$$\mathcal{S}_A(\alpha) = \mu_A^{-1}((\alpha, 1)) = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Alternativní značení  $\alpha$ -řezu:  $[A]_\alpha$ ,  $[A]^\alpha$ ,  ${}^\alpha A$ ,  ${}_\alpha A$

$$\begin{aligned} \text{Range}(A) &= \{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mu_A^{-1}(\alpha) \neq \emptyset\}, \\ h(A) &= \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \neq \emptyset\}, \\ \text{Supp}(A) &= \mathcal{S}_A(0), \\ \text{core}(A) &= \mathcal{R}_A(1), \\ \mathcal{R}_A(0) &= X, \\ \mathcal{S}_A(1) &= \emptyset. \end{aligned}$$

## 2.1 Věta o systému řezů

**Věta:** Zobrazení  $M : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$  je systém řezů nějaké fuzzy množiny  $A \in \mathcal{F}(X)$ , právě když

- (R1)  $M(0) = X$ ,
- (R2)  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta)$ ,
- (R3)  $0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha)$ .

**Důkaz:**

‘ $\Rightarrow$ ’: (R1):  $M(0) = \mathcal{R}_A(0) = X$ .

(R2):  $x \in M(\beta) = \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta > \alpha \Rightarrow x \in \mathcal{R}_A(\alpha) = M(\alpha)$ .

(R3) ‘ $\subseteq$ ’: (R2)  $\Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta \rangle : M(\beta) \subseteq M(\alpha) \Rightarrow M(\beta) \subseteq \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \text{(R3) ‘}\supseteq\text{’}: x \in \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha) &= \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} \mathcal{R}_A(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta \rangle : \mu_A(x) \geq \alpha, \\ &\Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta) = M(\beta). \end{aligned}$$

‘ $\Leftarrow$ ’: Dokážeme, že  $M = \mathcal{R}_A$ , kde  $\mu_A(x) := \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in M(\alpha)\}$ .

‘ $\subseteq$ ’:  $x \in M(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta)$ ,

‘ $\supseteq$ ’:  $x \in \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in M(\alpha)\} \geq \beta$ ,

$$\begin{aligned} &\forall \alpha \in \langle 0, \beta \rangle : x \in M(\alpha), \\ &x \in \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha) = M(\beta). \end{aligned}$$

## 2.2 Reprezentace fuzzy množin

**Horizontální reprezentace:** pomocí systému řezů

**Vertikální reprezentace:** pomocí funkce příslušnosti

Převod z horizontální do vertikální reprezentace:

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\}.$$

**Věta:** Necht’  $A \in \mathcal{F}(X)$ . Pak

$$\mu_A = \sup_{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle} \alpha \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)} = \sup_{\alpha \in \text{Range}(A)} \alpha \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)},$$

kde supremum počítáme po bodech, tj.

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in \text{Range}(A)} \alpha \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)}(x).$$

## 2.3 Fuzzy inkluze

Klasická definice  $A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$  se nehodí, neboť pro fuzzy množiny nemůžeme psát  $x \in A, x \in B$

Nicméně  $A \subseteq B \iff \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B$

Pro  $A, B \in \mathcal{F}(X)$ :

$$A \subseteq B \iff \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B \iff$$

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$$

Důkaz poslední ekvivalence:

‘ $\Rightarrow$ ’: Necht’  $\mu_A \leq \mu_B, x \in \mathcal{R}_A(\alpha)$

$$\alpha \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x), x \in \mathcal{R}_B(\alpha), \text{ tj. } \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$$

‘ $\Leftarrow$ ’: Necht’  $\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\} \\ &\leq \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in \mathcal{R}_B(\alpha)\} = \mu_B(x) \end{aligned}$$

## 2.4 Řezová konzistence

**Vlastnost**  $P$  fuzzy množin  $A_1, \dots, A_n$  je předpis, který argumentům  $A_1, \dots, A_n$  přiřazuje ostrou pravdivostní hodnotu  $P(A_1, \dots, A_n) \in \{0, 1\}$  („predikát“).

Vlastnost  $P$  fuzzy množiny se nazývá

- **řezově dědičná** (angl. **cutworthy**), jestliže

$$P(A_1, \dots, A_n) \Rightarrow (\forall \alpha \in (0, 1) : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \dots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha))),$$

- **řezově konzistentní**, jestliže

$$P(A_1, \dots, A_n) \iff (\forall \alpha \in (0, 1) : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \dots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha))).$$

(0-řezy záměrně neuvažujeme)

## Příklady řezové dědičnosti a konzistence

Inkluze je řezově konzistentní.

**Silná normalita**,  $\exists x \in X : \mu_A(x) = 1$ , je řezově konzistentní.

Ostrost množiny je řezově dědičná, ale není řezově konzistentní.

## 3 Operace s fuzzy množinami

### 3.1 Operace s ostrými množinami

množinové operace	výrokové operace	vztah
$\neg : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$	$\overline{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
$\cap : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\wedge : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$\cup : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\vee : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Pomocí charakteristických funkcí:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

### 3.2 Zákony Booleovy algebry

$$\begin{array}{lll}
 \neg \neg \alpha & = & \alpha, \\
 \alpha \vee \beta & = & \beta \vee \alpha, \\
 (\alpha \vee \beta) \vee \gamma & = & \alpha \vee (\beta \vee \gamma), \\
 \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & = & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), \\
 \alpha \vee \alpha & = & \alpha, \\
 \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) & = & \alpha, \\
 \alpha \vee 1 & = & 1, \\
 \alpha \vee 0 & = & \alpha, \\
 \alpha \wedge \neg \alpha & = & 0, \\
 \neg(\alpha \wedge \beta) & = & \neg \alpha \vee \neg \beta, \\
 \alpha \wedge \beta & = & \beta \wedge \alpha, \\
 (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & = & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\
 \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & = & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \\
 \alpha \wedge \alpha & = & \alpha, \\
 \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) & = & \alpha, \\
 \alpha \wedge 0 & = & 0, \\
 \alpha \wedge 1 & = & \alpha, \\
 \alpha \vee \neg \alpha & = & 1, \\
 \neg(\alpha \vee \beta) & = & \neg \alpha \wedge \neg \beta.
 \end{array}$$

### 3.3 Fuzzy negace

je unární operace  $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  taková, že

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \neg \beta \leq \neg \alpha, \quad (\text{N1})$$

$$\neg \neg \alpha = \alpha. \quad (\text{N2})$$

**Příklad: Standardní negace:**  $\neg_s \alpha = 1 - \alpha$ .

## Vlastnosti fuzzy negací

**Věta:** Každá fuzzy negace  $\neg$  je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\neg 1 = 0, \quad \neg 0 = 1. \quad (\text{N0})$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj.  $\neg^{-1} = \neg$

**Důkaz:**

- Prostá: Je-li  $\neg \alpha = \neg \beta$ , pak  $\alpha = \neg \neg \alpha = \neg \neg \beta = \beta$ .
- Surjektivní („na“): Pro každé  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  existuje  $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$  takové, že  $\alpha = \neg \beta$ , totiž  $\beta = \neg \alpha$ .
- $\Rightarrow$  spojitost a okrajové podmínky.
- Symetrie grafu je ekvivalentní s involutivitou (N2) .

## Věta o reprezentaci fuzzy negací

Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce  $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  byla fuzzy negace, je existence rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**generátor fuzzy negace  $\neg$** ) takové, že

$$\neg = i \circ \neg_s \circ i^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \neg \alpha = i^{-1}(\neg_s i(\alpha)).$$

**Důkaz:** (Dle [Nguyen-Walker].)

- Postačující:  
(N1): Předpokládejme  $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\alpha \leq \beta$ .  
 $i, i^{-1}$  uspořádání zachovávají,  $\neg_s$  obrací:

$$\begin{aligned} i(\alpha) &\leq i(\beta) \\ \neg_s i(\alpha) &\geq \neg_s i(\beta) \\ i^{-1}(\neg_s i(\alpha)) &\geq i^{-1}(\neg_s i(\beta)) \\ \neg \alpha &\geq \neg \beta \end{aligned}$$

$$(\text{N2}): \quad \neg \circ \neg = i \circ \neg_s \circ i^{-1} \circ i \circ \neg_s \circ i^{-1} = i \circ \neg_s \circ \neg_s \circ i^{-1} = i \circ i^{-1} = \text{id},$$

kde id je identita na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

## Možná konstrukce generátoru fuzzy negace

- Nutná: Dokážeme, že

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \neg_s \neg \alpha}{2}$$

je generátorem fuzzy negace  $\neg$ .

$i$  je rostoucí, spojitá,  $i(0) = 0$ ,  $i(1) = 1$ , tedy  $i$  je bijekce na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \neg_s i(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha + \neg_s \neg \alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \neg_s \neg \alpha}{2} = \frac{\neg_s \alpha + \neg_s \neg_s \neg \alpha}{2} = \\ &= \frac{\neg_s \alpha + \neg \alpha}{2} = \frac{\neg_s \neg_s \neg \alpha + \neg \alpha}{2} = i(\neg \alpha). \\ i \circ \neg_s &= \neg \circ i, \text{ neboli } i \circ \neg_s \circ i^{-1} = \neg \end{aligned}$$

**Generátor fuzzy negace není jednoznačně určen.**

## 3.4 Fuzzy doplněk

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg \mu_A(x).$$

Rozlišujeme stejnými indexy jako u fuzzy negací, například  $\overline{A}^s$  je standardní doplněk.

### 3.5 Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)

(angl. **triangular norm**) je binární operace  $\dot{\wedge} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  splňující následující axiomy pro všechna  $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ :

$$\alpha \dot{\wedge} \beta = \beta \dot{\wedge} \alpha \quad (\text{komutativita}) \quad (\text{T1})$$

$$\alpha \dot{\wedge} (\beta \dot{\wedge} \gamma) = (\alpha \dot{\wedge} \beta) \dot{\wedge} \gamma \quad (\text{asociativita}) \quad (\text{T2})$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\wedge} \beta \leq \alpha \dot{\wedge} \gamma \quad (\text{monotonie}) \quad (\text{T3})$$

$$\alpha \dot{\wedge} 1 = \alpha \quad (\text{okrajová podmínka}) \quad (\text{T4})$$

**Věta:**  $\alpha \dot{\wedge} 0 = 0$ .

**Důkaz:** Podle (T3) a (T4) platí:  $\alpha \dot{\wedge} 0 \stackrel{(\text{T3})}{\leq} 1 \dot{\wedge} 0 \stackrel{(\text{T4})}{=} 0$ .

#### Příklady fuzzy konjunkcí

- **Standardní** (**min**, **Gödelova**, **Zadehova** ...):

$$\alpha \dot{\wedge}_S \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- **Součinná** (**produktová**, **pravděpodobnostní**, **Goguenova**, angl. **algebraic product** ...):

$$\alpha \dot{\wedge}_P \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold** ...):

$$\alpha \dot{\wedge}_L \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** ...):

$$\alpha \dot{\wedge}_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

#### Vlastnosti fuzzy konjunkcí

**Věta:**

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \dot{\wedge}_D \beta \leq \alpha \dot{\wedge} \beta \leq \alpha \dot{\wedge}_S \beta.$$

**Důkaz:** Je-li  $\alpha = 1$  nebo  $\beta = 1$ , pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti)  $\alpha \leq \beta < 1$ . Pak

$$\alpha \dot{\wedge}_D \beta = 0 \leq \alpha \dot{\wedge} \beta \leq \alpha \dot{\wedge} 1 = \alpha = \alpha \dot{\wedge}_S \beta.$$

**Věta:** Standardní konjunkce je jediná, která je **idempotentní**, tj.  $\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \dot{\wedge} \alpha = \alpha$

**Důkaz:** Předpokládejme  $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\alpha \leq \beta$ .

$$\alpha = \alpha \dot{\wedge} \alpha \stackrel{(\text{T3})}{\leq} \alpha \dot{\wedge} \beta \stackrel{(\text{T3})}{\leq} \alpha \dot{\wedge} 1 \stackrel{(\text{T4})}{=} \alpha,$$

tedy  $\alpha \dot{\wedge} \beta = \alpha = \alpha \dot{\wedge}_S \beta$ .

Totéž pro  $\alpha > \beta$ .

## Reprezentace fuzzy konjunkcí (obecně)

**Věta:** Necht'  $\wedge_1$  je fuzzy konjunkce a  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  rostoucí bijekce. Pak operace  $\wedge_2 : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  definovaná vzorcem

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta))$$

je fuzzy konjunkce. Je-li  $\wedge_1$  spojitá, je  $\wedge_2$  též spojitá.

**Důkaz:**

- Komutativita (asociativita se dokáže obdobně):

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta)) = i^{-1}(i(\beta) \wedge_1 i(\alpha)) = \beta \wedge_2 \alpha$$

- Monotonie: Předpokládejme  $\beta \leq \gamma$ .

$$\begin{aligned} i(\beta) &\leq i(\gamma), \\ i(\alpha) \wedge_1 i(\beta) &\leq i(\alpha) \wedge_1 i(\gamma), \\ \alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta)) &\leq i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\gamma)) = \alpha \wedge_2 \gamma. \end{aligned}$$

- Okrajová podmínka:

$$\alpha \wedge_2 1 = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(1)) = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 1) = i^{-1}(i(\alpha)) = \alpha.$$

## Klasifikace fuzzy konjunkcí

**Spojitá** fuzzy konjunkce  $\wedge$  je

- archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \alpha \wedge \alpha < \alpha \quad (\text{TA})$$

- striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \forall \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle : \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta < \alpha \wedge \gamma \quad (\text{T3+})$$

- nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

**Příklad:** Součinná konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimédovské (standardní nesplňuje (TA), drastická není spojitá).

## Věta o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí

Operace  $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je striktní fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**multiplikativní generátor**) taková, že

$$\alpha \wedge \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_p i(\beta)) = i^{-1}(i(\alpha) \cdot i(\beta)).$$

Že je podmínka postačující, jsme již dokázali (kromě striktnosti, což je snadné).  
Důkaz nutnosti je mnohem obtížnější.

**Multiplikativní generátor striktní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.**

## Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Operace  $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je **nilpotentní** fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**Łukasiewiczův generátor**) taková, že

$$\alpha \wedge \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_L i(\beta)).$$

**Łukasiewiczův generátor nilpotentní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.**

**Věta:** Necht'  $\wedge$  je **nilpotentní** fuzzy konjunkce. Pak

$$\forall \alpha \in (0, 1) \exists n \in \mathbb{N} : \bigwedge_{k=1}^n \alpha = 0$$



**Důkaz:** Podle reprezentační věty stačí (bez újmy na obecnosti) dokázat větu pro Łukasiewiczovu konjunktci. Pro dostatečně velké  $n$  dostáváme

$$\alpha + \sum_{i=2}^n (\alpha - 1) \leq 0, \quad \bigwedge_L^n \alpha = 0.$$

### 3.6 Fuzzy průnik

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunktce:

$$\mu_{A \sqcap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy konjunkcí)

**Věta: Standardní** průnik je řezově konzistentní.

**Důkaz:** 1. Řezová dědičnost:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{A \sqcap B}(\alpha) &= \{x \in X : \mu_{A \sqcap B}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X : (\mu_A(x) \geq \alpha) \wedge (\mu_B(x) \geq \alpha)\} \\ &= \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in X : \mu_B(x) \geq \alpha\} \\ &= \mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha) \end{aligned}$$

2. Řezy  $\mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha)$  (pro všechna  $\alpha \in (0, 1)$ ) určují jednoznačně fuzzy množinu rovnou  $A \sqcap B$ .

### 3.7 Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)

je binární operace  $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  splňující

$$\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha \quad (\text{komutativita}) \quad (\text{S1})$$

$$\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma \quad (\text{asociativita}) \quad (\text{S2})$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma \quad (\text{monotonie}) \quad (\text{S3})$$

$$\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha \quad (\text{okrajová podmínka}) \quad (\text{S4})$$

**Věta:**  $\alpha \dot{\vee} 1 = 1$ .

**Důkaz:**  $\alpha \dot{\vee} 1 \stackrel{(\text{S3})}{\geq} 0 \dot{\vee} 1 \stackrel{(\text{S4})}{=} 1$ .

#### Příklady fuzzy disjunkcí

- **Standardní** (max, Gödelova, Zadehova ...):

$$\alpha \overset{\text{S}}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$

- **Součinnová** (produktová, pravděpodobnostní ...):

$$\alpha \overset{\text{P}}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (Gilesova, angl. též **bold**, **bounded sum** ...):

$$\alpha \overset{\text{L}}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (slabá, angl. **weak** ...):

$$\alpha \overset{\text{D}}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Einsteinova**

$$\alpha \overset{\text{E}}{\vee} \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

## Vlastnosti fuzzy disjunkcí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \overset{S}{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \overset{D}{\vee} \beta.$$

Standardní disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj.  $\alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha$  pro všechna  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ .

## Dualita

Nechť  $\neg$  je fuzzy negace.

A. Je-li  $\wedge$  fuzzy konjunkce, pak  $\alpha \dot{\vee} \beta = \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$  je fuzzy disjunkce (**duální** k  $\wedge$  vzhledem k  $\neg$ ).

B. Je-li  $\dot{\vee}$  fuzzy disjunkce, pak  $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg \alpha \dot{\vee} \neg \beta)$  je fuzzy konjunkce (**duální** k  $\dot{\vee}$  vzhledem k  $\neg$ ).

**Věta:**

- **Lukasiewiczovy** operace  $\overset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$  jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Součinnové** operace  $\overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$  jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Standardní** operace  $\overset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$  jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.
- **Drastické** operace  $\overset{D}{\wedge}, \overset{D}{\vee}$  jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.

## Klasifikace fuzzy disjunkcí

**Spojité** fuzzy disjunkce  $\dot{\vee}$  je

- **archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \alpha \dot{\vee} \alpha > \alpha \quad (\text{SA})$$

- **striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \forall \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle : \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta < \alpha \dot{\vee} \gamma \quad (\text{S3+})$$

- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

## Věty o reprezentaci fuzzy disjunkcí

**Věta:** Operace  $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je **striktní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  taková, že

$$\alpha \dot{\vee} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \overset{P}{\vee} i(\beta)).$$

**Věta:** Operace  $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je **nilpotentní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**aditivní generátor**) taková, že

$$\alpha \dot{\vee} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \overset{L}{\vee} i(\beta)) = \begin{cases} i^{-1}(i(\alpha) + i(\beta)) & \text{pro } i(\alpha) + i(\beta) \leq 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

## 3.8 Fuzzy sjednocení

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:

$$\mu_{A \dot{\cup} B}(x) = \mu_A(x) \dot{\vee} \mu_B(x).$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy disjunkcí)

**Věta:** **Standardní** sjednocení je řezově konzistentní.

### 3.9 Fuzzy výrokové algebry

černě vyznačené platí vždy

červeně vyznačené platí pro standardní fuzzy operace, ale ne pro některé jiné

modře vyznačené platí jen pro některé volby fuzzy operací (ne pro standardní)

$$\begin{array}{ll}
\neg\neg\alpha &= \alpha, \\
\alpha \dot{\vee} \beta &= \beta \dot{\vee} \alpha, & \alpha \dot{\wedge} \beta &= \beta \dot{\wedge} \alpha, \\
(\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma &= \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma), & (\alpha \dot{\wedge} \beta) \dot{\wedge} \gamma &= \alpha \dot{\wedge} (\beta \dot{\wedge} \gamma), \\
\alpha \dot{\wedge} (\beta \dot{\vee} \gamma) &= (\alpha \dot{\wedge} \beta) \dot{\vee} (\alpha \dot{\wedge} \gamma), & \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\wedge} \gamma) &= (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\wedge} (\alpha \dot{\vee} \gamma), \\
\alpha \dot{\vee} \alpha &= \alpha, & \alpha \dot{\wedge} \alpha &= \alpha, \\
\alpha \dot{\vee} (\alpha \dot{\wedge} \beta) &= \alpha, & \alpha \dot{\wedge} (\alpha \dot{\vee} \beta) &= \alpha, \\
\alpha \dot{\vee} 1 &= 1, & \alpha \dot{\wedge} 0 &= 0, \\
\alpha \dot{\vee} 0 &= \alpha, & \alpha \dot{\wedge} 1 &= \alpha, \\
\alpha \dot{\wedge} \neg\alpha &= \mathbf{0}, & \alpha \dot{\vee} \neg\alpha &= \mathbf{1}, \\
\neg(\alpha \dot{\wedge} \beta) &= \neg\alpha \dot{\vee} \neg\beta, & \neg(\alpha \dot{\vee} \beta) &= \neg\alpha \dot{\wedge} \neg\beta.
\end{array}$$

### 3.10 Fuzzy implikace

je jakákoli operace  $\dot{\rightarrow} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ , která se na  $\{0, 1\}^2$  shoduje s klasickou implikací. Mohli bychom si přát:

$$\alpha \dot{\rightarrow} \beta = 1 \Leftarrow \alpha \leq \beta, \quad (\text{I1a})$$

$$\alpha \dot{\rightarrow} \beta = 1 \Rightarrow \alpha \leq \beta, \quad (\text{I1b})$$

$$1 \dot{\rightarrow} \beta = \beta, \quad (\text{I2})$$

$$\dot{\rightarrow} \text{ je nerostoucí v 1. argumentu a neklesající v 2. argumentu,} \quad (\text{I3})$$

$$\alpha \dot{\rightarrow} \beta = \neg_{\mathbb{S}} \beta \dot{\rightarrow} \neg_{\mathbb{S}} \alpha, \quad (\text{I4})$$

$$\alpha \dot{\rightarrow} (\beta \dot{\rightarrow} \gamma) = \beta \dot{\rightarrow} (\alpha \dot{\rightarrow} \gamma), \quad (\text{I5})$$

$$\text{spojitost.} \quad (\text{I6})$$

### R-implikace (reziduovaná fuzzy implikace, reziduum)

je operace

$$\alpha \xrightarrow{\text{R}} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \dot{\wedge} \gamma \leq \beta\} \quad (\text{RI})$$

kde  $\dot{\wedge}$  je fuzzy konjunkce

(je-li  $\dot{\wedge}$  spojitá, lze supremum nahradit maximem)

### Příklady R-implikací

- Od standardní konjunkce  $\dot{\wedge}_{\mathbb{S}}$  je odvozena **Gödelova implikace**

$$\alpha \xrightarrow{\text{R}}_{\mathbb{S}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá s výjimkou bodů  $(\alpha, \alpha)$ ,  $\alpha < 1$ .

- Od Łukasiewiczovy konjunkce  $\dot{\wedge}_{\text{L}}$  je odvozena **Łukasiewiczova implikace**

$$\alpha \xrightarrow{\text{R}}_{\text{L}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ 1 - \alpha + \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá.

- Od součinné konjunkce  $\dot{\wedge}$  je odvozena **Goguenova** (též **Gainesova**) **implikace**

$$\alpha \xrightarrow[\text{P}]{\text{R}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Má jediný bod nespojitosti,  $(0, 0)$ .

## Vlastnosti R-implikací

**Věta:** Nechť  $\dot{\wedge}$  je spojitá fuzzy konjunkce. Pak R-implikace  $\xrightarrow{\text{R}}$  splňuje (I1a), (I1b), (I2), (I3).

**Důkaz:**  $\alpha \xrightarrow{\text{R}} \beta = \sup \Gamma(\alpha, \beta)$ , kde  $\Gamma(\alpha, \beta) = \{\gamma : \alpha \dot{\wedge} \gamma \leq \beta\}$  je interval obsahující nulu. (Při spojitosti  $\dot{\wedge}$  navíc uzavřený.)

(I1a) Je-li  $\alpha \leq \beta$ , pak  $\Gamma(\alpha, \beta) = \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\sup \Gamma(\alpha, \beta) = 1$ .

(I1b) Je-li  $\alpha > \beta$ , pak  $1 \notin \Gamma(\alpha, \beta)$ ,  $\sup \Gamma(\alpha, \beta) < 1$  (z uzavřenosti  $\Gamma(\alpha, \beta)$ ).

(I2):  $1 \xrightarrow{\text{R}} \beta = \sup\{\gamma : \gamma \leq \beta\} = \beta$ .

(I3): Zvětšujeme-li  $\alpha$ ,  $\Gamma(\alpha, \beta)$  se nezvětšuje.

Zvětšujeme-li  $\beta$ ,  $\Gamma(\alpha, \beta)$  se nezmenšuje.

**Věta:** Reziduovaná fuzzy implikace příslušná **spojité** fuzzy konjunkci  $\dot{\wedge}$  je spojitá, právě když  $\dot{\wedge}$  je nilpotentní.

## S-implikace

je operace

$$\alpha \xrightarrow[\text{S}]{\text{S}} \beta = \neg_{\text{S}} \alpha \dot{\vee} \beta \quad (\text{SI})$$

kde  $\dot{\vee}$  je fuzzy disjunkce

**Příklad:**

- Ze standardní disjunkce dostáváme **Kleeneovu–Dienesovu** implikaci

$$\alpha \xrightarrow[\text{S}]{\text{S}} \beta = \max(1 - \alpha, \beta).$$

- Z Łukasiewiczovy disjunkce dostáváme **Łukasiewiczovu** implikaci  $\xrightarrow[\text{L}]{\text{S}}$ , která se shoduje s Łukasiewiczovou reziduovanou implikací  $\xrightarrow[\text{L}]{\text{R}}$ .

Všechny požadavky (I1a),(I1b),(I2)–(I6) splňují ze zde probíraných fuzzy implikací pouze reziduované implikace odvozené od nilpotentních fuzzy konjunkcí (např. Łukasiewiczova implikace).

## 3.11 Fuzzy biimplikace (ekvivalence)

je operace  $\dot{\leftrightarrow}$ , obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \dot{\leftrightarrow} \beta = (\alpha \dot{\rightarrow} \beta) \dot{\wedge} (\beta \dot{\rightarrow} \alpha),$$

kde  $\dot{\rightarrow}$  je fuzzy implikace a  $\dot{\wedge}$  je fuzzy konjunkce (biimplikaci indexujeme stejně jako odpovídající fuzzy implikaci)

Pokud  $\dot{\rightarrow}$  splňuje (I1a) (například pro reziduovanou implikaci), je vždy aspoň jedna ze závorek na pravé straně rovna jedné, takže nezáleží na volbě fuzzy konjunkce  $\dot{\wedge}$ .

**Příklad:** **Łukasiewiczova** biimplikace:  $\alpha \xleftrightarrow[\text{L}]{\text{R}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|$ .

## 4 Fuzzy relace

### 4.1 Klasické relace

**Binární relace** je  $R \subseteq X \times Y$

**Inverzní relace** k  $R$ :  $R^{-1} \subseteq Y \times X$ :

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

**Složená relace** z relací  $R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$  je  $R \circ S \subseteq X \times Z$ :

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists y \in Y : (x, y) \in R, (y, z) \in S)\}$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\mu_R : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$$

### 4.2 Fuzzy relace

**Fuzzy relace** je  $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ ,  $\mu_R : X \times Y \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$

**Inverzní relace** k  $R$  je  $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ :

$$\forall x \in X \forall y \in Y : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$

**-složená relace** z relací  $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ ,  $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$  je  $R \circ S \in \mathcal{F}(X \times Z)$ :

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$$

**Věta** Inverze fuzzy relací je řezově konzistentní.

**Věta** Je-li  $Y$  konečná množina, pak standardní skládání fuzzy relací  $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ ,  $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$  je řezově konzistentní.

### 4.3 Speciální ostré relace

$R \subseteq X \times X$  může být:

- **rovnost**:  $E = \{(x, x) : x \in X\}$ ,
- **reflexivní**:  $\forall x \in X : (x, x) \in R$ , tj.  $E \subseteq R$ ,
- **symetrická**:  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ , tj.  $R = R^{-1}$ ,
- **antisymetrická**:  $((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R) \Rightarrow x = y$ , tj.  $R \cap R^{-1} \subseteq E$ ,
- **tranzitivní**:  $((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$ , tj.  $R \circ R \subseteq R$ ,
- **částečné uspořádání**: antisymetrická, reflexivní a tranzitivní,
- **ekvivalence**: symetrická, reflexivní a tranzitivní.

Relaci rovnosti,  $E \subseteq X \times X$  odpovídá funkce příslušnosti **Kroneckerovo delta**:

$$\mu_E(x, y) = \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = y, \\ 0 & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

### 4.4 Speciální fuzzy relace

$R \in \mathcal{F}(X \times X)$  může být:

- **reflexivní**:  $E \subseteq R$ ,
- **symetrická**:  $R = R^{-1}$ ,
- **-antisymetrická**:  $R \cap R^{-1} \subseteq E$ ,
- **-tranzitivní**:  $R \circ R \subseteq R$ ,
- **-částečné uspořádání**: -antisymetrická, reflexivní a -tranzitivní,

- **-ekvivalence**: symetrická, reflexivní a  $\cdot$ -tranzitivní.

Poslední čtyři pojmy závisí na volbě fuzzy konjunkce  $\wedge$ .

**Věta** Následující vlastnosti fuzzy relací jsou řezově konzistentní:

- reflexivita,
- symetrie,
- standardní antisymetrie,
- součinná antisymetrie,
- standardní tranzitivita,
- standardní částečné uspořádání,
- standardní ekvivalence.

## 4.5 Projekce fuzzy relací

**Levá (první) projekce** fuzzy relace  $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$  je  $P_1(R) \in \mathcal{F}(X)$ :

$$\mu_{P_1(R)}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_R(x, y)$$

**Pravá (druhá) projekce** fuzzy relace  $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$  je  $P_2(R) \in \mathcal{F}(Y)$ :

$$\mu_{P_2(R)}(y) = \sup_{x \in X} \mu_R(x, y)$$

**Věta** Projekce fuzzy relací jsou řezově konzistentní.

## 4.6 Cylindrické rozšíření

(též **kartézský součin**) fuzzy množin  $A \in \mathcal{F}(X)$ ,  $B \in \mathcal{F}(Y)$  je  $A \times B \in \mathcal{F}(X \times Y)$ :

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$$

Je to maximální fuzzy relace  $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$  taková, že  $P_1(R) \subseteq A$  a  $P_2(R) \subseteq B$ .  
Rovnost nastává, právě když  $h(A) = h(B)$ .

**Věta**

$$P_1(R) \times P_2(R) \supseteq R$$

**Věta** Cylindrické rozšíření je řezově konzistentní.

# 5 Princip rozšíření

## 5.1 Rozšíření binárních relací na **ostré** množiny

**Zobrazení** je  $R \subseteq X \times Y$ :

$$\forall x \in X \exists! y = r(x) \in Y : (x, y) \in R$$

Zobrazení  $R \subseteq X \times Y$  odpovídá  $r : X \rightarrow Y$  předpisem  $(x, y) \in R \iff y = r(x)$ ,  $R = \{(x, r(x)) : x \in X\}$

**Rozšíření** relace  $R \subseteq X \times Y$  je zobrazení

$r : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ :

$$r(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A : (x, y) \in R)\}$$

Analogicky rozšíření relace  $R^{-1} \subseteq Y \times X$  je zobrazení  $r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ :

$$r^{-1}(B) = \{x \in X : (\exists y \in B : (x, y) \in R)\}$$

Rozšíření  $r$  a  $r^{-1}$  jsou zobrazení, i když původní relace  $R$  zobrazení není. Nejsou však navzájem inverzní.

Pokud  $R$  je navíc zobrazení, pak

$$\begin{aligned} r(A) &= \{r(x) : x \in A\} \\ r^{-1}(B) &= \{x \in X : r(x) \in B\} \end{aligned}$$

Speciálně

$$r^{-1}(y) = r^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : r(x) = y\}$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\mu_{r(A)}(y) = \max_{x \in X} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_A(x))$$

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \max_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_B(y))$$

## 5.2 Rozšíření binárních relací na fuzzy množiny

**Rozšíření** relace  $R \subseteq X \times Y$  je zobrazení  $r : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ :

$$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in X} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_A(x)) \quad (A \in \mathcal{F}(X), y \in Y)$$

Analogicky rozšíření relace  $R^{-1} \subseteq Y \times X$  je zobrazení  $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ :

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_B(y)) \quad (B \in \mathcal{F}(Y), x \in X)$$

$R$  je ostrá relace, takže na volbě fuzzy konjunkce  $\wedge$  nezáleží:

$$\mu_R(x, y) \wedge \mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{pro } \mu_R(x, y) = 1 \\ 0 & \text{pro } \mu_R(x, y) = 0 \end{cases}$$

S využitím rozšíření

$$r : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y), \quad r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

relací  $R, R^{-1}$  na **ostré** množiny lze rozšíření na **fuzzy** množiny psát

$$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in r^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in r(x)} \mu_B(y)$$

Je-li  $R$  zobrazení, pak

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \mu_B(r(x))$$

Je-li  $R^{-1}$  zobrazení, pak

$$\mu_{r(A)}(y) = \mu_A(r^{-1}(y))$$

### **Věta**

$$r(\mathcal{R}_A(\alpha)) \subseteq \mathcal{R}_{r(A)}(\alpha)$$

Je-li pro všechna  $y \in Y$  množina

$$r^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R\}$$

konečná, pak platí rovnost.

## 5.3 Konvexní fuzzy množiny

Nechť  $L$  je lineární prostor.

Ostrá množina  $A \subseteq L$  je **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in (0, 1) : \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \leq \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

Nechť  $X$  je ostrá konvexní podmnožina lineárního prostoru.

Fuzzy množina  $A \in \mathcal{F}(X)$  se nazývá **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in (0, 1) : \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$$

Konvexita fuzzy množiny nemá nic společného s konvexitou její funkce příslušnosti!

**Věta** Konvexita je řezově konzistentní vlastnost.

Speciálně fuzzy množina reálných čísel je konvexní, právě když všechny její neprázdné řezy jsou intervaly.

## 5.4 Fuzzy čísla a fuzzy intervaly

**Fuzzy interval** je  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  taková, že:

- $\text{Supp } A$  je omezená množina,
- Pro všechna  $\alpha \in (0, 1)$  je  $\mathcal{R}_A(\alpha)$  uzavřený interval,
- $\mathcal{R}_A(1) \neq \emptyset$  (tj.  $\mathcal{R}_A(1)$  je neprázdný uzavřený interval).

Je-li navíc  $\mathcal{R}_A(1)$  jednobodová množina, nazývá se  $A$  **fuzzy číslo**.

Fuzzy intervaly jsou konvexní.

Fuzzy interval **opačný** k fuzzy intervalu  $A$  je  $-A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ :

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$$

(Princip rozšíření binárních relací uplatněný na unární minus)

$$\mathcal{R}_{-A}(\alpha) = -\mathcal{R}_A(\alpha)$$

## 5.5 Binární operace s fuzzy intervaly

$\square \in \{+, -, \cdot, /\}$

$\square : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  můžeme chápat jako ostrou relaci

$\square \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ :

$$\mu_{\square}((y, z), x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \square z = x, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Tu můžeme rozšířit podle již zavedeného principu rozšíření pro **binární relace** na operaci  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , kterou potřebujeme ještě složit s cylindrickým rozšířením  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ . Tím dostáváme binární operaci  $\square : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{array}{c} A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ \downarrow \\ A \times B \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ \downarrow \\ A \square B = \square(A \times B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mu_{A \square B}(x) &= \mu_{\square(A \times B)}(x) \\ &= \sup_{(y, z) \in \mathbb{R}^2} (\mu_{A \times B}(y, z) \wedge \mu_{\square}((y, z), x)) \\ &= \sup_{(y, z) \in \mathbb{R}^2, y \square z = x} \mu_{A \times B}(y, z) \\ &= \sup_{(y, z) \in \mathbb{R}^2, y \square z = x} (\mu_A(y) \wedge \mu_B(z)) \end{aligned}$$

Speciálně pro  $\square = +$ :

Hledáme supremum z funkce  $\mu_A(y) \wedge \mu_B(z)$  pro všechna  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$  taková, že  $y + z = x$ .

Tj. hledáme supremum z funkce  $\mu_A(x - z) \wedge \mu_B(z)$  pro všechna  $z \in \mathbb{R}$  (neboť  $y + z = x \Rightarrow y = x - z$ ).

$$\begin{aligned} \mu_{A+B}(x) &= \sup_{z \in \mathbb{R}} (\mu_A(x - z) \wedge \mu_B(z)), \\ \mu_{A-B}(x) &= \sup_{z \in \mathbb{R}} (\mu_A(x + z) \wedge \mu_B(z)), \\ \mu_{A \cdot B}(x) &= \sup_{z \in \mathbb{R}, z \neq 0} (\mu_A(x/z) \wedge \mu_B(z)), \quad x \neq 0, \\ \mu_{A/B}(x) &= \sup_{z \in \mathbb{R}} (\mu_A(x \cdot z) \wedge \mu_B(z)). \end{aligned}$$

Jen pro hodnotu  $\mu_{A \cdot B}(0)$  musíme použít původní definici kvůli problémům s dělením nulou.



Speciálně pro ostré intervaly  $A = \langle a, b \rangle$ ,  $B = \langle c, d \rangle$  dostaneme **intervalovou aritmetiku**:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a + c, b + d \rangle, \\ \langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle &= \langle a - d, b - c \rangle, \\ \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle &= \langle \min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd) \rangle, \\ \langle a, b \rangle / \langle c, d \rangle &= \langle \min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d) \rangle.\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí pouze pro  $0 \notin \langle c, d \rangle$ .

$$\mu_{A \square B}(x) = \max \{ \mu_A(y) \wedge \mu_B(z) : y, z \in \mathbb{R}, y \square z = x \}.$$

(V případě dělení předpokládáme navíc  $\mu_B(0) = 0$ .)

**Věta** Sčítání, odčítání, násobení a dělení fuzzy intervalů je řezově konzistentní (dělení za předpokladu, že stupeň příslušnosti nuly k děliteli je nulový).

**Věta** Součet, rozdíl a součin fuzzy čísel (resp. fuzzy intervalů) je fuzzy číslo (resp. fuzzy interval). (Též podíl, pokud uzávěr nosiče dělitele neobsahuje nulu.)

Libovolné reálné číslo  $x \in \mathbb{R}$  lze považovat za speciální případ fuzzy čísla, (reprezentovaného jednobodovou ostrou množinou  $\{x\}$ ), značíme  $x$ .

**Věta** Vlastnosti operací s fuzzy intervaly:

$$\begin{aligned}0 + A &= A, \\ 0 \cdot A &= 0, \\ 1 \cdot A &= A, \\ A + B &= B + A, \\ A \cdot B &= B \cdot A, \\ A + (B + C) &= (A + B) + C, \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, \\ A + (-B) &= A - B, \\ (-A) \cdot B &= -(A \cdot B) = A \cdot (-B), \\ -(-A) &= A, \\ A/B &= A \cdot (1/B), \\ \mu_{A \cdot (B+C)} &\leq \mu_{(A \cdot B) + (A \cdot C)}\end{aligned}$$

Pokud je v posledním vztahu  $A$  ostré číslo ( $A = x$ ), pak nastává rovnost.

Pro fuzzy intervaly může být:

$$\begin{aligned}A - A &\neq 0, \\ (A + B) - B &\neq A, \\ A/A &\neq 1, \\ (A/B) \cdot B &\neq A, \\ A \cdot (B + C) &\neq A \cdot B + A \cdot C.\end{aligned}$$

# Regular measures on tribes of fuzzy sets

Mirko Navara and Pavel Pták

Center for Machine Perception and Department of Mathematics

Faculty of Electrical Engineering

Czech Technical University

166 27 Praha, Czech Republic

navara@cmp.felk.cvut.cz, ptak@math.feld.cvut.cz

<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara>



# Related work presented at Linz Seminars

1979

Henri M. Prade: Nomenclature of fuzzy measures

Erich Peter Klement: Extension of probability measures to fuzzy measures and their characterization

Werner Schwyhla: Conditions for a fuzzy probability measure to be an integral

Josette and Jean-Louis Coulon: Fuzzy boolean algebras

1980

Erich Peter Klement: Some remarks on t-norms, fuzzy  $\sigma$ -algebras and fuzzy measures

Werner Schwyhla: Remarks on non-additive measures and fuzzy sets

Ulrich Höhle: Fuzzy measures as extensions

1981

Erich Peter Klement: Fuzzy measures assuming their values in the set of fuzzy numbers

1982

Erich Peter Klement: On different approaches to fuzzy probabilities

Didier Dubois: Upper and lower possibilistic expectations and applications

Ronald R. Yager: Probabilities from fuzzy observations

1983

Siegfried Weber: How to measure fuzzy sets

1984

Robert Lowen: Spaces of probability measures revisited

1985

Siegfried Weber: Generalizing the axioms of probability

1986

Erich Peter Klement: Representation of crisp- and fuzzy-valued measures by integrals

Siegfried Weber: Some remarks on the theory of pseudo-additive measures and its applications

1987

Erich Peter Klement: On a class of non-additive measures and integrals

1988

Alain Chateauneuf: Decomposable measures, distorted probabilities and concave capacities

Siegfried Weber: Decomposable measures for conditional objects

Aldo Venturelli: A Yosida-Hewitt like theorem for  $\perp$ -decomposable measures (joint paper with M. Squillante)

Massimo Squillante:  $\perp$ -decomposable measures and integrals: Convergence and absolute continuity (joint paper with L. D'Apuzzo and R. Sarno)

Ulrich Höhle: Non-classical models of probability theory

⋮

1998

Mirko Navara, Pavel Pták: Types of uncertainty and the role of the Frank t-norms in classical and nonclassical logics

Mirko Navara: Nearly Frank t-norms and the characterization of  $T$ -measures

Giuseppina Barbieri: A representation theorem and a Liapounoff theorem for  $T_s$ -measures

Beloslav Riečan: On the probability theory and fuzzy sets

Ulrich Höhle: Realizations for generalized probability measures

Marc Roubens: On probabilistic interactions among players in cooperative games

Radko Mesiar:  $k$ -order pseudo-additive measures

⋮

# Classical measure theory [Halmos]

THEOREMS about

FUNCTIONALS (MEASURES) on

SETS

Also [Sugeno; Dubois, Prade; Wang, Klir; Pap]

# What is fuzzy measure theory?

THEOREMS about

**FUZZY** FUNCTIONALS (MEASURES) on

SETS

[Feng; Guo, Zhang, Wu]



# What is fuzzy measure theory?

THEOREMS about

FUNCTIONALS (MEASURES) on

**FUZZY** SETS

[Butnariu, Klement]

# What is fuzzy measure theory?

THEOREMS about

**FUZZY** FUNCTIONALS (MEASURES) on

**FUZZY** SETS

[???

# What is fuzzy measure theory?

**FUZZY** THEOREMS about

**FUZZY** FUNCTIONALS (MEASURES) on

**FUZZY** SETS

[!!!]

# What is fuzzy measure theory?

HERE:

THEOREMS about

FUNCTIONALS (MEASURES) on

**FUZZY** SETS

[Butnariu, Klement, Mesiar, Barbieri, Weber]

# What is fuzzy measure theory?

HERE:

THEOREMS about

FUNCTIONALS (MEASURES) on

**FUZZY** SETS

[Butnariu, Klement, Mesiar, Barbieri, Weber]

Also measure theory on MV-algebras [Cignoli, D'Ottaviano, Mundici, Riečan]

---

# Basic fuzzy logical operations

**Standard negation**,  $\neg x = 1 - x$

# Basic fuzzy logical operations

**Standard negation**,  $\neg x = 1 - x$

**Fuzzy conjunction (t-norm)**:  $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  which is commutative, associative, nondecreasing, and  $T(a, 1) = a$

# Basic fuzzy logical operations

**Standard negation**,  $\neg x = 1 - x$

**Fuzzy conjunction (t-norm)**:  $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  which is commutative, associative, nondecreasing, and  $T(a, 1) = a$

A t-norm  $T$  is **strict** iff it is **continuous** and  
 $x > y, z > 0 \Rightarrow T(x, z) > T(y, z)$



# Basic fuzzy logical operations

**Standard negation**,  $\neg x = 1 - x$

**Fuzzy conjunction (t-norm)**:  $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  which is commutative, associative, nondecreasing, and  $T(a, 1) = a$

A t-norm  $T$  is **strict** iff it is **continuous** and  
 $x > y, z > 0 \Rightarrow T(x, z) > T(y, z)$

**Fuzzy disjunction (t-conorm)**:  $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  dual to  $T$ :

$$S(x, y) = \neg T(\neg x, \neg y)$$


---

# Basic notions of fuzzy measure theory

classical measure theory	fuzzy measure theory
<p><b><math>\sigma</math>-algebra</b> <math>\mathcal{T} \subseteq 2^X</math></p> <p><math>\emptyset \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A \in \mathcal{T} \Rightarrow A' = X \setminus A \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{T}</math></p>	<p><b>tribe</b> <math>(\mathcal{T}, T)</math>, where <math>\mathcal{T} \subseteq [0, 1]^X</math></p> <p><math>0 \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A \in \mathcal{T} \Rightarrow A' = 1 - A \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}</math> *</p> <p><math>(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{T}</math></p>
<p><b>measure</b> <math>\mu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty[</math></p> <p><math>\mu(\emptyset) = 0</math></p> <p><math>\mu(A \cup B)</math>  <math>= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)</math></p> <p><math>A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p>	<p><b>measure</b> <math>\mu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty[</math></p> <p><math>\mu(0) = 0</math></p> <p><math>\mu(A \dot{\cup} B)</math>  <math>= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)</math> *</p> <p><math>A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p>

\*  $(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x)), \quad (A \dot{\cup} B)(x) = S(A(x), B(x))$

# Basic notions of fuzzy measure theory

classical measure theory	fuzzy measure theory
<p><b><math>\sigma</math>-algebra</b> <math>\mathcal{T} \subseteq 2^X</math></p> <p><math>\emptyset \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A \in \mathcal{T} \Rightarrow A' = X \setminus A \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{T}</math></p>	<p><b>tribe</b> <math>(\mathcal{T}, T)</math>, where <math>\mathcal{T} \subseteq [0, 1]^X</math></p> <p><math>0 \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A \in \mathcal{T} \Rightarrow A' = 1 - A \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T} *</math></p> <p><math>(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{T}</math></p>
<p><b>measure</b> <math>\mu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty[</math></p> <p><math>\mu(\emptyset) = 0</math></p> <p><math>\mu(A \cup B)</math>  <math>= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)</math></p> <p><math>A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p> <p><math>A_n \searrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p>	<p><b>regular measure</b> <math>\mu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty[</math></p> <p><math>\mu(0) = 0</math></p> <p><math>\mu(A \dot{\cup} B)</math>  <math>= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) *</math></p> <p><math>A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p> <p><math>A_n \searrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p>

\*  $(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x)), \quad (A \dot{\cup} B)(x) = S(A(x), B(x))$

# Basic notions of fuzzy measure theory

classical measure theory	fuzzy measure theory
<p><b><math>\sigma</math>-algebra</b> <math>\mathcal{T} \subseteq 2^X</math></p> <p><math>\emptyset \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A \in \mathcal{T} \Rightarrow A' = X \setminus A \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{T}</math></p>	<p><b>tribe</b> <math>(\mathcal{T}, T)</math>, where <math>\mathcal{T} \subseteq [0, 1]^X</math></p> <p><math>0 \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A \in \mathcal{T} \Rightarrow A' = 1 - A \in \mathcal{T}</math></p> <p><math>A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T} *</math></p> <p><math>(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{T}</math></p>
<p><b>measure</b> <math>\mu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty[</math></p> <p><math>\mu(\emptyset) = 0</math></p> <p><math>\mu(A \cup B)</math>  <math>= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)</math></p> <p><math>A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p> <p><math>A_n \searrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p>	<p><b>regular measure</b> <math>\mu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty[</math></p> <p><math>\mu(0) = 0</math></p> <p><math>\mu(A \dot{\cup} B)</math>  <math>= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) *</math></p> <p><math>A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p> <p><math>A_n \searrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)</math></p>

**Always:** Crisp elements of  $\mathcal{T}$ , i.e.,  $\mathcal{T} \cap \{0, 1\}^X$ , determine a  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$

\*  $(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x)), \quad (A \dot{\cup} B)(x) = S(A(x), B(x))$

## Full tribes

**Example:** Let  $\mathcal{B}$  be a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $X$ ,  
 $\mathcal{T}$  be the corresponding collection of characteristic functions (indicators):

$$\mathcal{T} = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{B}\}.$$

Then  $(\mathcal{T}, T)$  is a tribe (for any t-norm  $T$ ).  
 It is called a **Boolean tribe**.

## Full tribes

**Example:** Let  $\mathcal{B}$  be a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $X$ ,  
 $\mathcal{T}$  be the corresponding collection of characteristic functions (indicators):

$$\mathcal{T} = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{B}\}.$$

Then  $(\mathcal{T}, T)$  is a tribe (for any t-norm  $T$ ).  
It is called a **Boolean tribe**.

**Example:** The tribe of all constants from  $[0, 1]$   
(w.l.o.g., with a singleton domain)  
may be identified with numbers from  $[0, 1]$ .  
It is called a **full tribe of constants**.

## Full tribes

**Example:** Let  $\mathcal{B}$  be a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $X$ ,  
 $\mathcal{T}$  be the corresponding collection of characteristic functions (indicators):

$$\mathcal{T} = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{B}\}.$$

Then  $(\mathcal{T}, T)$  is a tribe (for any t-norm  $T$ ).  
It is called a **Boolean tribe**.

**Example:** The tribe of all constants from  $[0, 1]$   
(w.l.o.g., with a singleton domain)  
may be identified with numbers from  $[0, 1]$ .  
It is called a **full tribe of constants**.

**Example:** Let  $\mathcal{B}$  be a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $X$ ,  
 $\mathcal{T} = \{A \in [0, 1]^X \mid A \text{ is } \mathcal{B}\text{-measurable}\}$   
Then  $(\mathcal{T}, T)$  is a  $T$ -tribe for any measurable t-norm  $T$ .  
It is called a **full tribe**.

---

## Łukasiewicz t-norm

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$$

These tribes correspond to set-representable  $\sigma$ -complete MV-algebras



## Łukasiewicz t-norm

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$$

These tribes correspond to set-representable  $\sigma$ -complete MV-algebras

**Theorem:** [Butnariu, Klement] All elements of  $\mathcal{T}$  are  $\mathcal{B}$ -measurable. Each measure is **regular** and it is of the form

$$\mu(A) = \int A \, d\nu$$

where  $\nu = \mu \upharpoonright \mathcal{B}$  is a (classical) measure on  $\mathcal{B}$ .

## Łukasiewicz t-norm

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$$

These tribes correspond to set-representable  $\sigma$ -complete MV-algebras

**Theorem:** [Butnariu, Klement] All elements of  $\mathcal{T}$  are  $\mathcal{B}$ -measurable. Each measure is **regular** and it is of the form

$$\mu(A) = \int A d\nu$$

where  $\nu = \mu \upharpoonright \mathcal{B}$  is a (classical) measure on  $\mathcal{B}$ .

$\int A d\nu$  ... **linear integral measure**

---

# Frank t-norms

Frank t-norms  $T_{\lambda}^{\mathbf{F}}$ ,  $\lambda \in [0, \infty]$ , [Frank] are defined by

$$T_{\lambda}^{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{cases} \log_{\lambda} \left( 1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1} \right) & \text{if } \lambda \in ]0, \infty[ \setminus \{1\}, \\ T_{\mathbf{M}}(x, y) = \min(x, y) & \text{if } \lambda = 0, \\ T_{\mathbf{P}}(x, y) = x \cdot y & \text{if } \lambda = 1, \\ T_{\mathbf{L}}(x, y) = \max(x + y - 1, 0) & \text{if } \lambda = \infty. \end{cases}$$


---

# Regular measures on full tribes, strict Frank t-norms

Frank t-norm  $T_{\lambda}^F$  is strict iff  $0 < \lambda < \infty$

# Regular measures on full tribes, strict Frank t-norms

Frank t-norm  $T_\lambda^F$  is strict iff  $0 < \lambda < \infty$

**Theorem:** Regular measures on  $(\mathcal{T}, T_\lambda^F)$  are (regular) measures on  $(\mathcal{T}, T_L)$ ,  
i.e., of the form

$$\mu(A) = \int A d\nu$$

where  $\nu = \mu \upharpoonright \mathcal{B}$  is a classical measure on  $\mathcal{B}$   
( $\mu$  is a linear integral measure).

---

# Nearly Frank t-norms

[Mesiar, MN]

**Nearly Frank t-norm:**

$$T(a, b) = h_T^{-1}(T_{\lambda_T}^{\mathbf{F}}(h_T(a), h_T(b)))$$

where  $T_{\lambda_T}^{\mathbf{F}}$  is a Frank t-norm and

$h_T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  is an increasing bijection which **commutes with**  $\neg$ , i.e.,

$$h_T(\neg a) = \neg h_T(a)$$

# Nearly Frank t-norms

[Mesiar, MN]

**Nearly Frank t-norm:**

$$T(a, b) = h_T^{-1}(T_{\lambda_T}^{\mathbf{F}}(h_T(a), h_T(b)))$$

where  $T_{\lambda_T}^{\mathbf{F}}$  is a Frank t-norm and

$h_T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  is an increasing bijection which **commutes with**  $\neg$ , i.e.,

$$h_T(\neg a) = \neg h_T(a)$$

$\lambda_T, h_T$  are uniquely determined by  $T$  (except for the case  $T = T_{\mathbf{M}}$ )

# Nearly Frank t-norms

[Mesiar, MN]

**Nearly Frank t-norm:**

$$T(a, b) = h_T^{-1}(T_{\lambda_T}^{\mathbf{F}}(h_T(a), h_T(b)))$$

where  $T_{\lambda_T}^{\mathbf{F}}$  is a Frank t-norm and

$h_T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  is an increasing bijection which **commutes with**  $\neg$ , i.e.,  
 $h_T(\neg a) = \neg h_T(a)$

$\lambda_T, h_T$  are uniquely determined by  $T$  (except for the case  $T = T_{\mathbf{M}}$ )

There are nearly Frank t-norms which are not Frank (take  $h_T \neq id$ )

---



**Regular** measures on **full** tribes,  
strict **nearly Frank** t-norms

**Strict** nearly Frank t-norms correspond to **strict** Frank t-norms

# Regular measures on full tribes, strict nearly Frank t-norms

Strict nearly Frank t-norms correspond to strict Frank t-norms

**Theorem:** Each regular measure is of the form

$$\mu(A) = \int (h_T \circ A) d\nu$$

where  $\nu = \mu \upharpoonright \mathcal{B}$  is a classical measure on  $\mathcal{B}$ .

# Regular measures on full tribes, strict nearly Frank t-norms

Strict nearly Frank t-norms correspond to strict Frank t-norms

**Theorem:** Each regular measure is of the form

$$\mu(A) = \int (h_T \circ A) d\nu$$

where  $\nu = \mu \upharpoonright \mathcal{B}$  is a classical measure on  $\mathcal{B}$ .

$\int (h_T \circ A) d\nu$  ... generalized integral measure

---

**Regular** measures on **full** tribes,  
strict t-norms which are **not nearly Frank**

**Regular measures on full tribes,  
strict t-norms which are not nearly Frank**

There are strict t-norms which are not nearly Frank [MN]

# Regular measures on full tribes, strict t-norms which are not nearly Frank

There are strict t-norms which are not nearly Frank [MN]

Can we recognize them?

# Regular measures on full tribes, strict t-norms which are not nearly Frank

There are strict t-norms which are not nearly Frank [MN]

Can we recognize them?

Yes [Mesiar]

# Regular measures on full tribes, strict t-norms which are not nearly Frank

There are strict t-norms which are not nearly Frank [MN]

Can we recognize them?

Yes [Mesiar]

**Theorem:** For each strict t-norm which is not nearly Frank, there are **no non-zero regular measures** on a full tribe.



# Regular measures on full tribes, strict t-norms which are not nearly Frank

There are strict t-norms which are not nearly Frank [MN]

Can we recognize them?

Yes [Mesiar]

**Theorem:** For each strict t-norm which is not nearly Frank, there are **no non-zero regular measures** on a full tribe.

measures	tribes	$T$ nearly Frank (with $h_T$ )	$T$ not nearly Frank
regular	full	<u><math>\int (h_T \circ A) d\nu</math></u>	0

Measures on **full** tribes,

**strict t-norms which are not nearly Frank**

(Regularity is omitted.)

# Measures on full tribes, strict t-norms which are not nearly Frank

(Regularity is omitted.)

**Theorem:** Each measure is of the form

$$\mu(A) = \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\varrho$  is a classical measure on  $\mathcal{B}$ .

# Measures on full tribes, strict t-norms which are not nearly Frank

(Regularity is omitted.)

**Theorem:** Each measure is of the form

$$\mu(A) = \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\varrho$  is a classical measure on  $\mathcal{B}$ .

$\varrho(\text{Supp } A)$  ... **support measure**

---

Measures on **full** tribes,  
strict **nearly Frank** t-norms

# Measures on full tribes, strict nearly Frank t-norms

**Theorem:** [Butnariu, Klement; Mesiar, MN] Each measure is of the form

$$\mu(A) = \int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\nu, \varrho$  are classical measures on  $\mathcal{B}$ .

# Measures on full tribes, strict nearly Frank t-norms

**Theorem:** [Butnariu, Klement; Mesiar, MN] Each measure is of the form

$$\mu(A) = \int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\nu, \varrho$  are classical measures on  $\mathcal{B}$ .

**Particular case of strict Frank t-norms:**

$$\mu(A) = \int A d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$$

# Measures on full tribes, strict nearly Frank t-norms

**Theorem:** [Butnariu, Klement; Mesiar, MN] Each measure is of the form

$$\mu(A) = \int (h_T \circ A) \, d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\nu, \varrho$  are classical measures on  $\mathcal{B}$ .

Particular case of strict Frank t-norms:

$$\mu(A) = \int A \, d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$$

measures	tribes	$T$ nearly Frank (with $h_T$ )	$T$ not nearly Frank
regular	full	$\int (h_T \circ A) \, d\nu$	0
all	full	$\int (h_T \circ A) \, d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)$



Examples of measures on the full tribe of constants  $([0, 1], T)$ ,  $T$  **strict nearly Frank**

# Examples of measures on the full tribe of constants $([0, 1], T)$ , $T$ **strict nearly Frank**

**Example:**

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

It is a support measure on a singleton.

It is **monotone**, but **not regular**.

# Examples of measures on the full tribe of constants $([0, 1], T)$ , $T$ **strict nearly Frank**

**Example:**

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

It is a support measure on a singleton.

It is **monotone**, but **not regular**.

**Example:**

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

It is a measure which is a linear combination of a support measure  $\kappa$  and a regular measure  $\nu = id$ ,  $\mu = \kappa - \frac{1}{2} id$

It is **neither monotone nor regular**.

---

# Charges

Alternative notion:

**Signed measure (charge)** on a tribe  $(\mathcal{T}, T)$ :

$\mu: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  s.t.

- ◆  $\mu(0) = 0$
- ◆  $\mu(A \overset{\cdot}{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \overset{\cdot}{\cap} B)$
- ◆  $A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$

# Charges

Alternative notion:

**Signed measure (charge)** on a tribe  $(\mathcal{T}, T)$ :

$\mu: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  s.t.

- ◆  $\mu(0) = 0$
- ◆  $\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- ◆  $A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$

Moreover, for a **regular signed measure (regular charge)** we require

- ◆  $A_n \searrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
-

Tribes which are **not full**

## Tribes which are **not full**

They exist

## Tribes which are **not full**

They exist

**Example:** Boolean tribes



## Tribes which are **not full**

They exist

**Example:** Boolean tribes

**Example:**

$\mathcal{T} = \{A \in [0, 1]^{\mathbb{R}} \mid A \text{ is Borel-measurable, } A(x) \in \{0, 1\} \text{ almost everywhere}\}$   
( $T$  an arbitrary measurable t-norm)

## Tribes which are **not full**

They exist

**Example:** Boolean tribes

**Example:**

$\mathcal{T} = \{A \in [0, 1]^{\mathbb{R}} \mid A \text{ is Borel-measurable, } A(x) \in \{0, 1\} \text{ almost everywhere}\}$   
 ( $T$  an arbitrary measurable t-norm)

**Example:** [Butnariu, Klement; Mesiar; MN]

$\mathcal{B}$  ... a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $X$

$\Delta$  ... a  $\sigma$ -ideal in  $\mathcal{B}$

$\mathcal{T} = \{A \in [0, 1]^X \mid A \text{ is } \mathcal{B}\text{-measurable, } A^{-1}(]0, 1[) \in \Delta\}$

$(\mathcal{T}, T)$  is a tribe called a **weakly full tribe** (**weakly generated tribe**)

---

## Tribes which are weakly full

There are many strict t-norms  $T$  such that all tribes  $(\mathcal{T}, T)$  are weakly full.

## Tribes which are weakly full

There are many strict t-norms  $T$  such that all tribes  $(\mathcal{T}, T)$  are weakly full.

These are strict **sufficient** t-norms, i.e., t-norms which – with the standard negation and limits of monotone sequences approximate **sufficient sets of fuzzy logical operations** “as much as possible” [Butnariu, Klement, Mesiar, MN]

## Tribes which are weakly full

There are many strict t-norms  $T$  such that all tribes  $(\mathcal{T}, T)$  are weakly full.

These are strict **sufficient** t-norms, i.e., t-norms which – with the standard negation and limits of monotone sequences approximate **sufficient sets of fuzzy logical operations** “as much as possible” [Butnariu, Klement, Mesiar, MN]

**Example:** Strict t-norms from the following families are sufficient: Aczél–Alsina, Frank, Hamacher\*, the eighth Mizumoto, the tenth Mizumoto, Schweizer–Sklar\*, the third Schweizer, etc.

\* except for one value of the parameter

---

Tribes which are **not weakly full**

## Tribes which are **not weakly full**

They exist (even for **strict** t-norms)

## Tribes which are **not weakly full**

They exist (even for **strict** t-norms)

**Example:** Hamacher product,  $T_0^{\mathbf{H}}$ :

$$T_0^{\mathbf{H}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0, \\ \frac{x y}{x + y - x y} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let  $X = \{x, y\}$ . There is a distance  $d$  on  $[0, 1]$  and  $c \in \mathbb{R}$  such that  $(\mathcal{T}, T_0^{\mathbf{H}})$  is a tribe, where  $\mathcal{T} = \{0, 1\} \cup \{A \in ]0, 1[^X \mid d(A(x), A(y)) \leq c\}$



## Tribes which are not weakly full

They exist (even for **strict** t-norms)

**Example:** Hamacher product,  $T_0^{\mathbf{H}}$ :

$$T_0^{\mathbf{H}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0, \\ \frac{xy}{x+y-xy} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let  $X = \{x, y\}$ . There is a distance  $d$  on  $[0, 1]$  and  $c \in \mathbb{R}$  such that  $(\mathcal{T}, T_0^{\mathbf{H}})$  is a tribe, where  $\mathcal{T} = \{0, 1\} \cup \{A \in ]0, 1[^X \mid d(A(x), A(y)) \leq c\}$

Further counterexamples:

T-norms  $T$  obtained from the Hamacher product by the formula

$$T(x, y) = h_T^{-1}(T_0^{\mathbf{H}}(h_T(x), h_T(y))),$$

where  $h_T$  is an order automorphism of  $[0, 1]$  which commutes with  $\neg$

---

## Further counterexamples

This way, we obtain

## Further counterexamples

This way, we obtain

- ♦ strict Dombi t-norms ( $\lambda \in ]0, \infty[$ )

$$x \mathrel{\mathop{\wedge}\limits_{D_\lambda}} y = \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^\lambda + \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} + 1}$$

## Further counterexamples

This way, we obtain

- strict Dombi t-norms ( $\lambda \in ]0, \infty[$ )

$$x \mathrel{\mathop{\wedge}\limits_{D_\lambda}} y = \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^\lambda + \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} + 1}$$

- the first Mizumoto t-norm

$$x \mathrel{\mathop{\wedge}\limits_{M1}} y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \left( \cot \frac{\pi}{2} x + \cot \frac{\pi}{2} y \right)$$

## Further counterexamples

This way, we obtain

- ♦ strict Dombi t-norms ( $\lambda \in ]0, \infty[$ )

$$x \mathop{\bigwedge}_{D_\lambda} y = \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^\lambda + \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} + 1}$$

- ♦ the first Mizumoto t-norm

$$x \mathop{\bigwedge}_{M1} y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \left( \cot \frac{\pi}{2} x + \cot \frac{\pi}{2} y \right)$$

**Theorem:** All other strict t-norms **found in the literature** are sufficient.

---

## Tribes which are **not weakly full**

**Open problem:** Characterize tribes for non-sufficient t-norms.

## Tribes which are **not weakly full**

**Open problem:** Characterize tribes for non-sufficient t-norms.

Although we do not know a characterization of tribes, we can characterize **regular** measures on them.

## Tribes which are not weakly full

**Open problem:** Characterize tribes for non-sufficient t-norms.

Although we do not know a characterization of tribes, we can characterize **regular** measures on them.

Extreme cases:

Full tribes: **no** non-zero regular measures.



## Tribes which are **not weakly full**

**Open problem:** Characterize tribes for non-sufficient t-norms.

Although we do not know a characterization of tribes, we can characterize **regular** measures on them.

Extreme cases:

Full tribes: **no** non-zero regular measures.

Boolean tribes: **many** non-zero regular measures.

## Tribes which are **not weakly full**

**Open problem:** Characterize tribes for non-sufficient t-norms.

Although we do not know a characterization of tribes, we can characterize **regular** measures on them.

Extreme cases:

Full tribes: **no** non-zero regular measures.

Boolean tribes: **many** non-zero regular measures.

General case: something between.

---

# Regular measures on tribes

$\Delta_{\mathcal{T}} = \{A^{-1}(]0, 1[) \mid A \in \mathcal{T}\}$  is a  $\sigma$ -ideal in  $\mathcal{B}$

# Regular measures on tribes

$\Delta_{\mathcal{T}} = \{A^{-1}(]0, 1[) \mid A \in \mathcal{T}\}$  is a  $\sigma$ -ideal in  $\mathcal{B}$

**Theorem:** If  $\mathcal{T}$  is strict and **not nearly Frank**, then each measure is of the form

$$\mu(A) = \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\varrho$  is a (classical) measure on  $\mathcal{B}$  which **vanishes at**  $\Delta_{\mathcal{T}}$

## Regular measures on tribes

$\Delta_{\mathcal{T}} = \{A^{-1}(]0, 1[) \mid A \in \mathcal{T}\}$  is a  $\sigma$ -ideal in  $\mathcal{B}$

**Theorem:** If  $\mathcal{T}$  is strict and **not nearly Frank**, then each measure is of the form

$$\mu(A) = \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\varrho$  is a (classical) measure on  $\mathcal{B}$  which **vanishes at**  $\Delta_{\mathcal{T}}$

For strict nearly Frank t-norms the tribes are weakly full and the characterization is as before.

# Regular measures on tribes

$\Delta_{\mathcal{T}} = \{A^{-1}(]0, 1[) \mid A \in \mathcal{T}\}$  is a  $\sigma$ -ideal in  $\mathcal{B}$

**Theorem:** If  $T$  is strict and **not nearly Frank**, then each measure is of the form

$$\mu(A) = \varrho(\text{Supp } A)$$

where  $\varrho$  is a (classical) measure on  $\mathcal{B}$  which **vanishes at  $\Delta_{\mathcal{T}}$**

For strict nearly Frank t-norms the tribes are weakly full and the characterization is as before.

measures	tribes	$T$ nearly Frank (with $h_T$ )	$T$ not nearly Frank
regular	full	$\int (h_T \circ A) \, d\nu$	<b>0</b>
all	full	$\int (h_T \circ A) \, d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)$
regular	general	$\int (h_T \circ A) \, d\nu$	$\varrho(\text{Supp } A) \text{ }^*$

\* where  $\varrho \restriction \Delta_T = 0$ ; then  $\varrho(\text{Supp } A) = \varrho(A^{-1}(1)) = \int (h_T \circ A) \, d\varrho$   
( $h_T$  arbitrary)

# Measures on tribes

## Measures on tribes

Characterization of measures is known only for weakly full tribes  
(e.g., if  $T$  is sufficient).



## Measures on tribes

Characterization of measures is known only for weakly full tribes (e.g., if  $T$  is sufficient).

Then measures are as before [Barbieri, H. Weber, MN]:

measures	tribes	$T$ nearly Frank (with $h_T$ )	$T$ not nearly Frank
regular	full	$\int (h_T \circ A) d\nu$	<b>0</b>
all	full	$\int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)$
regular	general	$\int (h_T \circ A) d\nu$	$\varrho(\text{Supp } A)^*$
all	general	$\int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)^{**}$

\* where  $\varrho \restriction \Delta_T = 0$ ; then  $\varrho(\text{Supp } A) = \varrho(A^{-1}(1)) = \int (h_T \circ A) d\varrho$  ( $h_T$  arbitrary)

\*\* only for weakly full tribes

## Measures on tribes

Characterization of measures is known only for weakly full tribes (e.g., if  $T$  is sufficient).

Then measures are as before [Barbieri, H. Weber, MN]:

measures	tribes	$T$ nearly Frank (with $h_T$ )	$T$ not nearly Frank
regular	full	$\int (h_T \circ A) d\nu$	<b>0</b>
all	full	$\int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)$
regular	general	$\int (h_T \circ A) d\nu$	$\varrho(\text{Supp } A)^*$
all	general	$\int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)^{**}$

\* where  $\varrho \restriction \Delta_T = 0$ ; then  $\varrho(\text{Supp } A) = \varrho(A^{-1}(1)) = \int (h_T \circ A) d\varrho$  ( $h_T$  arbitrary)

\*\* only for weakly full tribes

**Open problem:** Characterize measures on tribes which are not weakly full.

## Measures on tribes

Characterization of measures is known only for weakly full tribes (e.g., if  $T$  is sufficient).

Then measures are as before [Barbieri, H. Weber, MN]:

measures	tribes	$T$ nearly Frank (with $h_T$ )	$T$ not nearly Frank
regular	full	$\int (h_T \circ A) d\nu$	0
all	full	$\int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)$
regular	general	$\int (h_T \circ A) d\nu$	$\varrho(\text{Supp } A)^*$
all	general	$\int (h_T \circ A) d\nu \pm \varrho(\text{Supp } A)$	$\varrho(\text{Supp } A)^{**}$

\* where  $\varrho \restriction \Delta_T = 0$ ; then  $\varrho(\text{Supp } A) = \varrho(A^{-1}(1)) = \int (h_T \circ A) d\varrho$  ( $h_T$  arbitrary)

\*\* only for weakly full tribes

**Open problem:** Characterize measures on tribes which are not weakly full.

For **regular** measures, the characterization is known in full generality.

# CONCLUSION

We have a reasonable generalization of measure theory for tribes of fuzzy sets.

(There are analogues of Jordan and Hahn decomposition, Lyapunov theorem, etc.)

# CONCLUSION

We have a reasonable generalization of measure theory for tribes of fuzzy sets.

(There are analogues of Jordan and Hahn decomposition, Lyapunov theorem, etc.)

In contrast to preceding work, most of the results do not need any assumptions on the structure of the tribe.

# CONCLUSION

We have a reasonable generalization of measure theory for tribes of fuzzy sets.

(There are analogues of Jordan and Hahn decomposition, Lyapunov theorem, etc.)

In contrast to preceding work, most of the results do not need any assumptions on the structure of the tribe.

**Regular** measures seem to be a reasonable alternative to the original definition by Butnariu and Klement.

# CONCLUSION

We have a reasonable generalization of measure theory for tribes of fuzzy sets.

(There are analogues of Jordan and Hahn decomposition, Lyapunov theorem, etc.)

In contrast to preceding work, most of the results do not need any assumptions on the structure of the tribe.

**Regular** measures seem to be a reasonable alternative to the original definition by Butnariu and Klement.

The characterization of **charges** is simpler than that of **measures**.

# CONCLUSION

We have a reasonable generalization of measure theory for tribes of fuzzy sets.

(There are analogues of Jordan and Hahn decomposition, Lyapunov theorem, etc.)

In contrast to preceding work, most of the results do not need any assumptions on the structure of the tribe.

**Regular** measures seem to be a reasonable alternative to the original definition by Butnariu and Klement.

The characterization of **charges** is simpler than that of **measures**.

**Frank (more exactly, nearly Frank) t-norms play a prominent role in the characterization of measures.**